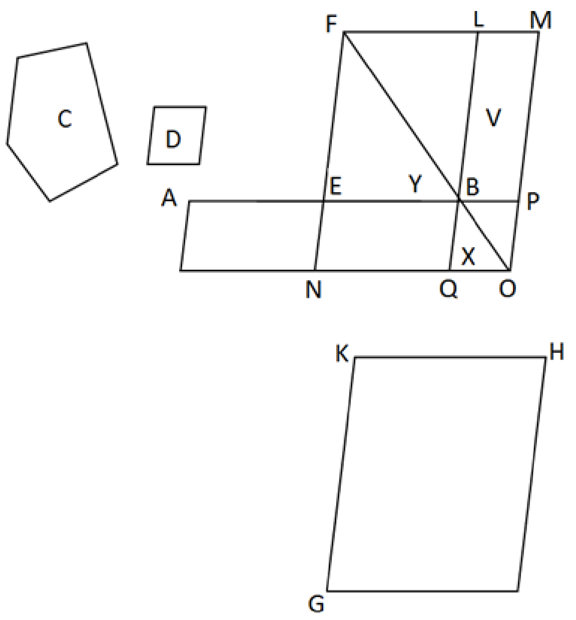
VI. 29

<u>Szöveg az *Elemek*ben</u>

Illesszünk egy adott szakaszhoz adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát úgy, hogy egy adotthoz hasonló paralelogramma lógjon ki.

Legyen AB az adott szakasz, s az adott sokszög, amellyel egyenlőt kell AB-hez illeszteni, C, amelyhez pedig hasonlónak kell kilógnia, D. Az AB szakaszhoz tehát a C sokszöggel egyenlő sokszöget kell illeszteni úgy, hogy egy D-hez hasonló paralelogramma lógjon ki.



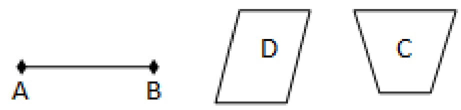
Legyen E az AB felezőpontja (I. 10),

emeljünk EB-re egy D-hez hasonló és hasonlóan fekvő BF paralelogrammát (VI. 18),

és szerkesszünk egy BF és C összegével egyenlő és egyúttal D-hez hasonló és hasonlóan fekvő GH alakzatot (VI. 25).

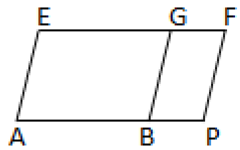
<u>A probléma „értelmezése”</u>

Adott:

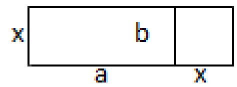


Feladat:
Találni AB-n (vagy meghosszabbításán) egy olyan P pontot, hogy

- PFGB hasonló D-hez
- AEFP egyenlő C-vel



Tegyük fel, hogy a paralelogrammák derékszögűek, és D egy négyzet (mint a tételek alkalmazásaiban)
[AB $\to$ a, C $\to$ b, D $\to$ x^2]



$$b = ax + x^2$$

$$\to \quad x^2 + ax - b = 0$$

Ennek megoldása:

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$$

ahol geometriában csak a pozitív m.o. érdekes.

Lépések:

a/2 megszerkeszt

$(a/2)^2$ megszerkeszt
(mert D egy négyzet)

$(a/2)^2 + b$ megszerkeszt,
négyzetté átalakít

Feleljen meg KH az FL-nek és KG az FE-nek. Minthogy GH nagyobb FB-nél, KH nagyobb FL-nél és KG az FE-nél. Hosszabbítsuk meg FL-t, FE-t, KH-val legyen egyenlő FLM, KG-vel pedig FEN (I. 3), és egészítsük ki MN-t. MN tehát mind egyenlő, mind hasonló GH-val. GH viszont EL-hez hasonló (VI. 21), MN in hasonló tehát EL-hez, s EL és MN ugyanazon átló mellett fekszik (VI. 26). Húzzuk meg FO átlójukat, és rajzoljuk meg az ábrát.

(négyzetek esetén ez az érvelés alapvetően leegyszerűsödik)

Minthogy GH egyenlő EL meg C-vel, GH viszont egyenlő MN-nel, MN is egyenlő EL meg C-vel.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

Vonjuk le a közös EL-t: így a maradék YXV gnómón egyenlő C-vel.

$$b = x^2 + \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot x$$

Minthogy AE egyenlő EB-vel, AN is egyenlő NB-vel (I. 36), azaz LP-vel (I. 43). Adjuk hozzájuk közös tagnak EO-t: így a teljes AO egyenlő a VXY gnómónnal.
A VXY gnómón viszont egyenlő C-vel, AO is egyenlő tehát C-vel.

$$(a + x) \cdot x = x^2 + \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a}{2} \cdot x$$

$$(a + x) \cdot x = b$$

Az adott AB szakaszhoz tehát az adott C sokszöggel egyenlő AO paralelogrammát illesztettünk úgy, hogy a D-hez hasonló PQ paralelogramma lóg ki (VI. 21), mivel EL is hasonló PQ-hoz (VI. 24). Éppen ezt kellett megmutatni.

(Vagyis az x mennyiség $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$)