Euklidész – Elemek VII. könyv

Indirekt bizonyítást használó tételek: 1-3, 20-24, 28-29, 33-36, 39

Definíciók:

1.	**egység**	**13.**	**relatív prímek**
2.	**szám**	**14.**	**összetett szám**
3.	**hányad**	**15.**	**relatív összetettek**
4.	**törtrész**	**16.**	**szorzás**
5.	**többszörös**	17.	síkszám,oldalak
6.	**páros**	18.	térszám, oldalak
7.	**páratlan**	**19.**	**négyzetszám**
8.	párosszor páros	20.	köbszám
9.	párosszor páratlan	**21.**	**számok aránya**
10.	páratlanszor páros	22.	sík-, térszámok hasonlósága
11.	páratlanszor páratlan	23.	tökéletes szám pl. 6, 28
12.	**prímszám**		

1. Az egység az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk.
2. Szám az egységekből összetevődő sokaság.*
3. Egy kisebb szám egy nagyobbnak hányada*, ha osztja a nagyobbat.
4. Törtrésze* pedig, ha nem osztja.
5. Egy nagyobb szám egy kisebbnek többszöröse, ha a kisebb osztja.
6. Páros a kettébontható szám.
7. Páratlan pedig a ketté nem bontható, vagy másképp amelyik egységben különbözik egy páros számtól.
8. Párosszor páros az a szám, amelyik egy páros szám által páros számúan osztható.
9. Párosszor páratlan pedig, amelyik egy páros szám által páratlan számúan osztható.
10. Páratlanszor páros az a szám, amelyik egy páratlan szám által páros számúan osztható.*
11. Páratlanszor páratlan szám pedig az, amelyik egy páratlan szám által páratlan számúan osztható.
12. Prímszám, amelyik csak az egységgel osztható.
13. Számok egymáshoz relatív prímek, ha csak az egység közös osztójuk.
14. Összetett az a szám, amelyiket valamely szám oszt.
15. Számok relatív összetettek, ha valamely szám közös osztójuk.
16. Azt mondjuk, hogy egy számmal megszorzunk egy másikat, ha úgy képezünk egy számot, hogy annyiszor adjuk össze a szorzottat, ahány egység van a szorzóban.

17. A két szám összeszorzásakor keletkező számot síkszámnak nevezzük, az összeszorzott számokat pedig az oldalainak.
18. A három szám összeszorzásakor keletkező szám térszám, az összeszorzott számok pedig az oldalai.
19. Négyzetszám az egyenlőször egyenlő alakú vagy másképp a két egyenlő szám által közrefogott szám.
20. Köbszám az egyenlőször egyenlőször egyenlő alakú, vagy másképp a három egyenlő szám által közrefogott szám.
21. Számok arányosak, ha az első a másodiknak ugyanannyiszorosa vagy ugyanazon hányada, vagy ugyanazon törtrésze, mint a harmadik a negyediknek.*
22. Sík- vagy térszámok hasonlóak, ha az oldalaik arányosak.
23. Egy szám tökéletes, ha egyenlő az osztói* összegével.

1. Tétel – relatív prímek

Ha van két nem egyenlő számunk, és a váltakozva kivonjuk a kisebbet a nagyobból, úgy hogy a maradék sosem osztja a megelőző számot, és eredményül egyet kapunk, akkor a két szám relatív prím volt.

PL: 11, 8

11-8=3
8-6=2
3-2=1

Biz: indirekt

1. Vegyünk két nem egyenlő számot (AB, CD), és tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei. Ekkor a két szám relatív prím lesz.

   A__H__ __ F__ __ __ __ __ __ __ __B

   C__ __G__ __ __ __ __ __D

2. Indirekten tegyük fel, hogy AB és CD nem relatív prím.
   Ekkor létezik egy olyan e szám (ami nem az egység), ami osztja mindkettőt.
   e__ __?__ __

3. CD ossza BF–et, és a nála kisebb maradék FA
   AF ossza DG–t, és a nála kisebb maradék GC
   GC ossza FH-t, és a nála kisebb maradék HA egység

4. Mivel e osztja CD-t, CD pedig BF-et ➡ e osztja BF-et (3. E.)
   Tudjuk, hogy e osztja AB-t ➡ e osztja AF-et is (2. E.)
   AF viszont osztja DG-t ➡ e osztja DG-t is (3. E.)
   Tudjuk viszont, hogy a DC-t is osztja ➡ e osztja CG-t is
   CG viszon FH-t osztja ➡ e osztja FH-t (3. E.)
   Tudjuk, hogy e osztja FA-t ➡ e osztja AH-t egységet is (2. E.)
   ↯

2. Tétel (feladat) – lnko

Két nem relatív prím lnko-ját keressük

PL: 14, 10

14-10=4
10-8=2
Lnko(14;10)=2

Megoldás: indirekt bizonyítással

1. AB és CD legyen két adott nem relatív prím szám
   A__ __ __ __E__ __ __ __ __ __ __ __ __ __B
   C__ __F__ __ __ __ __ __ __ __ __D

2. Ha CD osztja AB-t, akkor az lesz a legnagyobb közös osztó, mert CD osztja önmagát is, és a legnagyobb, mert önmagánál nagyobb szám nyilván nem osztja.

3. Ha CD nem osztja AB-t, akkor váltakozva kivonjuk a kisebbet a nagyobból, egy olyan szám lesz a maradék, amely osztja a megelőzőt .
   A maradék nem lesz 1, mert akkor AB és CD relatív prímek lennének (VII. 1.)

4. CD osztja BE-t, és a nála kisebb maradék EA
   EA osztja DF-et, és a nála kisebb maradék CF
   CF osztja AE-t, AE pedig DF-et ➡ CF osztja DF-et (3. E.),
   CF osztja DF-et és önmagát is ➡ az egész CD-t is osztja (1. E.)
   CD viszon osztja BE-t ➡ CF osztja BE-t (3. E.),
   Viszont EA-t is osztja ➡ CF osztja AB-t (1. E.)

   ➡ CF CD-t és AB-t is osztja
5. Azt állítom, hogy ez a legnagyobb közös osztó.
   Tegyük fel, hogy nem az.
   Legyen g__ __?__ __ a lnko.
   g osztja CD-t, CD pedig BE-t ➡ g is osztja BE-t (3. E.)
   Mivel a teljes BA-t is osztja ➡ g osztja AE-t is (2. E.)
   AE viszont DF-et osztja ➡ g osztja DF-t is (3. E.)
   Másrészt a teljes DC-t is osztja ➡ g osztja a maradék CF-et is (2. E.)
   ↯

2. Következmény:

Ha egy szám oszt két számot, akkor a legnagyobb közös osztójukat is osztja.

3. Tétel (feladat) – lnko - három számra

Adott három nem relatív prím lnko-ját keressük

PL: 8, 6, 4

Lnko(8;6)=2

2 | 4 ➡ Lnko(8;6;4)=2

Megoldás: indirekt bizonyítással

1. legyen az adott három nem relatív prím szám a, b és c.

   a__ __ __ __ __ __ __ __

   b__ __ __ __ __ __

   c__ __ __ __

   d__ __

   e__ __?__ __

2. legyen d a-nak és b-nek a legnagyobb közös osztója
   d vagy osztja c-t is, vagy nem.

3. Tegyük fel, hogy d osztja c-t
   Ekkor d közös osztója a, b és c-nek, azt állítom, hogy a legnagyobb.
   Indirekten tegyük fel, hogy van egy e szám, ami osztja mind a hármat, és nagyobb d-nél.
   Mivel mind a három számot osztja, ezért közös osztója a-nak és b-nek ➡
   Osztja a és b lnko-ját, azaz d-t (VII. 2. K.) ↯

4. Most tegyük fel, hogy d nem osztja c-t.
   Először azt állítom, hogy c és d nem relatív prímek.
   Ez azért igaz, mert a, b, c számok nem relatív prímek, tehát van közös osztójuk, ami a és b lnko-ját azaz d-t is osztja (VII. 2. K.) . Ugyanekkor ez a szám c-t is osztja, tehát közös osztója d-nek és c-nek.

5. Legyen c és d lnko-ja e
   e osztja d-t, d pedig a-t és b-t ➡ e osztja a-t és b-t is
   e osztja c-t is ➡ e közös osztója a, b, c-nek

6. Tfh nem ez a legnagyobb közös osztó.
   Ekkor létezik egy nála nagyobb f, ami osztja mind a hármat
   Mivel f osztja a, b, c-t, osztja a és b-t ➡ d-t is osztja. (VII. 2. K.)
   f tehát osztja d-t és c-t ➡ e-t is osztja. (VII. 2. K.)
   ↯

4. Tétel – törtrész-hányad

Bármilyen két szám közül a kisebb a nagyobbnak vagy hányada, vagy törtrésze (azaz vagy osztja, vagy nem osztja)

Biz:

1. Legyen a és BC a két szám, ahol BC a kisebb.
   Azt állítom, hogy BC vagy hányada, vagy törtrésze a-nak.
   a__ __ __ __ __ __ __ __
   B__ __E__ __F__ __C
   d__ __

   a és BC vagy relatív prímek, vagy nem.

2. Legyenek először relatív prímek:
   Ha BC-t fölbontjuk a benne lévő egységekre, akkor minden BC-ben lévő egység egy bizonyos hányada lesz a-nak, úgyhogy BC törtrésze a-nak.

3. Ha a és BC nem relatív prímek, akkor BC vagy osztja a-t, vagy nem.
   Ha BC osztja a-t, akkor BC hányadrésze a-nak, ha nem akkor vegyük a és BC lnko-ját, d-t. (VII. 2.)
   Bontsuk föl BC-t d-vel egyenlő BE, EF, és FC számokra.
   Mivel d osztja a-t ➡ d hányada a-nak
   a = BE, EF, FC ➡ BE, EF, FC hányada a-nak ➡ BC törtrésze a-nak

5. Tétel – hányad - összegre

Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor az első és harmadik összege ugyanaz a hányada, mint a második és negyedik összegének, az pedig ugyanaz a hányada, mint az első a másodiknak.

Biz:

1. a négy számom:
   a__ __ __ __ d__ __ __
   B__ __ __ __G__ __ __ __C E__ __ __H__ __ __F

2. Mivel a ugyanaz a hányada BC-nek mint d az EF-nek, ezért ugyanannyi a-val egyenlő szám van BC-ben, mint ahány d-vel egyenlő van EF-ben.
   Ha tehát BC-t felosztjuk az a-val egyenlő részekre, és EF-et a d-vel egyenlőkre, akkor BC-ben ugyanannyi rész lesz, mint EF-ben.

3. Mivel BG egyenlő a-val, EH meg d-vel ➡ GB+EH=a+d
   Ugyanígy ➡ GC+HF=a+d

   Ahány a-val egyenlő szám van tehát BC-ben, annyi a+d-vel egyenlő van BC+EF-ben. Ahányszorosa tehát BC az a-nak, annyiszorosa BC+EF a+d-nek.

6. Tétel – törtrész - összegre

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor az első és harmadik összege ugyanaz a törtrésze, mint a második és negyedik összegének.

Biz: (ugyanaz, mint az 5-ős, csak törtrészre)

1. a négy számom:
   A__ __ __G__ __ __B   D__ __H__ __E
   a__ __ __ __ __ __ __ __ __   d__ __ __ __ __ __

2. Mivel AB ugyanaz a törtrésze c-nek mint DE az f-nek, ezért ahány hányada van c-nek AB-ben, annyi hányada van f-nek DE-ben.
   Ha tehát AB-t felosztjuk a c hányadaira, és DE-t a d hányadaira, akkor AB-ben ugyanannyi rész lesz, mint DE-ben.

   Mivel AG egyenlő a hányadával, EH meg d hányadával
   ➡ AG+DH=a+d hányada
   Ugyanígy GB+HE=a+d hányada (VII. 5.)
   Amely törtrésze tehát AB a a-nak, ugyanaz a törtrésze AB és DE összege az a és d összegének.

7. Tétel – hányad - különbségre

Ha egy szám ugyanaz a hányada egy másiknak, mint az egyik kivonandó a másiknak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a hányada a másik maradéknak.

Biz:

1. Legyen AB szám a CD számnak ugyanaz a hányada, mint AE kivonandó a CF kivonandónak:
   A__ __E__ __ __B
   G__ __ __ __ __ __C__ __ __ __F__ __ __ __ __ __D

2. Amely hányada AE a CF-nek, akkora hányada legyen EB a GC-nek
   Ekkor AB GF-nek ugyanaz a hányada. (VII. 5.)

3. AE ugyanaz a hányada CF-nek, mint AB CD-nek
   Ez pedig ugyanaz, mint AB a GC-nek
   ➡ AB GF-nek és CD-nek is ugyanaz a hányada
   ➡ GF = CD
   Vonjuk le a közös CF-et
   ➡ GC = FD
   Tdjuk, hogy amely hányada AE CF-nek, ugyanaz a hányada EB GC-nek, ami pedig egyenlő FD-vel.
   ➡ Amely hányada tehát AE CF-nek, ugyanaz a hányada EB FD-nek
   Viszont amely hányada AE CF-nek ugyanaz a hányada AB CD-nek
   ➡ Tehát AB CD-nek is ugyanaz a hányada, mint EB FD-nek

8. Tétel – törtrész - különbségre

Ha egy szám ugyanaz a törtrésze egy másiknak, mint az egyik kivonandó a másiknak, akkor az egyik maradék is ugyanaz a törtrésze a másik maradéknak.

Biz:

1. Legyen AB szám a CD számnak ugyanaz a törtrésze, mint AE kivonandó a CF kivonandónak:
   C__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __F__ __ __ __ __ __D
   G__ __ __ __M__ __K__ __ __ __N__ __H
   A__ __ __ __L__ __ __ __E__ __ __ __B

2. Vegyük föl az AB-val egyenlő GH-t. Ez törtrésze a CD-nek
   Ezen kívűl tudjuk, hogy Ab ugyanaz a törtrésze CD-nek, mint AE CF-nek

3. bontsuk fel GH-t CD-nek GK, KH hányadaira.
   AE-t pedig CF-nek AL, LE hányadaira.
   ➡ GH, és AE-ben lévő hányadok száma megegyezik

4. Mivel GK ugyanaz a hányada CD-nek, mint AL CF-nek, és CD nagyobb CF-nél
   ➡ GK nagyobb, mint AL
   Vegyünk föl egy AL-lel egyenlő GM-et
   Amely hányada tehát most GK CD-nek GM ugyanaz a hányada CF-nek
   ➡ Tehát a maradék MK is ugyanaz a hányada FD-nek (VII. 7.)

5. Mivel EL CF-nek ugyanaz a hányada, mint KH a CD-nek, és CD nagyobb CF-nél
   ➡ KH nagyobb, mint EL
   Vegyünk fel egy EL-lel egyenlő KN-et
   Amely hányada tehát most KH CD-nek KN ugyanaz a hányada CF-nek
   ➡ Tehát a maradék NH is ugyanaz a hányada FD-nek (VII. 7.)

6. Mint megmutattuk MK maradék ugyanaz a hányada FD maradéknak, mint a GK kisebbítendő a CD kisebbítendőnek.
   ➡ Tehát MK és NH összege ugyanaz a törtrésze DF-nek, mint HG a CD-nek.
   MK + NH = EB, GH = AB

   Tehát az EB maradék ugyanaz a törtrésze az FD maradéknak, mint az AB a CD-nek.

9. Tétel – hányad – 4 számra, felcserélhetőség

Ha egy szám hányada egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a hányada egy negyediknek, akkor felcserélve is, amely hányada, vagy törtrésze az első a harmadiknak, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze lesz az második a negyediknek.

Biz:

1. Legyen a szám ugyanaz a hányada BC-nek, mint d az EF-nek

   a__ __ __ d__ __ __ __

   B__ __ __G__ __ __C E__ __ __ __H__ __ __ __F

   Ekkor ahány a-val egyenlő szám van BC-ben, annyi d-vel egyenlő lesz EF-ben. Ha tehát BC-t felbontjuk az a-val egyenlő BG és GC részekre ezeknek a száma ugyanaz lesz, mint a d-vel egyenlő EH és HF-eknek.

2. Mivel BG = GC , és EH = HF, és a BG, GC számok száma egyenlő az EH, HF számok számával

   ➡ így amely hányada, vagy törtrésze BG az EH-nak, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze BC összeg az EF összegnek (VII. 5-6.)

10. Tétel – törtrész - 4 számra, felcserélhetőség

Ha egy szám törtrésze egy másiknak, és egy harmadik ugyanaz a törtrésze egy negyediknek, akkor felcserélve is, amely hányada, vagy törtrésze az első a harmadiknak, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze lesz az második a negyediknek.

Biz:

1. Legyen AB ugyanaz a törtrésze c-nek, mint DE f-nek

   A__ __ __G__ __ __B D__ __ __ __H__ __ __ __E

   c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ f__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __

   Azt állítom, hogy AB ugyanaz a törtrésze, vagy hányada DE-nek, mint c f-nek

2. ahány hányada van c-nek AB-ben, f-nek ugyanannyi hányada van DE-ben
   Bontsuk fel AB-t és DE-t ezekre a hányadokra.
   Ekkor a hányadok száma egyenlő lesz.

3. Mivel amely hányada AG c-nek, DH ugyanaz a hányada f-nek,
   fölcserélve is amely hányada, vagy törtrésze AG, DH-nak, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze c az f-nek. (VII. 9.)

4. ugyanez igaz GB-re, és HE-re is
   tehát amely hányada, vagy törtrésze AG DH-nak, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze c az f-nek. (VII. 5-6.)

   ➡ tehát, AB ugyanaz a törtrésze, vagy hányada DE-nek, mint c f-nek

11. Tétel – arány - különbségre

Ha egy kisebbítendő szám úgy aránylik egy másik kisebbítendőhöz, mint az egyik kivonandó a másikhoz, akkor az egyik maradék is ugyanúgy aránylik a másik maradékhoz, mint az egyik kisebbítendő a másikhoz.

Biz:

1. Ha AE úgy aránylik CF-hez, mint AB a CD-hez, akkor EB is ugyanúgy aránylik FD-hez, mint AB a CD-hez
   A__ __ __ __ __ __E__ __ __ __ __ __ __ __ __B
   C__ __ __ __F__ __ __ __ __ __D

2. Mivel AE úgy aránylik CF-hez, mint AB CD-hez, ezért amely hányada, vagy törtrésze AE CF-nek, ugyanaz a hányada, vagy törtrésze lesz AB a CD-nek.

3. Tehát EB is ugyanaz a hányada, vagy törtrésze lesz FD-nek, imt az AB a CD-nek (VII. 7-8.)
   - ➡ Tehát EB úgy aránylik FD-hez, mint AB a CD-hez

12. Tétel – arány – valahány számra, összegre

Ha valahány szám arányos, akkor az előtagok összege úgy aránylik az utótagok összegéhez, mint bármelyik előtag az utótaghoz.

Biz:

1. legyen négy számom:
   a__ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ __ __ __ __
   c__ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   azt állítom tehát, hogyha a úgy aránylik b-hez, mint c a d-hez, akkor a+c is úgy aránylik b+d-hez

2. mivel c úgy aránylik d-hez, mint a a b-hez
   - ➡ a ugyanaz a hányada, vagy törtrésze b-nek, mint c a d-nek
   - ➡ tehát a+c is ugyanaz a hányada, vagy törtrésze b+d-nek, mint a a b-nek (VII. 5-6.)

13. Tétel – arány - 4 számra, felcserélhetőség

Ha négy szám arányos, akkor fölcserélve is arányosak lesznek

Biz:

1. a__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ __ __ __ __
   c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __ __ __ __ __

   a≈b, mint c≈d ➡a≈c, mint b≈d

2. Ez a 9-es és 10-es tételből következik.

14. Tétel – arány – valahány számra, több tagon át

Ha van valahány szám, és ugyanannyi másik, hogy kettesével ugyanabban az arányban állnak, akkor egyenlő (sok tagon) át is ugyanabban az arányban állnak.

Biz:

1. a__ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ __ __
   c__ __ __ __

   d__ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   e__ __ __ __ __ __ __ __
   f__ __ __ __ __ __

   a≈b, mint d≈e, és b≈c, mint e≈f,
   ➡ a≈c, mint d≈f

2. a 13-as tételből következik,hogy
   a≈d, mint b≈e, és b≈e, mint c≈f
   ➡ a≈d, mint c≈f
   és innen a 13-as tétel ismételt alkalmazásával kijön.

15. Tétel – egység, felcserélhetőség

Ha egy egység ugyanannyiszor van meg egy számban, mint egy másik szám egy továbbiban, akkor az egység ugyanannyiszor lesz meg a harmadik tagban, mint a második a negyedikben.

Biz:

1. az a egység annyiszor van meg a BC számban, mint a d az EF-ben
   a__ d__ __ __ __
   B__G__H__C E__ __ __ __K__ __ __ __L__ __ __ __ F

2. ahány egység van BC-ben, annyi d-vel egyenlő szám van EF-ben
   Ekkor BC-t egységekre, az EF-et, pedig a d-vel egyenlő számokra bontjuk
   Ekkor a BC-ben lévő egységek száma egyenlő az EF-ben lévő d-vel egyenlő részek számával.

3. Mivel a részek száma egyenlő, és ugyanakkorák, valamint BG≈EK, mint GH≈KL, mint HC≈LF, azaz mint bármelyik előtag az utótagjához, így az előtagok összege is az utótagok összegéhez (VII. 12.)
   Innen már látszik.

16. Tétel – a szorzás eredménye független a sorrendtől

A szorzás eredménye független a sorrendtől

Biz:

1. a, és b a két számom, a*b:=c, és b*a:=d
   a__ __ c__ __ __ __ __ __
   b__ __ __ d__ __ __ __ __ __
   e__

2. b annyiszor van meg c-ben, mint amennyi egység van a-ban
   e egység szintén annyiszor van meg a-ban, mint amennyi egység van abban
   - ➡ az e egység tehát ugyanannyiszor van meg a-ban, mint b a c-ben
   - ➡ fölcserélve tehát az e egység annyiszor van meg b-ben, mint a c-ben

3. Ha ugyanezt a gondolatmenetet megcsináljuk d-re is, akkor kijön, hogy
   - ➡ Tehát az e egység annyiszor van meg b-ben, mint a d-ben.

4. Tehát a ugyanannyiszor van meg d-ben, mint c-ben.
   - ➡ c=d

17. Tétel – arány – nem változik a számmal való szorzástól

Ha két számot megszorzunk egy harmadikkal, akkor a keletkezett számok aránya ugyanaz, mint az eredetiekké.

Biz:

1. b*a:=d, c*a:=e
   a__ __ f__
   b__ __ __ d__ __ __ __ __ __
   c__ __ __ __ e__ __ __ __ __ __ __ __
2. a 16-os tételhez hasonló gondolatmenettel kijön.

18. Tétel – arány – szorzat aránya = szorzók aránya

Ha egy számot megszorzunk két számmal, akkor a keletkezett számok aránya ugyanaz, mint a szorzóké

Biz:

1. a c számot megszorozva az a és b számokkal keletkezzen d és e
   a__ __ __ d__ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ e__ __ __ __ __ __ __ __

   c__ __
2. d = a*c =c*a (VII. 16.)
   e = b*c = c*b és így ez már ugyanaz, mint a 17-es tétel

19. Tétel – arány – 4 tag, szorzat

Ha négy szám arányos, akkor az első és negyedik szorzata egyenlő a második és harmadik szorzatával, és ez megfordítva is igaz.

Biz:

odafele

1. legyen a négy arányos számom a, b, c, d
   a*d := e, b*c := f
   a*c := g
   a__ __ __ __ __ __ e__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ f__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   c__ __ __ g__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __

2. c úgy aránylik d-hez, mint g az e-hez, mert mindkettő a szorzata c-vel ill. d-vel. (VII. 17.)
   ➡ a úgy aránylik tehát b-hez, mint g az e-hez
   g és f c-nek az a illetve b-vel vett szorzata
   ➡ a úgy aránylik tehát b-hez, mint g az f-hez
   ➡ e = f

visszafele

1. legyen most e = f, azt állítom, hogy a úgy aránylik b-hez, mint c a d-hez
   ➡ e és f ugyanúgy aránylik g-hez
   viszont g úgy aránylik az e-hez, mint c a d-hez (VII. 17.)
   g az f-hez pedig, mint a a b-hez (VII. 18.)

20. Tétel – arány – legkisebb aránypár

Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek osztják a többit, mégpedig úgy, hogy a kisebb ugyanannyiszor osztja a kisebbet, mint a nagyobb, a nagyobbat.

Biz: indirekt

1. CD és EF legyenek azok közül a legkisebbek, amiknek ugyanaz az aránya, mint a és b-nek.

   a__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ C__ __ __G __ __ __D
   b__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ E__ __ _H_ __ __F

   Azt állítom, hogy Cd ugyanannyiszor van meg a-ban, mint EF a b-ben

2. CD ugyanis nem törtrésze a-nak.
   Ha az lenne, akkor ugyanaz a törtrésze lenne a-nak, mint EF a b-nek (VII. 13.)

3. Ahány hányada van a-nak CD-ben, annyi hányada lesz b-nek EF-ben.
   Bontsuk fel őket a hányadokra.
   - ➡ Ekkor CG úgy aránylik EH-hoz, mint GD a HF-hez
   - ➡ CD úgy aránylik EF-hez, mint CG EH-hoz (VII. 12.)

   ↯

4. CD tehát nem törtrésze a-nak, hanem hányada, és EF hányada b-nek.
   Ráadásul ugyanaz a hányada.

21. Tétel – relatív prímek - aránypárok

A relatív prímek az ugyanazon arányú számok között a legkisebbek.

Biz: indirekt

1. legyen a és b számok relatív prímek, és tfh. Léteznek náluk kisebb és ugyanabban az arányban álló c és d számok

   a__ __ __ __ __ __ __ __ c__ __ __ __
   b__ __ __ __ __ d__ __ __
   e__ __

2. a (VII. 20.)–ból következik,
   - ➡ hogy c ugyanannyiszor van meg a-ban, mint d a b-en

   legyen e-ben annyi egység, ahányszor c megvan az a-ban
   - ➡ ekkor e-ben annyi egység van, ahányszor d megvan b-ben

3. Mivel c annyiszor megvan a-ban, ahány egység e-ben van
   - ➡ e annyiszor megvan a-ban, ahány egység c-ben van
   - ➡ ugyanígy e annyiszor van meg b-ben, ahány egység d-ben van
   - ➡ e tehát a-t és b-t is osztja

   ↯

22. Tétel – relatív prímek – aránypárok megfordítás
Az ugyanazon arányú számok közül a legkisebbek relatív prímek.

Biz: indirekt

a 21-es tétel megfordítása, a (VII. 17.)–ből következik

23. Tétel – relatív prímek – osztó is relatív prím
Ha két szám relatív prím, akkor az egyiket osztó szám is relatív prím a másikhoz.

Biz: indirekt

1. legyenek a és b relatív prímek, a osztója pedig c
   a__ __ __ __ __ __ __ __ c__ __ __ __
   b__ __ __ __ d__ __
2. tfh. B és c nem relatív prímek, legyen d a közös osztójuk.
   Mivel d osztja c-t, az pedig a-t
   ➡ d osztja a-t
   b-t is osztja
   ϟ

24. Tétel – relatív prímek – szorzat is relatív prím
Ha két szám relatív prím egy harmadikhoz, akkor a szorzatuk is relatív prím hozzá

Biz: indirekt

1. legyenek a és b relatív prímek a c számhoz.
   a*b:=d
   Azt állítom, hogy c és d is relatív prímek.
   a__ __ __ d__ __ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ e__ __ __ __ __
   c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ f__ __
2. Tfh. c és d nem rel. prímek, legyen e a közös osztójuk
   ➡ e relatív prím a-hoz (VII. 23.)
3. legyen annyi egység f-ben, mint ahányszor e megvan d-ben, tehát e*f=d, de a*b=d
   ➡ e*f=a*b
   ➡ ha viszont a kültagok szorzata = a beltagok szorzatával, akkor a négy szám arányos. (VII. 19.)

25. Tétel – relatív prímek – négyzet is relatív prím

Ha két szám relatív prím, akkor az egyik négyzete is relatív prím a másikhoz.

Biz:

1. Legyenek a és b relatív prímek, c pedig a önmagával vett szorzata
   a__ __ __   c__ __ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __   d__ __ __
   Azt állítom, hogy c és b relatív prímek.

2. d legyen egyenlő a-val
   - ➡ d és b is relatív prímek
   - ➡ d*a=c is relatív prím b-hez (VII. 24.)

26. Tétel – relatív prímek – szorzat is relatív prím

Ha két szám egyszerre relatív prím másik két szám bármelyikéhez, akkor a két-két szám szorzata is relatív prím.

Biz:

1. Legyen a és b egyszerre relatív prím két másik szám, azaz c és d bármelyikéhez.
   a*b:=e, c*d:=f
   a__ __   e__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ __ __ __
   c__ __ __   f__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __ __ __ __
   Azt állítom, hogy e és f is relatív prímek.
   - ➡ e relatív prím lesz c-hez, és d-hez is
   - ➡ tehát c*d is relatív prím e-hez

27. Tétel – relatív prímek – hatvány is relatív prím

Ha két relatív prímet megszorzunk önmagával, akkor a keletkező számok is relatív prímek lesznek, és ha a keletkezett számokat megint megszorozzuk az eredeti számokkal megint relatív prímeket kapunk. (és ez bármelyik hatvány esetében így van)

Biz:

1. legyenek a és b relatív prímek,
   a önmagával vett szorzata c, c önmagával vett szorzata pedig d
   b önmagával vett szorzata e, e önmagával vett szorzata pedig f
   Ekkor d és f is relatív prímek lesznek.

   Előző két tételből következik.

28. Tétel – relatív prímek – összeg is relatív prím

Két relatív prímszám összege is relatív prím az összeg bármelyik tagjához, és ha két szám összege relatív prím az összeg egy tagjához, akkor az eredeti számok is relatív prímszámok voltak.

Biz: indirekt

odafele

1. Adjunk össze két relatív prímszámot, AB-t és BC-t ekkor AC rel. prím lesz mindkettőhöz.
   A__ __ __ __B__ __ __C
   d__ __

2. Ha ugyanis pl. AC és AB nem rel. prímek, akkor létezik egy d közös osztójuk.
   Mivel d osztja AC és AB-t is
   ➡ BC-t is osztja (2. E.)
   ϟ

Visszafele

1. Legyenek most AC és Ab relatív prímek, azt állítom, hogy ekkor AB és BC is rel. prímek.

2. Tfh. nem azok.
   Létezik egy közös osztójuk, d
   ➡ mivel mindkettőjüket osztja az összegüket, AC-t is osztja (1. E.)
   ϟ

29. Tétel – relatív prímek - prímekre

Bármelyik prímszám relatív prím azokhoz a számokhoz, amelyikeket nem osztja.

Biz: indirekt

1. a legyen egy olyan prím, ami nem osztja b-t
   a__ __ __ b__ __ __ __ c__ __

2. Indirekten tfh. a és b nem relatív prímek.
   Legyen c a közös osztójuk
   c ≠ a, mert a nem osztja b-t, de a prím ϟ

30. Tétel – prímek – szorzat

Ha két szám szorzatát osztja egy prímszám, akkor valamelyik tényezőt is osztja.

Biz:

1. a*b:=c, és c | d
   Azt állítom, hogy d vagy a-t, vagy b-t osztja
   a__ __ __ b__ __ __ __
   c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __ e__ __ __ __ __ __

2. Ne ossza most d a-t, ekkor ezek relatív prímek lesznek. (VII. 29.)
   Legyen annyi egység e-ben, ahányszor d megvan c-ben.
   Tehát d*e=c, és tudjuk, hogy a*b=c
   ➡ d*e=a*b
   ➡ d ≈ a, mint b ≈ e (VII. 19.)
   mivel d, a rel. prímek
   ➡ d osztja b-t . (VII. 20-21.)

31. Tétel – prímek – összetett számok

Bármely összetett számot osztja valamilyen prímszám

Biz:

1. Legyen a az összetett számom, amit oszt egy b szám.
   Ha b prím, akkor készen vagyunk, ha nem az, akkor létezik egy c szám, ami osztja b-t.
   ➡ c is osztja a-t (2. E.)
   Ha c prím, akkor kész vagyunk ,ha nem akkor stb.
   Ezt folytatva valamikor találni fogunk egy prímszámot, mert ha nem találnánk, akkor végtelen sok szám osztaná az a számot, amik közül a következő mindig kisebb, mint az előző ↯

32. Tétel – prímek – prím vagy osztja egy prím

Bármely szám vagy prím, vagy osztja egy prímszám

Biz:

1. ha a prím, akkor készen vagyunk, ha pedig összetett, akkor meg osztja egy prímszám. (VII. 31.)

33. Tétel (feladat) – arány – legkisebb aránypár (2)

Keressük meg valahány adott számhoz a legkisebbet, melyek ugyanolyan arányban állnak, mint ők!

Megoldás: indirekt bizonyítással

1. legyenek a, b, c adottak

a__ __ __ __ __ __	e__ __	h__ __
b__ __ __ __ __ __ __ __ __	f__ __ __	k__ __ __
c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __	g__ __ __ __	l__ __ __ __
	d__ __ __	m__ __ __

2. ezek vagy relatív prímek, vagy nem.
   Ha azok, akkor ezek a legkisebbek (VII. 21.)
   Tehát feltehetjük, hogy nem azok:
   Lnko(a; b; c):= d (VII. 3.)

3. És legyen annyi egység e,f illetve g-ben, mint ahányszor d megvan a,b illetve c-ben.
   Ekkor e,f,g ugyanannyiszor van meg a,b,c-ben, tehát ugyanolyan arányban állnak. Azt állítom, hogy ezek a legkisebbek.

4. Indirekten tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor létezik olyan h,k,l, amire teljesül.
5. Ezek ugyanannyiszor vannak meg a,b illetve c-ben. Álljon m annyi egységből, ahányszor megvannak ezekben a számokban. (VII. 15.)
   m annyiszor van meg a,b ill. c-ben, ahány egység van h,k ill. l-ben, tehát osztja a,b,c-t

6. tudjuk, hogy h*m=a és e*d=a
   - ➡ h*m=e*d
   - ➡ tehát h úgy aránylik e-hez, mint m a d-hez (VII. 19.)

   e>h, ezért m>d
   ↯

34. Tétel (feladat) – lkkt

2 adott szám lkkt-jét keressük

Megoldás: indirekt bizonyítással

1. Legyenek a és b az adott számok

   a__ __ __
   b__ __ __ __
   c__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __
   d__ __ __ __ __ __ __ __ __
   e__ __ __
   f__ __

   Ha relatív prímek, akkor a*b:=c, b*a=c (VII. 16.)
   a és b tehát osztja c-t, és azt állítom, hogy c a legkisebb ilyen szám.
   Tfh. Létezik egy c-nél kisebb közös többszörös, jelen esetben d.

2. e-ben legyen annyi egység, ahányszor megvan a a d-ben, f-ben pedig annyi, ahányszor b megvan a d-ben.
   ➡ a*e=d, b*f=d
   ➡ a*e=b*f
   ➡ a ≈ b, mint e ≈ f (VII. 19.)

   Mivel a és b relatív prímek, ezért az ugyanolyan arányban állók közül a legkisebbek, és a nagyobb osztja a nagyobbat, a kisebb pedig a kisebbet. (VII. 21.)
   ➡ b | e

   mivel a*b=c és a*e=d
   ➡ c ≈ d, mint b ≈ e
   ➡ c | d ↯

3. ha nem relatív prímek

   a__ __ __ __ __ __
   b__ __ __ __ __ __ __ __
   c__ __
   d__ __ __ __ __ __ __ __ __
   f__ __ __
   e__ __ __ __
   h__ __
   g__ __ __

   f és e legyenek az ugyanolyan arányban álló relatív prímek.
   Ekkor a*e=b*f :=c
   Ekkor c közös többszöröse a-nak és b-nek, azt állítom, hogy ez a legkisebb ilyen.

4. Tfh. Létezik d, ami közös többszörös, és kisebb c-nél.
   Legyen annyi egység g-ben ahányszor a megvan a d-ben, illetve h-ban meg annyi, ahányszor b megvan a d-ben.
   ➡ Ekkor a*g=b*h
   ➡ a ≈ b, mint h ≈ g (VII. 19.)
   ➡ a ≈ b, mint f ≈ e (VII. 19.)
   ➡ h ≈ g, mint f ≈ e

   f és e a legkisebb ilyenek, és ezek mint tudjuk osztják a többi ugyanilyen arányban álló számot. (VII. 20.)
   ➡ e | g

   Tudjuk, hogy a*e=c, és a*g=d
   ➡ c | d ↯

35. Tétel – lkkt – osztó

Ha két szám oszt egy számot, akkor a legkisebb közös többszörösük is osztja

Biz: indirekt

1. Ossza a és b CD-t, e pedig legyen a legkisebb közös többszörösük.
   Ekkor azt állítom, hogy e is osztja CD-t.
   a__ __ b__ __ __ e__ __ __ __ __ __
   C__ __ __ __ __ __F__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __D

2. Indirekten tegyük fel, hogy e nem osztja CD-t.
   Ekkor ossza DF-et, és legyen a nála kisebb maradék CF.
   Mivel a és b osztja e-et, e pedig DF-et
   ➡ a és b is osztja DF-et (3. E.)
   Viszont a és b az egész DF-et is osztja
   ➡ a maradék CF-et is osztják (2. E.)
   amely viszont kisebb mint az e, ami lehetettlen.
   ↯

36. Tétel (feladat) – lkkt – 3 számra

3 adott szám lkkt-jét keressük

Megoldás: indirekt bizonyítással

hasonló, mint 3 szám legkisebb közös osztója

37. Tétel – hányad - osztó

Ha egy számnak osztója egy másik szám, akkor a számnak van annyiad része, mint amennyi osztó.

Biz:

1. Ossza az a számot egy b szám, c-ben pedig legyen annyi egység, ahányszor b megvan a-ban.
   a__ __ __ __ __ __ c__ __ __
   b__ __ d__

2. Mivel b annyiszor van meg a-ban, mint amennyi egység van c-ben, és a d egység annyiszor van meg c-ben, ahány egység van ebben
   ➡ A d egység annyiszor van meg c-ben, mint a b az a-ban
   ➡ Fölcserélve tehát a d egység a b számnak ugyanaz a hányada, mint a c az a számnak
   ➡ A d egység viszont annyiad része b-nek, mint amennyi b
   ➡ Tehát c az a-nak szintén annyiad része.
   Tehát c annyiad része a-nak, amennyi a b.

38. Tétel – hányad – osztó (2)

Ha egy számnak létezik valamelyik hányada, akkor a számot osztja az a szám, ahányad része a hányad a számnak.

Biz:

1. Legyen b az a-nak valahány hányada, c pedig az a szám ahány hányada.
   Azt állítom, hogy c osztja a-t

a__ __ __ __ __ __	c__ __
b__ __ __	d__

2. b annyiad része a-nak, mint c, és a d egység annyiad része c-nek, mint c
   ➡ d a c-nek ugyanaz a hányad, mint b az a-nak
   ➡ a d egység tehát ugyanannyiszor van meg c-ben, mint a b az a-ban
   ➡ fölcserélve tehát a d ugyanannyiszor van meg b-ben, mint a c az a-ban (VII. 15.)
   ➡ c osztja a-t.

39. Tétel (feladat)– hányad – legkisebb szám adott hányada

Azt a legkisebb számot keressük, melynek léteznek adott hányadai.

Megoldás: indirekt bizonyítással

1. a, b és c legyenek az adott hányadok

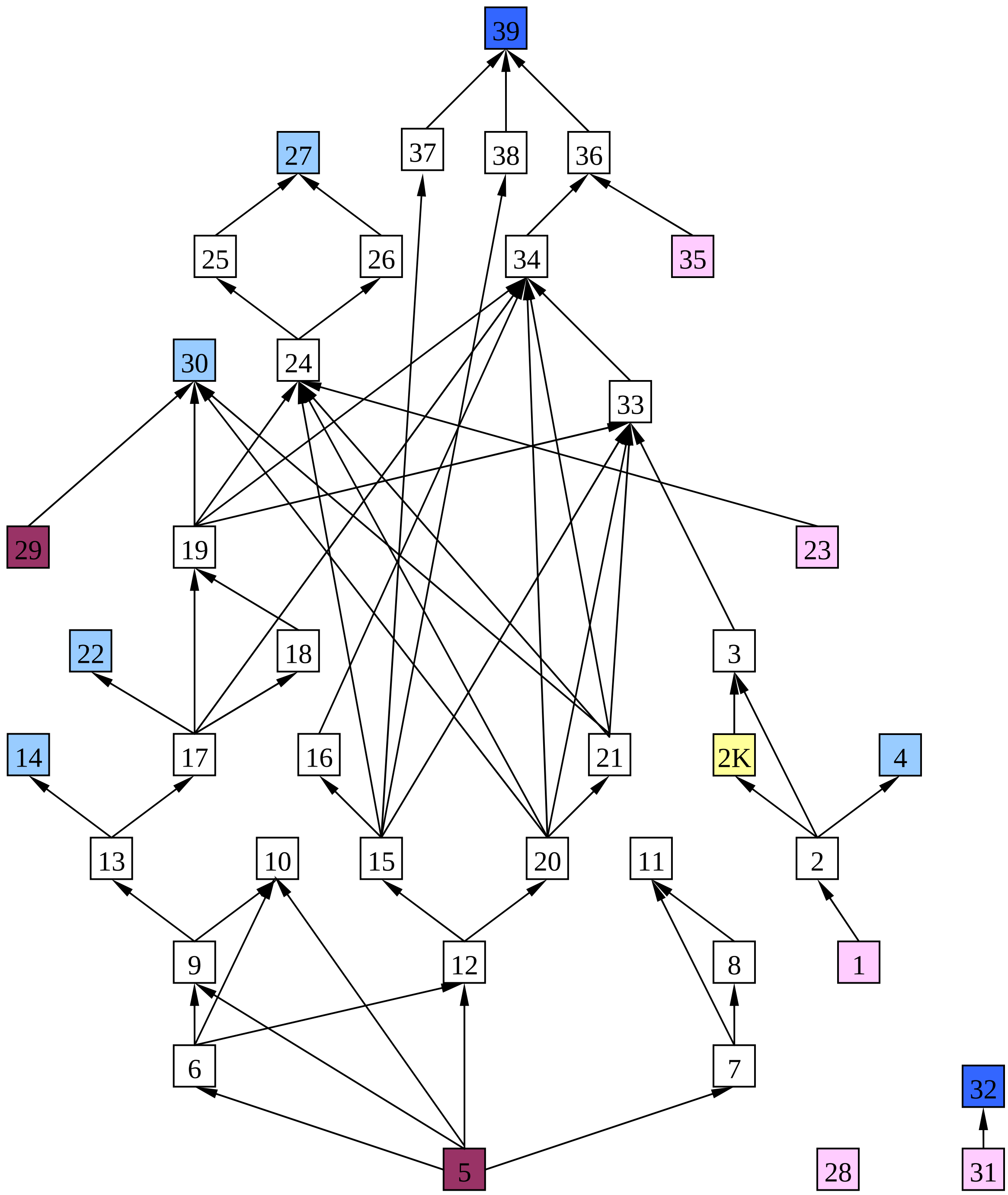
a__ __	b__ __ __	c__ __ __ __
d__ __ __ __ __ __	e__ __ __ __	f__ __ __
g__ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __ __		h__ __?__ __

   Legyen d, e és f azok a számok, ahányad része a,b ill. c

2. g legyen ezeknek a legkisebb közös többszöröse. (VII. 36.)
   ➡ g-nek léteznek annyiad részei, mint d, e, f, ezek a részek padig az a, b, c számok
   ➡ tehát g-nek léteznek az a, b, c hányadai
   Azt állítom, hogy g a legkisebb ilyen

3. Indirekten tegyük fel, hogy nem az, ekkor létezik ennél kisebb h szám, aminek léteznek az a, b, c hányadai.
   ➡ H-t osztják azok a számok, ahányad részek a,b és c (VII. 38.)
   ➡ Ezek a számok viszont d, e és f
   ➡ Tehát h-t osztja d, e, f és kisebb g-nél
   ϟ

A VII. könyv szerkezete



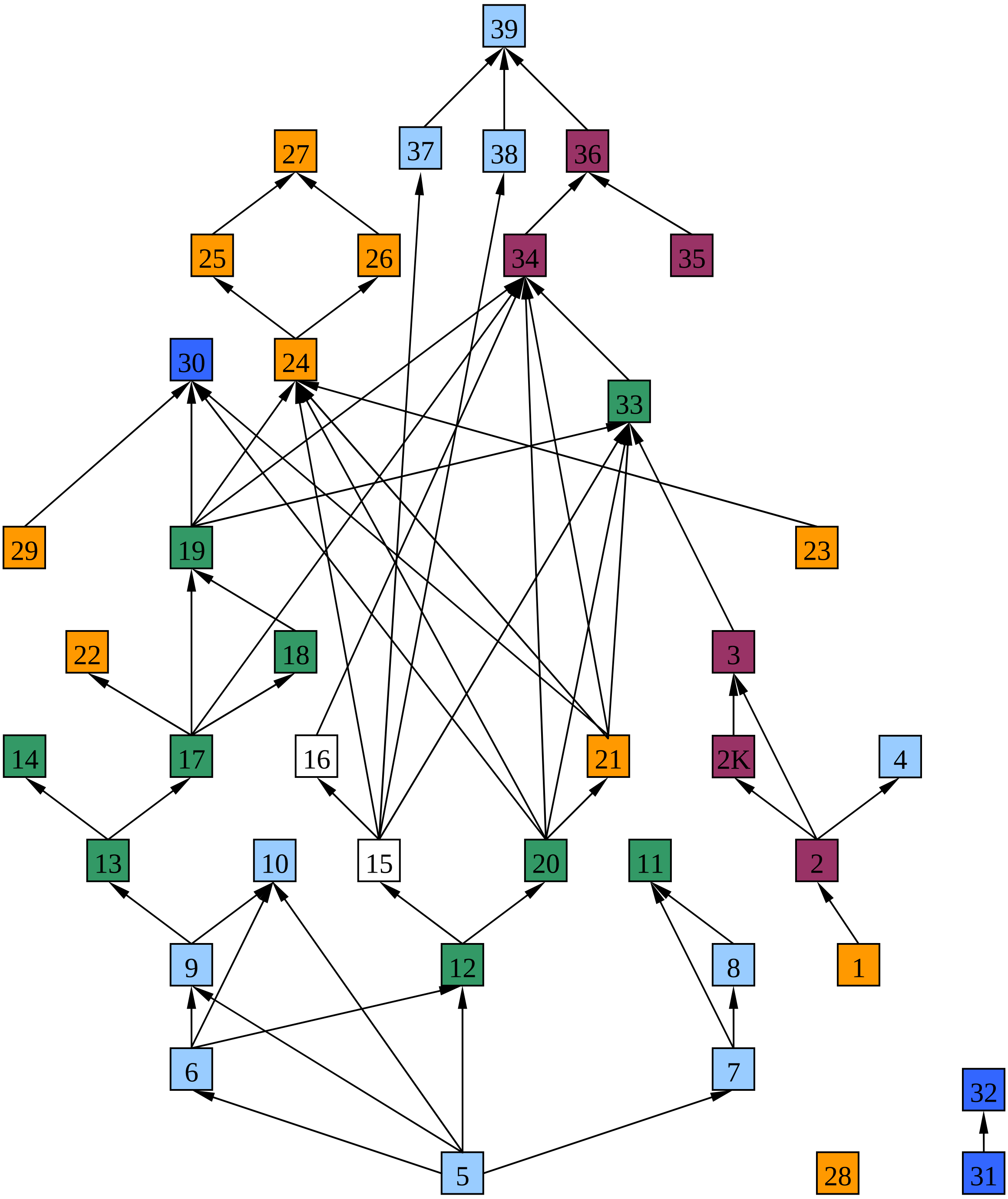
=nem hivatkozik rá másik tétel

=nem hivatkozik rá másik tétel a könyvből

=nem hivatkozik semmire

=nem hivatkozik másik tételre

A VII. könyv szerkezete (2)



= relatív prímek

= lnko, lkkt

= prímek

= törtrész-hányad

= arány

Összetartozó tételek:

relatív prímek	1, 21-27, 28-29
törtrész - hányad	4-10, 37-39
lnko .- lkkt	2-3, 34-36
arány	11-14, 17-20, 33
prímek	30-32

	hányad	**törtrész**	**arány**
összeg	5.	6.	12.
különbség	7.	8.	11.
felcserélhetőség	9.	10.	13.

	lnko	**lkkt**
2 számra	2.	34.
3 számra	3.	36.