A váltakozva kivonás módszere és az összemérhetetlenség

VII.1. Ha van két nem egyenlő számunk, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem osztja a megelőző számot, míg csak nem az egység a maradék, akkor az eredeti számok relatív prímek.

Pl.

12	5	5	3	1	1
7	7	2	2	2	1

VII.2. Keressük meg két adott nem relatív prímszám legnagyobb közös osztóját!

Pl.

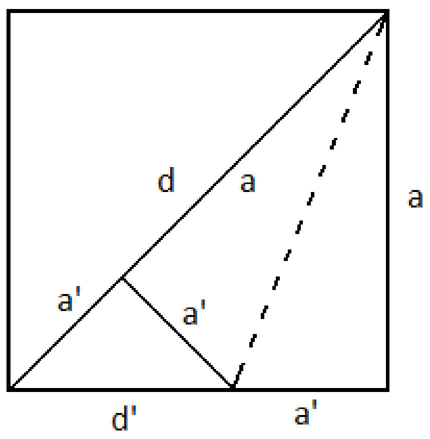
24	9	9	3	3
15	15	6	6	3

[Implicit előfeltevések az aritmetikai könyvekhez:

1) $k \mid m \ \& \ k \mid n \ \rightarrow \ k \mid (m+n)$
2) $k \mid m \ \& \ k \mid n \ \rightarrow \ k \mid (m-n)$
3) $k \mid m \ \& \ m \mid n \ \rightarrow \ k \mid n$]

X.2. Ha van két nem egyenlő mennyiség, a kisebbet váltakozva mindig kivonjuk a nagyobból, és a maradék sosem méri az előzőt, akkor a mennyiségek összemérhetetlenek.

Pl. 1

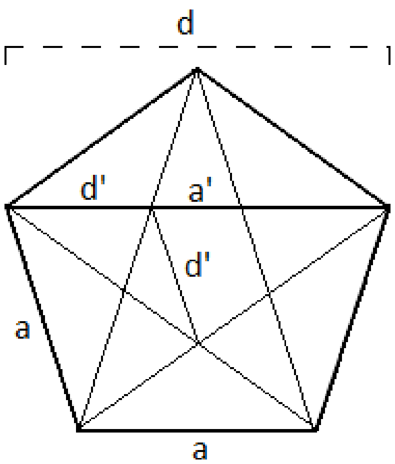


d és a közös mértékét keressük:

d	d – a = a’	a’	…
a	a	a – a’ = d’	

Az első lépésben egy négyzet átlóját kell összemérni az oldalával, a harmadik lépésben ismét, vagyis az eljárás végtelen regresszusra vezet.

Pl. 2



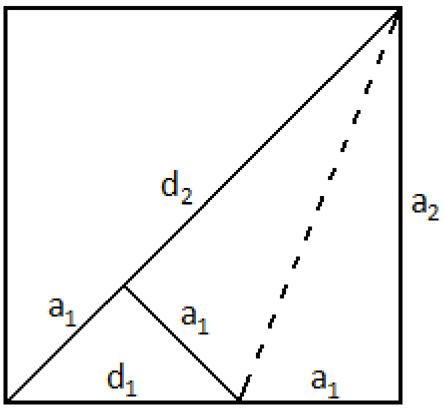
d és a közös mértékét keressük:

d	d – a = d’	d’	…
a	a	a – d’ = a’	

Az első lépésben egy ötszög átlóját kell összemérni az oldalával, a harmadik lépésben ismét, vagyis az eljárás végtelen regresszusra vezet.

Alkalmazás a numerikus viszonyok közelítésére (Proklosz alapján): Haladjunk a kisebbtől a nagyobb felé, ahol a „legkisebb" sokszög oldala és átlója legyen „egységnyi" (még ha ez lehetetlen is)!

Pl. 1'



$a_{i+1} = a_i + d_i$

$d_{i+1} = a_i + a_{i+1} = 2a_i + d_i$

$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 12$	$a_5 = 29$	…
$d_1 = 1$	$d_2 = 3$	$d_3 = 7$	$d_4 = 17$	$d_5 = 41$	

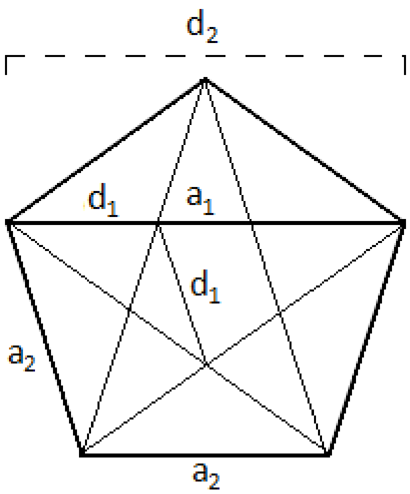
1/1 , 3/2 , 7/5 , 17/12 , 41/29 :
d/a (√2) egyre pontosabb közelítései…

Püthagorász tétele alapján visszaellenőrzés: $2a_i^2 = d_i^2$

$2a_1^2 = d_1^2 + 1$, $2a_2^2 = d_2^2 - 1$, $2a_3^2 = d_3^2 + 1$, $2a_4^2 = d_4^2 - 1$, $2a_5^2 = d_5^2 + 1$, $2a_6^2 = d_6^2 - 1$, …

$d_{2n-1}/a_{2n-1} < d/a < d_{2n}/a_{2n}$

Pl. 2'



$a_{i+1} = a_i + d_i$

$d_{i+1} = d_i + a_{i+1} = a_i + 2d_i$

$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 5$	$a_4 = 13$	$a_5 = 34$	…
$d_1 = 1$	$d_2 = 3$	$d_3 = 8$	$d_4 = 21$	$d_5 = 55$	

1/1 , 3/2 , 8/5 , 21/13 , 55/34 :
d/a ((√5 – 1)/2) egyre pontosabb közelítései…

Megjegyzés:

Négyzet:

√2	√2 – 1	√2 – 1
1	1	1 – (√2 – 1) = 2 – √2

de √2/1 = (2 – √2)/(√2 – 1)
tehát a 3. lépésben visszatér

Ötszög:

2	3 – √5	3 – √5
√5 – 1	√5 – 1	2√5 – 4

de 2/(√5 – 1) = (3 – √5)/(2√5 – 4)
tehát a 3. lépésben visszatér

Hatszög:

√3	√3 – 1	√3 – 1	2√3 – 3
1	1	2 – √3	2 – √3

de √3/1 = (2√3 – 3)/(2 – √3)
tehát csak a 4. lépésben tér vissza
(→ HF: találj ki szerkesztő bizonyítást ide)