Analízis és szintézis

Az ún. heurisztika röviden szólva egy speciális tudományág azok számára, akik az általános elemek áttanulmányozása után meg akarják szerezni bizonyos geometriai problémák megoldásának a képességét, mint például a vonalak megszerkesztése. Ennek a tudományágnak egyben ez az egyetlen haszna. A heurisztika három ember munkája: Eukleidészé, az *Elemek* szerzőjéé, a pergai Apollónioszé, és az idősebb Arisztaioszé. A heurisztika az analízis és szintézis módszereivel dolgozik.

Az analízisben abból indulunk ki, amit bizonyítani kellene; elfogadjuk, mintha már igazoltuk volna, következtetéseket vonunk le belőle, majd következtetéseket vonunk le a következtetésekből, mindaddig, amíg el nem érünk egy olyan ponthoz, amelyet már a szintézis kiindulási pontjául használhatunk. Az analízisben ugyanis úgy teszünk, mintha már megtaláltuk volna, amit keresnünk kell. Feltesszük a kérdést, hogy milyen eredményből lehetne a kívánt eredményt levezetni; majd ismét feltesszük a kérdést, hogy milyen előzményből lehetne azt az előzményt levezetni, és így tovább, míg végül előzményről előzményre áttérve, végül is valamilyen már ismert vagy igaznak elfogadott állításra bukkanunk. Ezt az eljárást analízisnek vagy fordított irányú megoldásnak nevezzük.

A szintézisben azonban megfordítva, abból a már ismert vagy igaznak elfogadott állításból indulunk ki, mely az analízis végpontja volt. Ebből vezetjük le azt, ami az analízisben ezt megelőzte, és addig-addig következtetünk visszafelé, mindig egyet visszafelé lépve, míg nem sikerül elérnünk a kívánt tételt. Ezt az eljárást szintézisnek vagy egyenes irányú megoldásnak nevezzük.

Analízis azonban kétféle van: az egyik a bizonyító feladatok analízise, ennek célja az igaz tételek megindokolása; a másik a meghatározó feladatok analízise, ennek az ismeretlen fellelése a célja.

Bizonyító feladat esetén egy világosan megfogalmazott tételt kell bebizonyítanunk vagy megcáfolnunk. Ezért végignézzük a következményeit, majd a következmények következményeit stb., mígnem eljutunk egy olyan állításhoz, melyről már határozottan tudjuk, hogy igaz-e vagy hamis. Ha igaz, akkor az eredeti tétel is igaz lesz, feltéve, hogy az összes következtetéseink megfordíthatók, és a bizonyítás az analízis lépéseit járja végig fordított sorrendben. Ha azonban a végeredményül kapott állítás hamis, akkor bebizonyítottuk, hogy a kiinduló tétel is hamis.

Meghatározó feladat esetében egy világosan megfogalmazott feltételeket kielégítő mennyiséget kell megtalálnunk. Ezért végignézzük a következményeként adódó mennyiségeket, majd az ezek következményeként adódó további mennyiségeket stb., mígnem eljutunk egy olyan mennyiséghez, amelyet már egy ismert módszerrel meghatározhatunk. Ha ez a mennyiség az adott feltételek mellett lehetséges és kiszámítható, akkor az eredeti mennyiség is lehetséges és kiszámítható, feltéve, hogy az összes következtetéseink megfordíthatók, és a bizonyítás az analízis lépéseit járja végig fordított sorrendben. Ha azonban végül lehetetlenségre jutunk, akkor az eredeti feladatnak sincs megoldása.

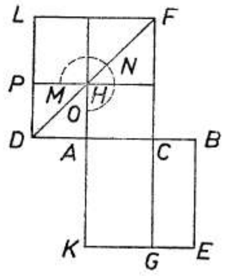
(Papposz: *Matematikai gyűjtemény*, VII. könyv. A fordítás alapja: Pólya György: *A gondolkodás iskolája*, (Gondolat, 1971), 200-202. o., ford. Lakatos Imre)

V.ö. Eukleidész, *Elemek* XIII:

XIII. 1. Tétel

Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének.

Osszuk föl ugyanis az AB szakaszt folytonos arányban a C pontban (VI. 30.), legyen AC a nagyobb darab, AD az AC egyenes menti meghosszabbítása, és mérjünk rá egy AB felével egyenlő AD szakaszt (I. 10.). Azt állítom, hogy CD négyzete ötszöröse DA négyzetének.



Szerkesszük meg ugyanis az AB és a DC szakaszra az AE, illetve DF négyzetet (I. 46.), rajzoljuk meg a DF négyzetben az ábrát, és hosszabbítsuk meg FC-t G-ig. Minthogy AB-t C folytonos arányban osztja, az AB és BC közötti téglalap egyenlő AC négyzetével (VI. 17.). Az AB és BC közötti téglalap CE, AC négyzete pedig FH, CE tehát egyenlő FH-val. Minthogy BA kétszerese AD-nek és BA egyenlő KA-val, AD pedig AH-val, KA kétszerese AH-nak. Amint viszont KA az AH-hoz, úgy aránylik CK a CH-hoz (VI. 1.), CK tehát kétszerese CH-nak. LH meg HC is kétszerese CH-nak (I. 43.), KC tehát egyenlő LH meg HC-vel. Megmutattuk, hogy CE egyenlő HF-fel, a teljes AE négyzet tehát egyenlő az MNO gnómónnal. Minthogy BA kétszerese AD-nek, BA négyzete négyszerese

AD négyzetének (II. 4.), azaz AE négyszerese DH-nak. AE egyenlő az MNO gnómónnal, az MNO gnómón is négyszerese tehát AP-nek, a teljes DF ötszöröse tehát AP-nek. DF a DC négyzete, AP a DA négyzete, CD négyzete tehát ötszöröse DA négyzetének.

Ha tehát egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 6., 11.

XIII. 8. Függelék*

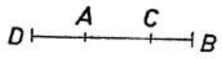
Mi az analízis és mi a szintézis?

Analízis az, ha az állítást bizonyítottnak véve abból következtetünk, míg valamely elfogadott igazsághoz jutunk.

Szintézis az, ha ebből az elfogadott igazságból következtetünk, míg az állítás teljességéhez vagy megragadásához jutunk.

Az első tétel analízise és szintézise ábra nélkül:

Ossza C az AB szakaszt folytonos arányban, legyen AC a nagyobb darab, és mérjünk föl egy AB felével egyenlő AD szakaszt. Azt állítom, hogy CD négyzete ötszöröse AD négyzetének.



Minthogy ugyanis CD négyzete ötszöröse DA négyzetének és CD négyzete egyenlő CA és AD négyzeteinek és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összegével (II. 4.), CA és AD négyzeteinek és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse AD négyzetének. Fölbontva tehát, CA négyzetének és a CA és AD közötti téglalap kétszeresének az összege négyszerese AD négyzetének. A CA és AD közötti téglalap kétszeresével viszont egyenlő a BA és AC közötti téglalap – hiszen BA kétszerese AD-nek –, AC négyzetével pedig egyenlő az AB és BC közötti téglalap – hiszen AB-t folytonos arányban osztottuk föl – (VI. 17.), a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege tehát négyszerese AD négyzetének. A BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege viszont AB négyzete (II. 2.), AB négyzete tehát négyszerese AD négyzetének. Valóban az, hiszen AB kétszerese AD-nek.

Szintézis

Minthogy AB négyzete négyszerese AD négyzetének és BA négyzete a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege, a BA és AC meg az AB és BC közötti téglalap összege négyszerese AD négyzetének. A BA és AC közötti téglalap viszont egyenlő a DA és AC közötti téglalap kétszeresével, az AB és BC közötti téglalap pedig egyenlő AC négyzetével, AC négyzetének és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege tehát négyszerese DA négyzetének, úgyhogy DA és AC négyzeteinek és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege ötszöröse DA négyzetének. DA és AC négyzeteinek és a DA és AC közötti téglalap kétszeresének az összege CD négyzete, CD négyzete tehát ötszöröse DA négyzetének. Éppen ezt kellett megmutatni.