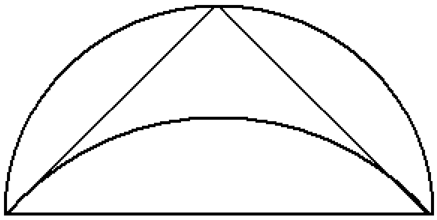
Hippokratész holdacskái

(Szimplikiosz idézi Eudémoszt)

Miután ezt bebizonyította, azt is megmutatta, hogy lehetséges egy olyan holdacskát négyszögesíteni, melynek külső kerülete egy félkör. Ezt úgy érte el, hogy félkört írt egy egyenlőszárú derékszögű háromszög köré, és az alapra olyan körszeletet írt, amelyik hasonló az oldalak által levágottakhoz.

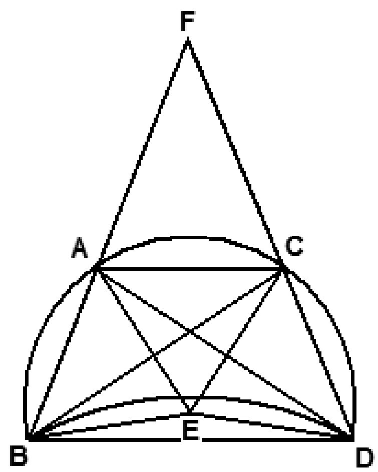


Mivel az alapon fekvő körszelet egyenlő az oldalakon fekvők összegével, ezért ha a háromszögnek az alapon fekvő körszelet feletti részét mindkettőhöz hozzáadjuk, a holdacska egyenlő lesz a háromszöggel.

Így a hold, minthogy a háromszöggel egyenlőnek bizonyult, négyszögesíthető.

Feltéve tehát, hogy a holdacska külső kerülete a félkör, Hippokratész könnyedén négyszögesítette a holdacskát.

Ezek után egy olyan kerületet vett, amely nagyobb a félkörnél, annak a trapéznak a segítségével, amelyben három oldal egyenlő, míg a párhuzamos oldalak közül a hosszabb akkora, hogy a rá emelt négyzet háromszorosa a többi oldalra emelt négyzeteknek, és ezt a trapézt foglalta körbe, majd legnagyobb oldalára olyan körszeletet írt, amelyik hasonló a többi oldal által a körből levágottakhoz. […]



Hogy az említett körszelet nagyobb a félkörnél, az világos abból, ha átlót húzunk a trapézba. Mivel az erre a két oldalt átfogó átlóra emelt négyzet nagyobb, mint a maradék oldalra emelt négyzet kétszerese.

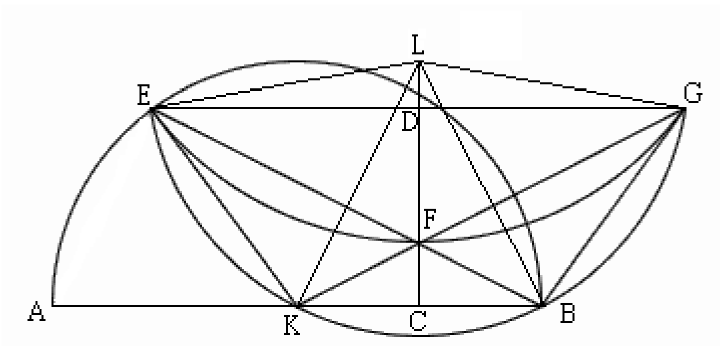
Így a trapéz legnagyobb oldalára emelt négyzet kisebb, mint az átlóra emelt négyzetnek és a maradék, a legnagyobb oldal és az átló által átfogott oldalra emelt négyzetnek az összege.

Így a trapéz legnagyobb oldalára nyíló szög hegyesszög.

Így az a szelet, amelyik tartalmazza az említett szöget, nagyobb a félkörnél. És ez a körszelet adja a holdacska külső kerületét.

[A négyszögesítés menete nincs ismertetve, de ugyanaz, mint az előző esetben.]

Hippokratész egy olyan esetet is megoldott, ahol a külső kerület kisebb, mint a félkör, és az alábbi szerkesztést adta.



Rajzoljunk kört AB átmérővel, melynek középpontja legyen K.

Felezze CD a BK-t derékszögben, és az EF egyenes szakaszt úgy húzzuk be CD és a kerület közé, hogy B felé mutasson, míg a rá emelt négyzet legyen másfélszerese a sugárra emelt négyzetnek.

Húzzuk meg az AB-vel párhuzamos EG-t, és húzzunk K-ból egyenes szakaszokat E-be és F-be.

Az F-be húzott szakaszt hosszabbítsuk meg G-ig az EG szakaszon, és B-től is húzzunk egyenes szakaszokat F-ig és G-ig.

Ekkor nyilvánvaló, hogy BF meghosszabbítása át fog menni E-n, és BG egyenlő lesz EK-val. […]

Mivel ez így van, azt állítom, hogy az EKBG trapéz körbe írható.

Írjunk az EFG háromszög köré is egy körszeletet, ekkor világos, hogy az EF, FG körszeletek mindegyike hasonló lesz az EK, KB, BG körszeletek mindegyikéhez.

Ekkor az a holdacska, melynek EKGB a külső kerülete, egyenlő lesz azzal az egyenes vonalú alakzattal, amelyet a BFG, BFK és EKF háromszögek tesznek ki.

Ugyanis azok a körszeletek, amelyeket a holdacska belső oldalán az EF, FG szakaszok vágnak ki az egyenes vonalú alakzatból, együtt egyenlők az alakzaton kívül található, EK, KB és BG egyenes szakaszok által levágott körszeletekkel, mivel a belső körszeletek mindegyike másfélszerese a külső körszeletek mindegyikének, hiszen feltettük, hogy az EF-re emelt négyzet másfélszerese az EK-ra emelt négyzetnek.

Így ha a holdacska egyenlő a három körszeletnek meg az egyenes vonalú alakzat és a két körszelet különbségének az összegével, ahol a trapéz magában foglalja a két körszeletet, de a hármat nem, és a két körszelet összességében egyenlő a három körszelettel, akkor ebből következik, hogy a holdacska egyenlő az egyenes vonalú alakzattal.

Azt, hogy a holdacska külső kerülete kisebb a félkörnél, azzal bizonyítja, hogy a külső körszeleten lévő szög tompaszög.

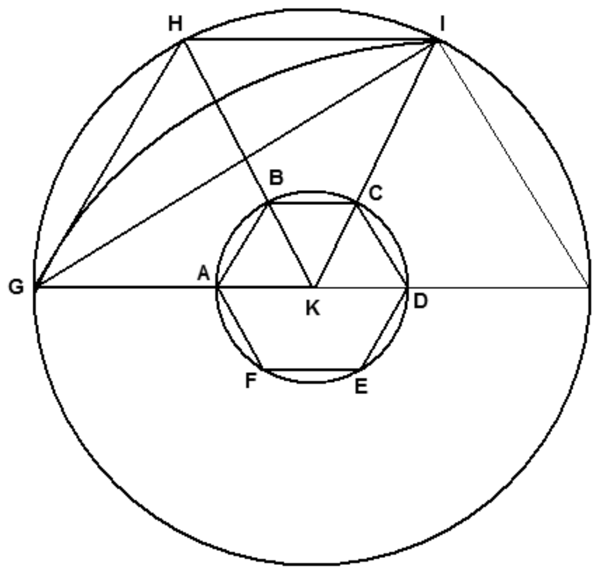
Azt pedig, hogy az EKG szög tompaszög, a következőképpen bizonyítja.

[Itt a szöveg sérült, az adott érvelést csak rekonstruálni lehet.]

Így aztán Hippokratész minden holdacskát négyszögesített, nemcsak azt, amelyiknek a külső kerülete egy félkörívvel egyezik meg, hanem azt is, amelynek külső kerülete nagyobb, és azt is, amelyiknek kisebb a félkörnél.

Emellett négyszögesítette egy holdacska és egy kör összegét is, a következőképpen.

Rajzoljunk két kört K mint középpont körül, úgy, hogy a külső átmérőjére emelt négyzet legyen hatszorosa a belső átmérőjére emeltnek.



Írjunk a belső körbe egy ABCDEF szabályos hatszöget, húzzuk meg KA-t, KB-t és KC-t, és hosszabbítsuk meg ezeket a külső körig. Húzzuk be GH, HI és GI szakaszokat.

Rajzoljunk GI-re egy olyan körszeletet, amely hasonló a GH által levágott körszelethez.

Ekkor az így kapott körszelet alapjára emelt négyzet háromszorosa a külső hatszög oldalára emelt négyzetnek, mivel a nagy körszelet alapjára emelt négyzet meg a külső hatszög oldalára emelt négyzet együtt egyenlő a külső kör átmérőjére emelt négyzettel, vagyis a külső hatszög oldalára emelt négyzet négyszeresével.

Emellett a külső hatszög oldalára emelt négyzet hatszorosa a belső hatszög oldalára emelt négyzetnek.

Így aztán a legnagyobb körszelet egyenlő a GH-n és a HI-n levő körszeletek, valamint a belső körben levő összes körszeletek összegével.

Így a GHI háromszög egyenlő a GHI holdacska és a belső körben levő összes körszeletek összegével.

Ha most mindkettőhöz hozzáadjuk a belső körben lévő hatszöget, a GHI háromszögnek és a belső hatszögnek az összege egyenlő lesz a GHI holdacska és a belső kör összegével.

Minthogy a két egyenes vonalú alakzat összege négyszögesíthető, így a kérdéses körnek és a holdacskának az összege is négyszögesíthető.