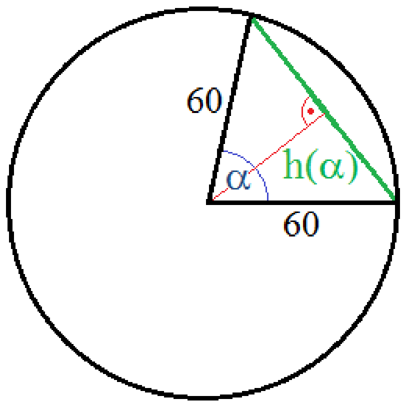
Trigonometria Ptolemaiosznál (*Almageszt*, I. könyv 10. fejezet)

Feladat: húrtáblázat elkészítése 0°-tól 180°-ig fél fokonként megadva:

Mekkora h(α) *húr tartozik adott* α *középponti szöghöz?*



Alapfeltevések:

- a kör kerülete 360°-ra osztandó
- a kör átmérője 120 egység

(magyarázat: 60-as számrendszerben dolgozva „egységnyi" szöghöz (→ 60) „egységnyi" húr (→ 60))

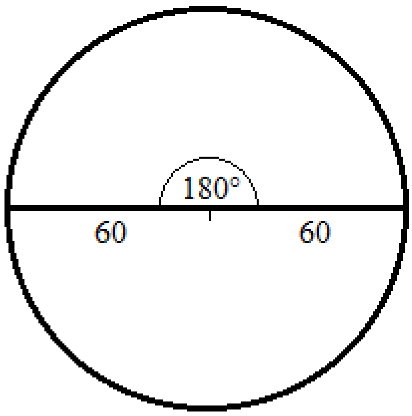
[Modern megfelelő:
mivel $\sin(\alpha/2) = (h(\alpha)/2)/60 = h(\alpha)/120$,
ezért a kp-i szöghöz tartozó húr keresése ekvivalens a szög feléhez tartozó szinusz-érték keresésével]

Módszer:

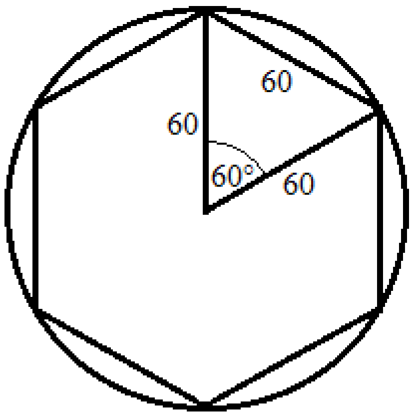
- alapszögekhez tartozó húrok meghatározása egyszerű geometriával
- további szögek húrjainak meghatározásához geometriai alapú műveletek
- közelítés 1°-os szög mint alapnövekmény húrjára [itt nem rekonstruáljuk]

Alapszögek:

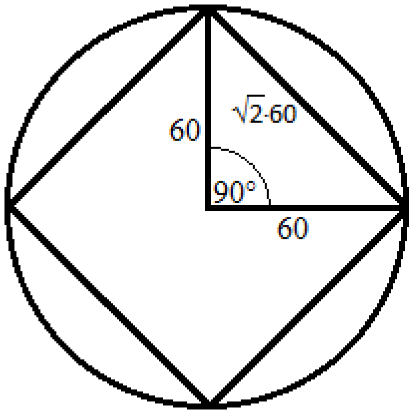
- 180°-hoz tartozó húr maga az átmérő: 120



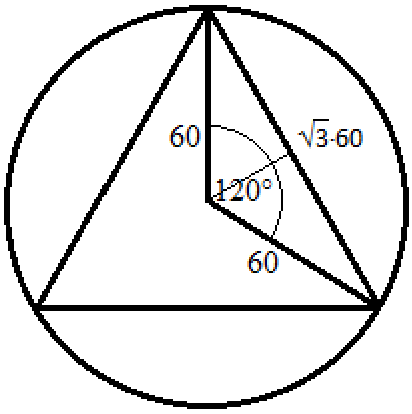
- hatszög: 60°-hoz tartozó húr 60



- négyzet: 90°-hoz tartozó húr √2 · 60



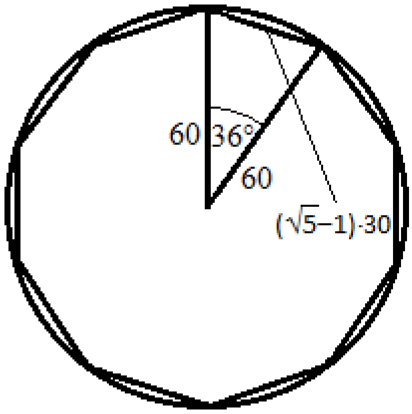
- háromszög: 120°-hoz tartozó húr
  2 ·√3/2 · 60 = √3 · 60



- tízszög: 36°-hoz tartozó húr (√5 – 1)/2 · 60

  Mert: Eukleidész: *Elemek*, XIII/9:

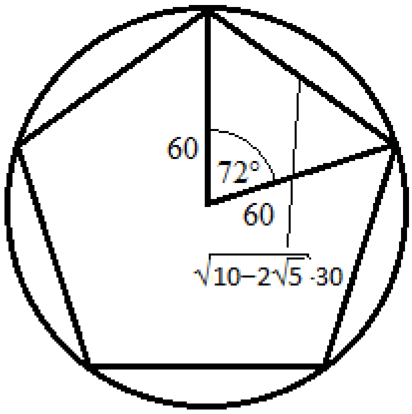
  > Ha az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalát összeadjuk, akkor a teljes szakasz folytonos arányban [aranymetszés szerint] osztott, és a nagyobb darabja a hatszög oldala.
  >
  > (→ (60 + h(36°))/60 = 60/h(36°) egyenlet megoldása)



- ötszög: 72°-hoz tartozó húr √(10 – 2√5)/2 · 60

  Mert: Eukleidész: *Elemek*, XIII/10:

  > Ha egy körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszög oldalának összegével.
  >
  > (→ $h(72°)^2 = 60^2 + ((\sqrt{5} - 1)/2 \cdot 60)^2$ megoldása)



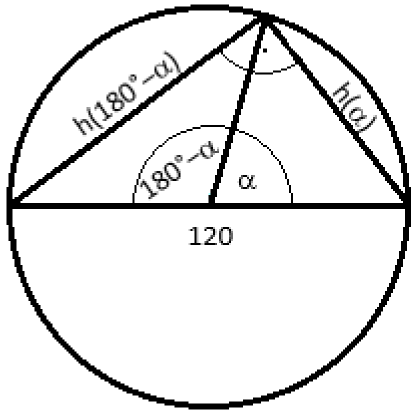
Műveletek

- Adott szög húrjából a kiegészítő szög húrja:
  $h(\alpha) \rightarrow h(180° - \alpha)$

  $(h(\alpha))^2 + (h(180 - \alpha))^2 = 120^2$

  [Mivel $\sin(\alpha/2) = h(\alpha)/120$ és
  $\cos(\alpha/2) = \sin(90 - \alpha/2)$, ezért

  $\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) = 1$]

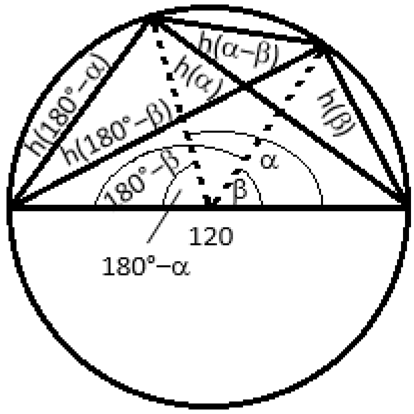


- Két adott szög húrjaiból a szögek különbségének húrja:
  $h(\alpha), h(\beta) \rightarrow h(\alpha - \beta)$

  Ptolemaiosz-tétel: húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatainak összegével, azaz itt:

  $h(\alpha) \cdot h(180° - \beta) = h(\beta) \cdot h(180° - \alpha) + h(\alpha - \beta) \cdot 120$

  [$\sin(\alpha/2 - \beta/2) = \sin(\alpha/2) \cdot \cos(\beta/2) - \cos(\alpha/2) \cdot \sin(\beta/2)$]

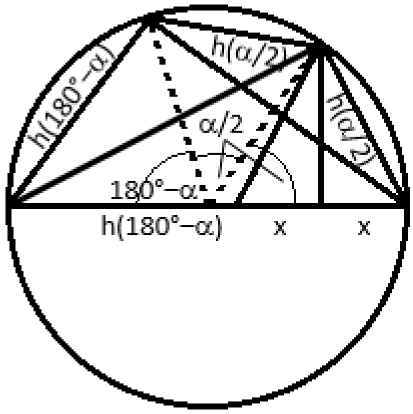


- Adott szög húrjából a szög felének húrja:
  $h(\alpha) \rightarrow h(\alpha/2)$

  $x = (120 - h(180° - \alpha))/2$ (deltoid szimmetriája) és
  $120 / h(\alpha/2) = h(\alpha/2) / x$ (hasonló háromszögek), tehát

  $(h(\alpha/2))^2 = 120/2 \cdot (120 - h(180° - \alpha))$

  [$\sin^2(\alpha/4) = (1 - \cos(\alpha/2))/2$]



- Két adott szög húrjaiból a szögek összegének húrja:
  $h(\alpha), h(\beta) \rightarrow h(\alpha + \beta)$

  Ptolemaiosz-tétel:
  $h(180° - \beta) \cdot h(180° - \alpha) =$
  $= h(\alpha) \cdot h(\beta) + 120 \cdot h(180° - (\alpha + \beta))$

  [$\cos(\alpha/2 + \beta/2) = \cos(\alpha/2) \cdot \cos(\beta/2) - \sin(\alpha/2) \cdot \sin(\beta/2)$]