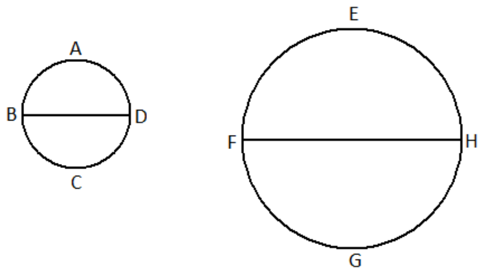
XII.2: Körök úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei.



$$\frac{BD^2}{FH^2} = \frac{ABCD \odot}{EFGH \odot}$$

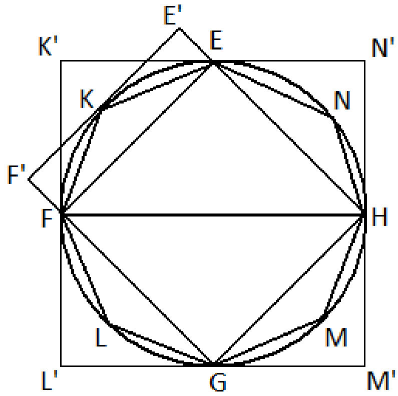
Tegyük fel, hogy nem: $\frac{BD^2}{FH^2} = \frac{ABCD \odot}{\Phi}$ ahol $\Phi \neq EFGH \odot$

I. $\Phi < EFGH \odot$

Módszer: írjunk be sokszögeket, és nézzük a kör és a sokszög közti (egyre kisebb) területeket

1. $EFGH \square > EFGH \odot /2$
   mert $2 \cdot EFGH\square = K'L'M'N'\square$ és
   $EFGH\odot < K'L'M'N'\square$
2. $FKE \vartriangle > FKE$ ◖ $/2$
   mert $2 \cdot FKE \vartriangle = EE'F'F$ ▯ és
   FKE ◖ $< EE'F'F$ ▯
   $GLF \vartriangle > GLF$ ◖ $/2$
   …
   …

Stb.



X.1: Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és a maradékból a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.

$\rightarrow$ itt pontosan ez történik: a körből kivonunk a felénél többet (négyzet), a maradék körszeletekből a felüknél többet (háromszögek), stb. – így előbb-utóbb a maradék körszeletek $\sum \Psi_i$ összege bárminél kisebbé tehető $\rightarrow$ legyen $\sum \Psi_i < EFGH \odot - \Phi$

Ekkor a beírt sokszög: $\Pi_2 = EFGH \odot - \sum \Psi_i$, vagyis ebből és az előzőből: (1) $\Pi_2 > \Phi$

Legyen az $ABCD \odot$ -be beírt Π_1 sokszög hasonló Π_2-höz: $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{BD^2}{FH^2}$ ↯

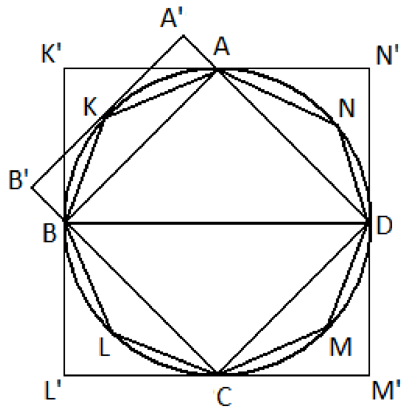
tehát $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{ABCD\odot}{\Phi}$, azaz $\frac{\Phi}{\Pi_2} = \frac{ABCD\odot}{\Pi_1}$, de mivel $ABCD \odot > \Pi_1$, így (2) $\Pi_2 < \Phi$

II. $\Phi > EFGH \odot$ vagyis $\frac{FH^2}{BD^2} = \frac{\Phi}{ABCD\odot}$

De $\frac{\Phi}{ABCD\odot} = \frac{EFGH\odot}{\Lambda}$, és mivel $\Phi > EFGH \odot$, ezért $\Lambda < ABCD \odot$, ez pedig az I. eset.

XII.10: Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon fekvő hengernek

I. Tegyük fel, hogy *henger*(*ABCD* $\odot$) > 3 · *kúp*(*ABCD* $\odot$)



1. *hasáb*(*ABCD* $\square$) > *henger*(*ABCD* $\odot$) / 2
2. *hasáb*(*AKB* $\triangle$) > *hengerszelet*(*AKB* ◖) / 2

…
stb.

(Lásd: XII.2 + térgeometria)

X.1. alapján a maradék $\sum \Psi_i$ hengerszeletekre:

$\sum \Psi_i$ < *henger*(*ABCD* $\odot$) – 3 · *kúp*(*ABCD* $\odot$)

De a *hasáb*(Π_1) = *henger*(*ABCD* $\odot$) – $\sum \Psi_i$
(ahol Π_1 az alap-sokszög)

így *hasáb*(Π_1) < 3 · *kúp*(*ABCD* $\odot$). De mivel *hasáb*(Π_1) = 3 · *gúla*(Π_1),

ezért *gúla*(Π_1) > *kúp*(*ABCD* $\odot$) → ↯, hiszen a gúla része a kúpnak.

II. Legyen most *henger*(*ABCD* $\odot$) < 3 · *kúp*(*ABCD* $\odot$)

1. *gúla*(*ABCD* $\square$) > *kúp*(*ABCD* $\odot$) / 2
2. *gúla*(*AKB* $\triangle$) > *kúpszelet*(*AKB* ◖) / 2

…
stb.

X.1. alapján a maradék $\sum \Phi_i$ kúpszeletekre:

$\sum \Phi_i$ < *kúp*(*ABCD* $\odot$) – *henger*(*ABCD* $\odot$) / 3

De a *gúla*(Π_2) = *kúp*(*ABCD* $\odot$) – $\sum \Phi_i$
(ahol Π_1 az alap-sokszög)

így *gúla*(Π_2) > *henger*(*ABCD* $\odot$) / 3 . De mivel *gúla*(Π_2) = *hasáb*(Π_2) / 3

ezért *hasáb*(Π_2) > *henger*(*ABCD* $\odot$) → ↯, hiszen a hasáb része a hengernek.

Ugyanez a módszer – a **KIMERÍTÉS MÓDSZERE**:

XII.5: Az azonos magasságú háromszög alapú gúlák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

XII.11: Az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.

XII.12: Hasonló kúpok és hengerek egymással az alapjuk átmérőihez viszonyítva háromszoros arányban állnak.

XII.18: A gömbök az átmérőikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak egymással.

(Továbbfejlesztés: Arkhimédész → egyaránt beírt és körülírt alakzatok, majd ezeket egybeejti)