Téma honlapja:

hps.elte.hu/~kutrovatz/courses/logika.htm

e-mail:

kutrovatz@hps.elte.hu

Bevezetés a logikába

"nemhivatalos" jegyzet

Budapest, 2003.

Tartalomjegyzék

Bevezető

Mivel foglalkozik a logika?

Következtetésekkel. Vagy mondhatnánk, hogy érveléssel, bizonyítással – ezek azonban visszavezethetők a következtetésre.

Mi a logika?

A logikára sok definíciót adtak már, mi is adunk egyet:
A logika a következtetések érvényességének feltételeit "vizsgáló" tudomány.

A kijelentés egy nyelvi eszköz: állít valamit a világról; a következtetés pedig ezek közti reláció. Mi kijelentések egy jól meghatározott csoportjával tudunk foglalkozni: olyanokkal, melyek igazságértéke időben nem változik.

A vizsgált következtetések felépítése:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{premisszák}\\ \text{(kijelentések)}\end{array} & \left\{\begin{array}{l} p_1\\ p_2\\ .\\ .\\ .\\ p_n\end{array}\right. & \begin{array}{c}\textit{legalább 1,}\\ \textit{legfeljebb n}\end{array} \\ \hline \text{konklúzió} & p_{n+1} & \textit{mindig csak 1} \end{array}$$

Az általános következményfogalomban: két premissza van, vannak egypremisszások is. A nulla premisszás következtetések a tautológiák (azonosan igaz állítások), pl.: "*Süt a nap, vagy nem süt a nap*."

A logika nyelve:

SZINTAKTIKAI ELVEK	*szerkezetileg, ill. szókészletés és grammatikáját tekintve egyértelmű*
SZEMANTIKAI ELVEK	*egyértelműen vonatkozik valamire*

Szintaktikai elvek

Arisztotelész: *szubjektum és predikátum* /alany-állítmány/ szerkezet elve. Ezzel azonban sok baj van.

pl.: "*A Télapó öregebb, mint Harry Potter*." Ki az alany?

Gottlob Frege /1848-1925/ - ő alapozta meg a mai logikát; a *funktor-argumentum* szerkezeti elv is tőle származik:

Funktor és argumentum (vagy függvény és ~) elv

Az állításban a "maradandó" (változatlan) rész a *függvény*, ennek üres helyeit kitöltjük *argumentumokkal* (ezek a változók).

funktor: üres helyet tartalmazó nyelvi kifejezés;

argumentum: tetszőleges, lezárt nyelvi kifejezés lehet.

pl.: "*Télapó*" - megragatunk valakit/valamit, nincs benne üres hely
"*öreg*" - nem lezárt, nem ragadtunk meg vele semmit
"*Télapó öreg*." - együtt megint zárt

ARGUMENTUMOK

nevek

olyan nyelvi kifejezés, melynek funkciója, hogy megnevezzen valakit/valamit
pl.: "*Ceasar*", "*Brutus" apja* (lehetnek leírások is, nem csak tulajdonnevek)
"*Lánchíd*" (tulajdonnév, de nem személy
"*kilenc*" (természetes szám)

kijelentések, mondatok

igazságértékkel (*igaz* vagy *hamis*) rendelkező nyelvi kifejezés
pl.: "*A Télapó öreg*.", "$3^2=9$"

minden, ami nem argumentum -> funktor
ha a funktorok üres helyeit kitöltjük argumentumokkal -> újabb argumentumokat kapunk

FUNKTOROK /funktorcsaládok/

névfunktor

be- és kimenete is név: névből nevet csinál

a) **egyargumentumú**
   pl.: *"___ apja", "___ abszolútértéke"*
b) **kétargumentumú**
   pl.: *"____ és ...... legidősebb fia", "____ + ..."*

mondatfunktor

mondatból mondatot csinál

a) **egyargumentumú**
   pl.: *"Nem igaz, hogy ____", "Valószínű, hogy ___ "*
b) **kétargumentumú**
   pl.: *"____ és ......", "Ha ____, akkor ......"*

predikátum

bemenete név, kimenete mondat

a) **egyargumentumú**
   pl.: *"____ fut"*

b) **kétargumentumú**
   pl.: *"____ magasabb, mint ......", "____ szereti ......", ____ > ......"*

c) **egyargumentumú**
   pl.: *"____ bemutatta ......-t _ _ _-nek"*

szubnektor
mondatból nevet csinál
pl.: "Az, aki ____"

\+ lehetnek több argumentumúaknál vegyes argumentumok is

Szemantikai alapelvek

Frege-háromszög:

nyelvi jel ⇒ jelölet (extenzió)
jelentés (intenzió)

név ⇒ objektum
megnevezés szabálya

mondat ⇒ igazságérték
"gondolat"

1 arg. predikátum ⇒ objektumok osztálya
"szabály"

Extenzionális funktor: a bemenet(ek) jelölete egyértelműen meghatározza a kimenet jelöletét.

pl.: *"Nem igaz, hogy ____", "____és ......", "____beteg"* – extenzionális

"____, mert ......", "Tudom, hogy ____" – nem extenzionális (intenzionális)

Extenzionális nyelv: amelyben csak extenzionális funktorok vannak.

Propozícionális logika

(nulladrendű logika, kijelentéslogika)

Felbontás: mondatfunktor – argumentum

Nyelv

- p_0, p_1, p_2 ... *atomi kijelentések*
- ~, &, ∨, ⊃, ≡ ... *konnektívumok (mondatfunktor)*
- (,) *segédjelek*

Szemantika

extenzionális: a konnektívumok bemenetének igazságértékei meghatározzák a kimenet igazságértékét

kétértékűség elve:

- **ellentmondásmentesség elve**: minden kijelentésnek csak eg yigazságértéke lehet
- **kizárt harmadik elve**: csak két igazságérték lehet

Igazságtáblázatok

A,B kijelentés

Igazságértékek: 1 – igaz, 0 – hamis

negáció *("nem")*	
A	~A
0	1
1	0

konjunkció *("és")*		
A	B	A&B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

alternáció *("vagy")*		
A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

kondícionális *("ha, akkor")*		
A	B	A⊃B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

bikondícionális *("akkor és csak akkor")*		
A	B	A≡B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(Itt a diszjunkció a kizáró vagy.)

Konnektívumok

a) egyargumentumú

A	~A
1	0
0	1

A	A
1	1
0	0

A	A∨~A
1	1
0	1

A	A&~A
1	0
0	0

b) n-argumentumú

n bemeneti oszlop, 2^n sor, 2^{2^n} különböző

Visszavezethetők egymásra

- A⊃B ⇔ ~A∨B (⇔: ugyanakkor igazak, logikai szinonimák)
- A⊃B ⇔ ~(A&~B)
- A&B ⇔ ~(~A∨~B)
- A∨B ⇔ ~(~A&~B)
- A≡B ⇔ (A⊃B) & (B⊃A)

<u>Áll</u>.: tetszőleges n-argumentumú konnektívum kifejezhető {~, &, ∨}-val.

1. az igazságtáblának van pozitív sora ⇒ vegyük ezen sorokhoz tartozó elemi konjunkciókat: n kijelentésparaméter: p_i, ha a bemenet ott 1; $\sim p_j$, ha a bemenet ott 0 ⇒ vegyük ezek alternációját ⇒ így kapjuk a teljes alternatív normálformát

pl.:

p_1	p_2	$p_1 \equiv p_2$	
1	1	1	⇒ p_1 & p_2
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	⇒ $\sim p_1$ & $\sim p_2$

⇒ $p_1 \equiv p_2$ ⇔ (p_1 & p_2) ∨ ($\sim p_1$ & $\sim p_2$)

2. nincs pozitív sor: a fenti módszer, de negatív soroknál, és p_i, ha a bemenet ott 0; $\sim p_j$, ha a bemenet ott 1 (előző: $p_1 \equiv p_2$ ⇔ ($\sim p_1 \vee p_2$) & ($p_1 \vee \sim p_2$))

Sheffer-szimbólum:
A|B ⇔ ~(A&B)
A|A ⇔ ~(A&A) ⇔ ~A
(A|B) | (A|B) ⇔ ~(A|B) ⇔ ~(~(A&B)) ⇔ A&B

Sem-sem művelet:
A||B ⇔ ~A&~B

Interpretáció

Minden atomi kijelentéshez **igazságértéket rendelünk**:

$\{p_0, p_1, \ldots\} \mapsto \{0,1\}$

DEF: **logikai igazság, tautológia**: minden interpretáció igazzá teszi

pl.: $A \vee \sim A$, $A \supset A$, $A \supset (B \supset A)$ stb.

DEF: **logikai ellentmondás**: egyetlen interpretáció sem teszi igazzá

pl.: $A \& \sim A$, $\sim(A \supset A)$ stb.

DEF: **modell**: egy propozícióosztály olyan interpretációja, mely annak minden elemét igazzá teszi

pl.: $\{p_0 \& \sim p_1, \sim(p_0 \equiv p_1)\}$ $p_0 \to 1$, $p_1 \to 0$

DEF: **Propozícióosztály kielégíthető**, ha van modellje.

DEF: **Szemantikai következmény**:

$\{A_1, \ldots, A_n\} \Rightarrow K$, ha $\{A_1, \ldots, A_n\} \cup \{\sim K\}$ kielégíthetetlen. (Ha a premisszák igazak, a konklúzió is az.)

"**Tételek**": Γ – propozícióosztály, **A,B...** – propozíciók

1. Ha Γ kielégíthetetlen, akkor bármely A-ra: $\Gamma \Rightarrow A$.
2. Ha A logikai igazság, akkor bármely Γ-ra: $\Gamma \Rightarrow A$. (Spec.: $\emptyset \Rightarrow A$, jelölés: "$\Rightarrow A$")
3. Ha $\Gamma \Rightarrow A$ és $\Gamma \subset \Gamma'$, akkor $\Gamma' \Rightarrow A$.
4. Ha $\{A_1, \ldots, A_n\} \Rightarrow A$, akkor $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \Rightarrow A_n \supset A$ (és viszont)
5. **"Dedukció-tétel"**
   Ha $\{A_1, \ldots, A_n, \sim A\}$ kielégíthetetlen $\to$ $\{A_1, \ldots, A_n \& \sim A\}$ kielégíthetetlen $\to$
   $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \Rightarrow \sim(A_n \& \sim A)$ ($\Leftrightarrow \{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \Rightarrow (A_n \supset A)$)

Szintaxis

Szintaxis: interpretálatlan logikai rendszer.

DEF.: **Propozícionális nyelv**: (Metanyelv $\longleftrightarrow$ tárgynyelv: ha szuahéliül tanulok, a magyar a metanyelv)

- **$p_0, p_1, \ldots$** kijelentésparaméterek,
- **$\sim, \supset$** konnektívumok,
- **(,)** segédjelek.

Metanyelvben: A, B, C, ... – mondatváltozók; $\sim$, $\supset$, = ("azonos"); halmazelméleti jelek (ugyanazokból a jelekből épül fel, de nem lesz teljesen formális)

DEF: **Propozíciók osztálya** /PROP/

PROP $\subseteq$ X (minden X-re), $p_i \in X$ ($i \in \mathbb{N}$) atomi propozíció
- ha $A \in X$, akkor $(\sim A) \in X$ /negációképzés nem visz ki a propozícióképzésből/
- ha $A, B \in X$, akkor $(A \supset B) \in X$.

Vegyük az összes ilyen osztályt, PROP ezek közül a legszűkebb.

DEF: $A_1, \ldots, A_n$ ($A_i \in$ Prop) az $A \in$ PROP **formációs sorozata**, ha $A_n = A$, és $\forall i \leq n$-re:
- A_i atomi, vagy
- $A_i = (\sim A_j)$, ahol $j < i$, vagy

- $A_i=(A_j\supset A_k)$, ahol $j,k<i$.

Pl.: $((p_0\supset(\sim p_1))\supset p_{25})$-öt meg kell, hogy előzzék a benne szereplő atomi propozíciók:
p_0, p_1, $(\sim p_1)$, $(p_0\supset(\sim p_1))$, p_{25}, $((p_0\supset(\sim p_1))\supset p_{25})$

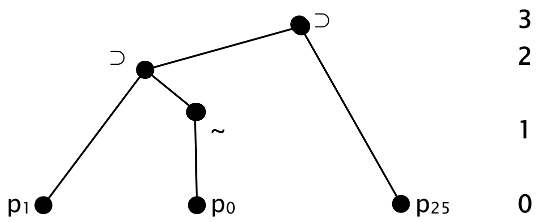
DEF: $A\in$ PROP **részpropozíciója** $B\in$**PROP**-nak, , ha
- $B=A$, vagy
- $B=(\sim B_1)$, ahol A részpropozíciója B_1-nek, vagy
- $B=(B_1\supset B_2)$, ahol A részpropozíciója B_1-nek vagy B_2-nek.

DEF: r(A) az $A\in$Prop **rangja**:

$r(A)=0$, ha A atomi,

$r((\sim A))=r(A)+1$

$r((A\supset B))=\max(r(A),r(B))+1$.



DEF: **Kalkulus**: **nyelv** (nyelvi elemek + grammatikai szabályok) + **levezetési rendszer** (axiómák + levezetési szabályok).

DEF: **Propozícionális axiómasémák**:

(A1) $(A\supset(B\supset A))$

(A2) $(((A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C)))$

(A3) $(((\sim A)\supset(\sim B))\supset(B\supset A))$

(Akkor lesz az axiómasémábl axióma, ha az A, B, C helyére $P\in$ PROP kerül.)

DEF: Az $A_1, ..., A_n$ propozícionális sorozat az $A\in$ PROP **levezetése** $\Gamma\in$ PROP-ból, ha $A_n=A$, és $\forall A_i$-re:
- A_i axióma, vagy
- $A_i\in\Gamma$, vagy
- van olyan A_j és $A_k=(A_j\supset A_k)$, hogy $j,k<i$. **MODUS PONENS (MP, leválasztási szabály).**

DEF: $A\in$ PROP **levezethető** (van levezetése), ha $\exists\Gamma$, hogy $\Gamma\vdash A$.

DEF: $A\in$ PROP **logikai tétel** (vagy a propozícionális logikának tétele), ha $\emptyset\vdash A$ (csak az axiómákból levezethető, nincs szükség Γ propozícióosztályra). Jelölés: "$\vdash$A".

Pl.: $\vdash(p_0\supset p_0)$

1. (A2): $A\rightarrow p_0$, $B\rightarrow(p_0\supset p_0)$, $C\rightarrow p_0$
   $\vdash(\ (p_0\supset(\ (p_0\supset p_0)\supset p_0)\ )\supset(\ (p_0\supset(p_0\supset p_0))\supset(p_0\supset p_0)\ )\ )$
2. (A1): $A\rightarrow p_0$, $B\rightarrow(p_0\supset p_0)$
   $\vdash(p_0\supset(\ (p_0\supset p_0)\supset p_0)\ )$
3. MP 1,2: $\vdash\ p_0\supset(p_0\supset p_0))\supset(p_0\supset p_0))$
4. (A1): $A\rightarrow p_0$, $B\rightarrow p_0$
   $\vdash\ p_0\supset(p_0\supset p_0)\supset(p_0\supset p_0)$
5. MP 3,4: $\vdash(p_0\supset p_0)$ □

DEF: $\Gamma \in PROP$ **inkonzisztens** (ellentmondásos), ha $\Gamma \vdash (\sim(A \supset A))$ típusú propozíció, különben **konzisztens.** (Ha logikai tétel ellenmondását le lehet vezetni Γ-ból, akkor abból minden levezethető.)

TÉTEL: Dedukció-tétel (DT)

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \leftrightarrow \Gamma \vdash (A \supset B)$$

Biz.: "$\leftarrow$": $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$

$(A \supset B)$ levezetése Γ-ból: $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots, (A \supset B) \vdash B$ (MP)

"$\rightarrow$": $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ (feltétel)

a) Tfh. B logikai axióma

1.	$\vdash B$
2. (A1)	$\vdash (B \supset (A \supset B))$
3. MP: 1,2	$\vdash (A \supset B) \rightarrow \Gamma \vdash (A \supset B)$

b) B Γ-ból következik

1.	$\Gamma \vdash B$
2. (A1)	$\Gamma \vdash (B \supset (A \supset B))$
3. MP: 1,2	$\Gamma \vdash (A \supset B)$

c) B-t MP-szel kaptuk

1. feltétel	$\Gamma \vdash (A \supset C)$
2. feltétel	$\Gamma \vdash (A \supset (C \supset B))$
3. (A2)	$\Gamma \vdash ((A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B)))$
4. MP: 2,3	$\Gamma \vdash ((A \supset C) \supset (A \supset B))$
5. MP: 1,4	$\Gamma \vdash (A \supset B)$ □

TÉTEL: Metszetszabály (MSZ)

$$\Gamma_1 \vdash A \text{ és } \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B \rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$$

Biz.: $\left.\begin{array}{r} \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B \rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash B \rightarrow \text{DT: } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash (A \supset B) \\ \Gamma_1 \vdash A \rightarrow \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash A \end{array}\right\}$ MP: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$ □

TÉTEL: Kontrapozíció (KP)

$$\Gamma \cup \{(\sim A)\} \vdash (\sim B) \leftrightarrow \Gamma \cup \{B\} \vdash A$$

Biz.:

a) "$\rightarrow$"	1. feltétel	$\Gamma \cup \{(\sim A)\} \vdash (\sim B)$
	2. DT: A	$\Gamma \vdash ((\sim A) \supset (\sim B))$
	3. (A3)	$\Gamma \vdash (((\sim A) \supset (\sim B)) \supset (B \supset A))$
	4. MP:2,3	$\Gamma \vdash (B \supset A)$
	5. DT: 4	$\Gamma \cup \{B\} \vdash A$
b)	1.	$\{(\sim(\sim B)),(\sim(\sim(\sim(\sim B))))\} \vdash (\sim(\sim B))$
	2. KP a): 1	$\{(\sim(\sim B)), (\sim B)\} \vdash (\sim(\sim(\sim B)))$
	3. KP a): 2	$\{(\sim(\sim B)),(\sim(\sim B))\} \vdash B$
	4.	$\{(\sim(\sim B))\} \vdash B$
	5. hely. $B \rightarrow (\sim A)$	$\{(\sim(\sim(\sim A)))\} \vdash (\sim A)$
	6. KP a): 5	$\{A\} \vdash (\sim(\sim A))$

c) "$\leftarrow$" 1. feltétel $\Gamma\cup\{B\}\vdash A$

2. MSZ: 1,b/4 $\Gamma\cup\{(\sim(\sim B))\}\vdash A$ (mivel $\{A\}\vdash(\sim(\sim A))$ levezetési reláció tranzitív)

3. tranz. 2,b/6 $\Gamma\cup\{(\sim(\sim B))\}\vdash(\sim(\sim A))$

4. KP a): 3 $\Gamma\cup\{(\sim A)\}\vdash(\sim B)$ □

TÉTEL: ellentmondó propozíciós párból bármi levezethető.

Biz.: 1. $\{(\sim A), (\sim B)\}\vdash(\sim A)$

2. KP: 1 $\{(\sim A), (A)\}\vdash B$, ahol B bármi lehet. □

Spec.: $\left.\begin{array}{r}\vdash(A\supset A)\\ \text{inkonzisztens: } \Gamma\vdash(\sim(A\supset A))\end{array}\right\}$ $\Gamma\vdash B$, ahol B bármi lehet, mivel Γ inkonzisztens.

Elsőrendű (egzisztenciális) logika

Atomi kifejezések tovább bontva:

- mondatfunktorok (konnektívumok)
- predikátumok
- névfunktorok
- terminusok (formalizált nevek)
- formulák (formalizált kijelentések)

Nyelv

$\mathcal{L}^1 = \langle$*Log*, *Var*, *Con*, *Term*, *Form*$\rangle$

Log **logikai konstansok**
- *konnektívumok*: negáció (~), kondícionális (⊃), konjunkció (&), alternáció (∨), bikondícionális (≡)
- *kvantorok*: univerzális (∀), egzisztenciális (∃)
- *azonosság*: =
- *segédjelek*: (,)

Var **individuum-változók**: **x_0, x_1, x_2, ...**

Con **nem logikai konstansok** (deskriptív)
- **NF_n**: *n argumentumú névfunktorok*: **f, g, h, ...**
  spec: **NF_0=NC** *névkonstansok*: **a, b, c, ...**
- **PR_n**: *n argumentumú predikátumok*: **F, G, H, ...**
  spec: **PR_0**: *atomi formulák* (pl.: "*Havazik.*" – ritka)

Term **terminusok** (elvárás: képesek legyenek objektumok megjelölésére)
Minden X-re: *Term*⊆X, ha
- x∈ *Var*, akkor x∈X (azaz minden változó terminus);
- f∈NF_n, t_1, ..., t_n∈X, akkor **f(t_1)...(t_n)∈X** (Spec: a∈NC, akkor **a∈X.**)
  Pl1: f: "*apja*"∈NF_1, a: "*Brutus*"∈NC → f(a): "*Brutus apja*"
  Pl2: g: "*+*"∈NF_2, a: "*5*"∈NC, b: "*7*"∈NC → g(a)(b): "*5+7*"

Form **formulák**
Minden X-re *Form*⊆X, ha
- F∈PR_n és t_1, ..., t_n∈ *Term*, akkor **F(t_1)...(t_n)∈X** (Spec.: P∈PR_0, akkor P∈X.)
  Pl1: F: "*jedi lovag*"∈PR_1, a: "*Luke Skywalker*"∈NC →
  F(a): "*Luke Skywalker egy jedi lovag.*"
  Pl2: G: "*megölte*"∈PR_2, a: "*Káin*"∈NC, b: "*Ábel*"∈NC →
  G(a)(b): "*Káin megölte Ábelt.*"
- t_1, t_2∈ *Term*, **"t_1=t_2"∈X** (leírás és névkonstans közti egyenlőség)
  Pl: f: "*gyilkosa*"∈NF_1, a: "*Káin*", b: "*Ábel*"∈NC →
  f(a)=b: "*Káin Ábel gyilkosa.*"
- A∈X, akkor **(~A)∈X**
- A, B∈X, akkor **(A⊃B), (A&B), (A∨B), (A≡B)∈X**
- A∈X, x∈ *Var*, akkor **∀xA∈X** és **∃xA∈X.**
  Pl1: x: "*Ő*"∈ *Var*, F: "*halandó*"∈PR_1 → F(x): "*Ő halandó*" /még nem tudom, ki/ → ∀xF(x): "*Mindenki halandó*"

Pl2: x:"*Ő*"$\in$ *Var*, G:"*kentaur*"$\in PR_1 \to$ G(x): "*Ő egy kentaur*" $\to$
$\exists$xG(x): "*Létezik kentaur*" vagy "*Léteznek kentaurok*" /legalább 1 olyan dolog van, amire igaz, hogy ő kentaur/

Pl: **Peano-aritmetika nyelve**

$\mathcal{L}^p$ **Log**={~, ⊃, ∀, =, (,)}

Var=$\{x_0, x_1, x_2 ...\}$

Con=$<PR_n, NF_n>$ = {0, S, +, *}

$PR_i=\emptyset$, $0\leq i$ /nincs szükség rájuk/

$NF_0=\{0\}$ /névkonstansok, tulajdonnevek/

$NF_1=\{S\}$, $NF_2=\{+,*\}$, $NF_i=\emptyset$, $3\leq i$

Term: 0, S(0), S(S(x1)), S(0)+S(S(S(x3))), S(0)*S(S(x21))...

Form: S(0)=x1, ∀x(x*0=0),∀x(~(S(x)=0))

Szemantika

Interpretáció: majdnem minden felbontatlan kifejezéshez szemantikai értéket rendelünk

$\mathfrak{I}$p=<*U*, ***Φ***>

U **tárgyalási univerzum**
rögzítjük az objektumokat

Φ **interpretáló függvény**
szemantikai értéket rendel a logikai kifejezésekhez, változókhoz
deskriptív konstansokhoz extenziót (terjedelem) rendel

- ha $f\in NF_n$, akkor $\Phi(F):U^n\to U$; Spec: $a\in NC$, akkor $\Phi(a)\in U$.
  - Pl1: f: "*apja*"$\in NF_1 \to \Phi(f)$ mindenkihez hozzárendeli az apját /akkor lesz rögzített az f jelölete, ha minden emberen végigmegyünk, és megjelöljük az apját/
  - PL2: g: "*+*"$\in NF_2 \to \Phi(g)$ számpárokhoz rendeli az összegüket
- ha $F\in PR_n$, akkor $\Phi(F)\subseteq U^n$ /rendezett n-esek/
  Spec: $p\in PR_0$, akkor $\Phi(p)\in\{0,1\}$ /igazságérték/
  - Pl1: F: "*piros*"$\in PR_1 \to \Phi(F)$: a piros dolgok osztálya
  - Pl2: G: "*megölte*"$\in PR_2 \to \Phi(G)$: elempárok, melyekre igaz, hogy az első megölte a másodikat

A változókat lekötő művelet az értékelés – egy értékelés mindig egy adott interpretációt követ.

DEF: **Adott interpretációhoz ($\mathfrak{I}$p) tartozó értékelés**: *ν*, *ν(x)*$\in$*U*.
Ha *ν* egy értékelés, akkor *ν[x:u]* *ν* azon módosítása, amely csak annyiban különbözik *ν*-től, hogy *x*-hez $u\in U$-t rendeli: ν[x:u](x)=ν(u) , de ν[x:u](y)=ν(y), ha x≠y.

DEF: $\mathcal{L}^1$ kifejezéseinek extenziója (vagy jelölete) adott interpretáció ($\mathfrak{I}$p) és értékelés (ν) mellett

- ha $x\in Var$, akkor $|x|_v^{Ip}=\nu(x)$ /változó extenziója/
- ha $f\in NF_n$, $t_1, ..., t_n \in Term$ és $|t_i|_v^{Ip}=u_i\in U$, és $\Phi(f):<u_1, ..., u_n>\mapsto u\in U$, akkor

  $|f(t_1)...(t_n)|_v^{Ip}=u$, Speciális esetben: $a\in NC$, akkor $|a|_v^{Ip}=\Phi(a)$
- ha $F\in PR_n$, $t_1, ..., t_n\in Term$ és $|t_i|_v^{Ip}=u_i\in U$, akkor

  $|F(t_1)...(t_n)|_v^{Ip}=1$, ha $< u_1, ..., u_n>\in\Phi(F)$; különben 0

Spec eset: $p\in PR_0$, akkor $|p|_v^{Ip}=\Phi(p)$ /atomi mondat interpretációja igazságérték/

Pl: F: "*megölte*"$\in$PR2, a: "*Káin*", b:"*Ábel*"$\in$NC $\rightarrow$ F(a)(b): "*Káin megölte Ábelt*"
$|F(a)(b)|_v^{Ip}=1$, vagyis a mondat igaz, ha a megölte interpretációjában (olyan párok, hogy az 1. megölte a 2.-at) megtalálható a (*Káin, Ábel*) elempár.

Alfred Tarski – ő dolgozta ki az $\mathcal{L}^1$ ezen halmazelméleti interpretációfogalmát. Az ő példája: "*A hó fehér, ha a hó fehér*". Ez AZ IGAZSÁG KORRESPONDENCIA-ELMÉLETE, mely szerint akkor igaz a mondat, ha a benne foglaltak megfelelnek a valóságnak.

- ha $t_1, t_2\in Term$, akkor $|(t_1=t_2)|_v^{Ip}=1$, ha $|t_1|_v^{Ip}=|t_2|_v^{Ip}$; 0 különben
- ha $A\in Form$, akkor $|(\sim A)|_v^{Ip}=1-|A|_v^{Ip}$
- ha $A, B\in Form$, akkor

  $|(A\&B)|_v^{Ip}=1$, ha $|A|_v^{Ip}=|B|_v^{Ip}=1$; különben 0

  $|(A\vee B)|_v^{Ip}=0$, ha $|A|_v^{Ip}=|B|_v^{Ip}=0$; különben 1

  $|(A\supset B)|_v^{Ip}=0$, ha $|A|_v^{Ip}=1$ és $|B|_v^{Ip}=0$; különben 1

  $|(A\equiv B)|_v^{Ip}=1$, ha $|A|_v^{Ip}=|B|_v^{Ip}$; különben 0
- ha $A\in Form$, $x\in Var$, akkor

  $|\forall xA|_v^{Ip}=0$, ha $\exists u\in U$, hogy $|A|_{v[x:u]}^{Ip}=0$; különben 1

  $|\exists xA|_v^{Ip}=1$, ha $\exists u\in U$, hogy $|A|_{v[x:u]}^{Ip}=1$; különben 0

  Pl: F:"*sárkány*", G:"*többfejű*"$\in PR_1$, x: "*Ő*"$\in$ *Var*, $(F(x)\supset G(x))$: "*Ha ő sárkány, akkor ő többfejű*"
  $\forall x(F(x)\supset G(x))$: "*Minden sárkány többfejű*"
  Interpretáció: U: *mesealakok* $\rightarrow u\in U$ $\Phi(a)=u$, a: "*Süsü*"$\in$NC
  $\Phi(a)\in\Phi(F)$ – Süsü azon dolgok közé tartozik, amik sárkányok = "*Süsü sárkány.*"
  $\Phi(a)\notin\Phi(G)$ – "*Süsü nem többfejű*"
  $|F(x)\supset G(x)|_v^{Ip}=0$, hiszen van olyan $u\in U$, hogy $|F(x)\supset G(x)|_{v[x:u]}^{Ip}=0 \rightarrow |\forall x(F(x)\supset G(x))|_v^{Ip}=0$.

TÉTEL: $\forall$ kifejezhető $\exists$ és ~ segítségével:

$$(\sim\forall xA)\Leftrightarrow\exists x(\sim A)$$

Biz: $|(\sim\forall xA)|_v^{Ip}=1 \leftrightarrow |\forall xA|_v^{Ip}=0 \leftrightarrow$ van olyan $u\in U$, hogy $|A|_{v[x:u]}^{Ip}=0 \leftrightarrow$ van olyan $u\in U$, hogy $|(\sim A)|_{v[x:u]}^{Ip}=1 \leftrightarrow |\exists x(\sim A)|_v^{Ip}=1$

KÖVETKEZMÉNY: előző negáltja: $(\sim(\sim\forall xA))\Leftrightarrow(\sim\exists x(\sim A))$, azaz $\forall x\mathbf{A}\Leftrightarrow(\sim\forall x(\sim B))$

MEGJEGYZÉS: ∃ is kifejezhető ∀ és ~ segítségével:
A helyére $(\sim B) \rightarrow (\sim\forall x(\sim B)) \Leftrightarrow \exists x(\sim(\sim B)) \rightarrow \exists x B \Leftrightarrow (\sim\forall x(\sim B))$.

Arisztotelészi kijelentések (tradicionális osztályozás)

a "*Minden ember halandó.*" (rejtett kondícionális)

$\forall x(F(x)\supset G(x)) \Leftrightarrow (\sim\exists x(\sim(F(x)\supset G(x)))) \Leftrightarrow (\sim\exists x(F(x)\&\sim G(x)))$ – nincs olyan F, hogy nem G /nem létezik olyan ember, aki nem halandó/

e "*Van vasorrú boszorkány.*"

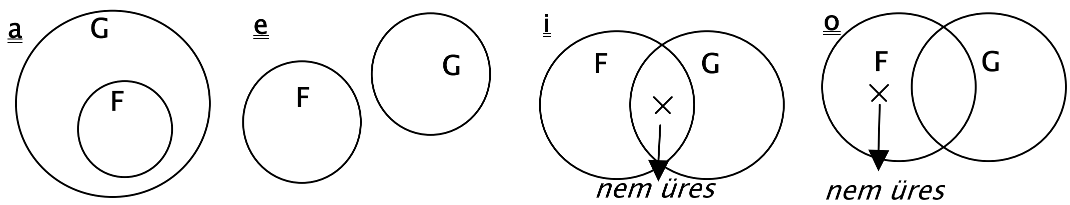
$\exists x(F(x)\&G(x)) \Leftrightarrow (\sim\forall x(F(x)\supset(\sim G(x))))$ /nem ∀ boszorkány nem vasorrú/

i "Minden madár nem emlős."

$\forall x(F(x)\supset(\sim G(x))) \Leftrightarrow (\sim\exists x(F(x)\&G(x)))$

o "Nem minden madár tud repülni." vagy "Van olyan m, ami nem tud repülni."

$(\exists x(F(x)\&(\sim G(x)))) \Leftrightarrow (\sim\forall x(F(x)\supset G(x)))$



Modell: propozícionális logikában: olyan interpretáció, ami a formula minden elemét igazzá teszi
itt azonban vannak üres változók! – ezeknek nem lesz igazságértéke

DEF: Modell: $\mathcal{M}=\langle\Im p, \nu\rangle = \langle U, \Phi, \nu\rangle$ modellje $\Gamma\subseteq$*Form*-nak, ha minden $A\in\Gamma$-ra: $|A|_{\nu}^{Ip}=1$.

DEF: $\Gamma\subseteq$*Form* kielégíthető, ha van modellje, különben kielégíthetetlen.

DEF: **Szemantikai következményfogalom**: $\Phi\subseteq$*Form*-nak szemantikai következménye $A\in$*Form* (Jelölés: $\Gamma\Rightarrow A$), ha $\Gamma\cup\{(\sim A)\}$ kielégíthetetlen (azaz minden modellje Γ-nak egyben A-nak is modellje).

QC – kvantifikációs kalkulus

Az elsőrendű logikához tartozó kalkulus.

Változás elsőrendű nyelvhez képest: konnektívumok: $\{\sim, \supset\}$ és kvantorok: $\{\forall\}$.

DEF: $x \in$ *Var* **változó szabadon fordul elő** (egy adott helyen) $A \in$ *Form*-ban, ha

- nincs közvetlenül előtte kvantor,
- nem áll rá vonatkozó kvantor hatáskörében. /kvantor hatásköre: $\forall x(\dots)$/.

Különben **kötötten fordul elő**.

DEF: **Formula zárt**, ha nem fordul elő benne változó szabadon, különben **nyitott**.

Pl:	$(F(x)\supset G(x))$	nyitott – mindkét x szabad benne
	$\forall x(F(x)\supset G(x))$	zárt
	$\forall x(F(x)\supset G(y))$	nyitott – y szabad
	$(\forall xF(x)\supset G(x))$	nyitott – x-nek van szabad előfordulása

DEF: $A \in$ *Form*, $t \in$ *Term*, $x \in$ *Var*. $A^{t/x}$: A-ban x minden szabad előfordulása helyére t-t helyettesítünk.

Pl:	A: $(F(x)\supset G(x))$	$\rightarrow A^{a/x}$: $(F(a)\supset G(a))$
	A: $\forall x(F(x)\supset G(x))$	$\rightarrow A^{a/x}$: $\forall x(F(x)\supset G(x))$

DEF: **QC axiómasémák**

A, B, $C \in$ Form, x, y, $z \in$ Var, $t \in$ Term.

(A1) $(A\supset(B\supset A))$

(A2) $(((A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C)))$

(A3) $(((\sim A)\supset(\sim B))\supset(B\supset A))$

(A4) $(\forall xA\supset A^{t/x})$

(A5) $\forall x(A\supset B)\supset(\forall xA\supset\forall xB)$

(A6) $(A\supset\forall xA)$ ha x nem fordul elő A-ban szabadon

(A7) $(x_0=x_0)$

(A8) $((x=y)\supset(A^{z/x}=A^{z/y}))$

DEF: **QC axiómái**

Itt is az axiómasémák helyettesítettjei (mint a propozícionális logikában), de itt:
ha A axióma $\rightarrow \forall xA$ is axióma.

DEF: **Levezetés QC-ben**:

$A_1, \dots A_n \in$ *Form* levezetése egy $A \in$ *Form*-nak a $\Gamma \subseteq$ *Form*-ból, ha $A_n=A$ és minden A_i-re $(i \le n)$:

- A_i axióma, vagy
- $A_i \in \Gamma$, vagy
- van A_j, A_k $(j,k<i)$, hogy $A_k=(A_j\supset A_i)$.

Ekkor A levezethető Γ-ból: **$\Gamma\vdash A$** (vagy ha nem egyértelmű, melyik logika: $\Gamma\vdash_{QC}A$).

Kontrapozíció, metszetszabály, Dedukció-tétele: itt is igaz (nem használunk bennük speciális, csak a QC-re jellemző dolgokat.)

DEF: **Elsőrendű elmélet**: $T^1 = <\mathcal{L}^1, \Gamma^1>$ /meg kell adnunk egy nyelvet és egy axiómarendszert/

Pl: **Peano-aritmetika axiómái**

Γ^p:	(P1)	$\forall x(\sim(S(x)=0))$	
	(P2)	$\forall x \forall y(\,(S(x)=S(y)) \supset (x=y))$	– *rákövetkezés szabályozása*
	(P3)	$\forall x(x+0=x)$	
	(P4)	$\forall x \forall y(x+S(y)=S(x)+y)$	– *+ szabályozása*
	(P5)	$\forall x(x*0=0)$	
	(P6)	$\forall x \forall y(x*S(y)=xy+x)$	– ** tulajdonságai*
	(P1–P6: Robinson-aritmetika)		
	(P7)	$((A^{0/x} \& \forall x(A \supset A^{S(x)/x})) \supset \forall x A)$	– *teljes indukció sémája*

Az utolsó tulajdonképpen végtelen sok axiómát jelent. A Peano-aritmetikát nem sikerült végesen axiomatizálni $\mathcal{L}^1$-ben ($\mathcal{L}^2$-ben menni fog).

Analitikus táblázatok módszere

Érvényes következtetés: {P1, P2, ...}$\cup$\{~K\} kielégíthetetlen

Nulladrendű

1. Vegyük fel a premisszákat és a konklúzió negáltját (formalizálva) egymás alá!

P_1
P_2
.
.
.
P_n
~K

2. Származékok felvétele. /származék: olyan részformula, aminek igaznak kell lennie ahhoz, hogy a teljes formula igaz legyen/

Származtatási szabályok:

$\sim\sim A \;\to\; A$

$\sim(A \vee B) \;\to\; \begin{cases} \sim A \\ \sim B \end{cases}$

$\sim(A \supset B) \;\to\; \begin{cases} A \\ \sim B \end{cases}$

$A \& B \;\to\; \begin{cases} A \\ B \end{cases}$

Elágazó szabályok:

$A \vee B \;\to\; A \mid B$

$\sim(A \& B) \;\to\; \sim A \mid \sim B$

$A \supset B \;\to\; \sim A \mid B$

$A \equiv B \;\to\; \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Big| \begin{matrix} \sim A \\ \sim B \end{matrix}$

$\sim(A \equiv B) \;\to\; \begin{cases} A \\ \sim B \end{cases} \Big| \begin{matrix} \sim A \\ B \end{matrix}$

- KF (*kifejezés*) felbontásnak sorrendje nem befolyásolja az eredményt
- egy formula származottat minden **nyitott ág**on fel kell venni
- egy ág zárt: szerepel rajta A és ~A is ⇒ nem folytatjuk az ágat; különben nyitott

3. AT (*analitikus táblázat*) kész van, ha

- minden ág lezárul ⇒ a következtetés érvényes
- ha mindent felbontottunk atomi formulákra és azok negációjára, és van nyitott ág ⇒ a következtetés nem érvényes

Pl1.

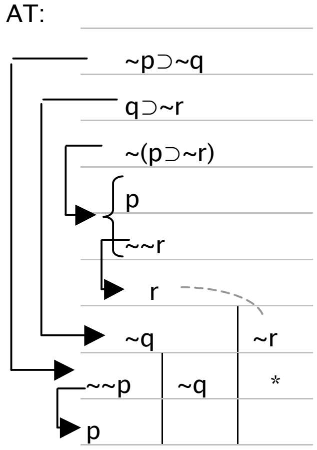
(P1)	Ha Mackó nem ebédel otthon, nem fogy el a méze.
(P2)	Ha a méz elfogy, nem tud mit vacsorázni.
(K)	Ha Mackó otthon ebédel, nem tud mit vacsorázni.

p: "Mackó otthon ebédel."
q: "Elfogy a méz."
r: "Tud mit vacsorázni."

⇒

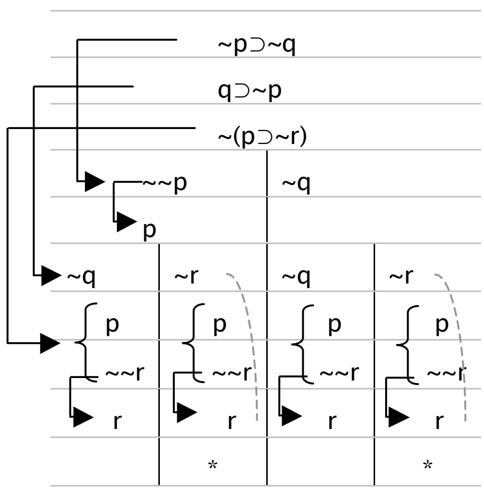
$$\frac{\begin{array}{c}{\sim}p\supset{\sim}q\\ q\supset{\sim}r\end{array}}{p\supset{\sim}r}$$

AT:



2 ág is nyitva maradt ⇒ nem érvényes a következtetés
(mindkét ágon: p, r, ~q – emiatt sérült az interpretáció)

ugyanez más felbontással:



Pl2.: "Füles születésnapi partija"

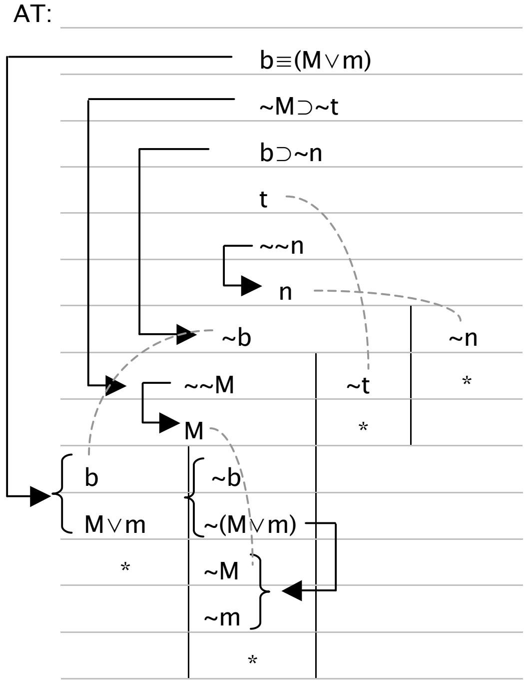
(P1)	Bagoly akkor, és csak akkor megy el a partira, ha Mackó vagy Malacka is elmegy.
(P2)	Ha Mackó nem megy el, Tigris sem megy el.
(P3)	Ha Bagoly ott lesz, Nyuszi nem megy el.
(P4)	Tigris mindenképp elmegy.
(K)	Nyuszi nem mehet el.

b: "Bagoly elmegy."
M: "Mackó elmegy."
m: "Malacka elmegy."
t: "Tigris elmegy."
n: "Nyuszi elmegy."

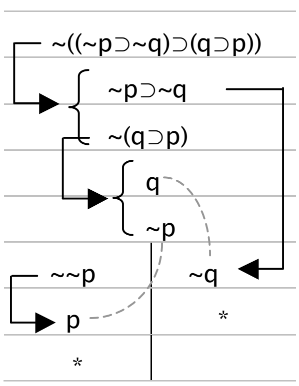
$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c} b\equiv(M\vee m) \\ \sim M\supset\sim t \\ b\supset\sim n \\ t \\ \hline \sim n \end{array}$$

AT:



Pl3: logikai igazság: $(\sim p\supset\sim q)\supset(q\supset p)$



Elsőrendű

Új származtatási szabályok:

$\forall xA$	$\sim\exists xA$	$\exists xA$	$\sim\forall xA$	$a=b$, $A^{a/x}$
$A^{a_1/x}, \ldots, A^{a_n/x}$	$\sim A^{a_1/x}, \ldots, \sim A^{a_n/x}$	$A^{a/x}$	$\sim A^{a/x}$	$A^{b/x}$

1-2.: ahol $a_1, \ldots a_n$ a már meglévő névkonstansok
3-4.: *a* új névkonstans
Pl *5*-re:

a=b
F(a)
F(b)

Egy ág zárt, ha: - A és ~A együtt szerepel
- ~(a=a) szerepel

Pl1:

(P1)	Ha Malacka mindenkit ismer, aki nagyobb nála.
(P2)	Zsebibaba nem nagyobb azoknál, akik ismerik őt..
(K)	Zsebibaba nem nagyobb, mint Malacka.

a: "Malacka"
b: "Zsebibaba"
F(x)(y): "x ismeri y-t"
G(x)(y): "x nagyobb, mint y"

⇒

∀x(G(x)(a)⊃F(a)(x))
∀x(F(x)(b)⊃~G(b)(x))
~(G(b)(a))

AT:

∀x(G(x)(a)⊃F(a)(x))		
∀x(F(x)(b)⊃~G(b)(x))		
~~(G(b)(a))		
G(b)(a)		
F(b)(b)⊃~G(b)(b)		
F(a)(b)⊃~G(b)(a)		
~F(a)(b)		~G(b)(a)
G(a)(a)⊃F(a)(a)		*
G(b)(a)⊃F(a)(b)		
~G(b)(a)	F(a)(b)	
*	*	

⇒ érvényes a következtetés

Pl5:

(P1)	Nincs olyan méhész, aki horgász.	
(P2)	Minden vadász méhész.	
(K)	Minden horgász nem vadász.	

$\sim\exists x(\ M(x)\&H(x)\ )$		
$\forall x(\ V(x)\supset M(x)\ )$		
$\sim\forall x(\ H(x)\supset\sim V(x)\ )$		
$\sim(\ H(x)\supset\sim V(x)\ )$		
$H(a)$		
$\sim\sim V(a)$		
$V(a)$		
$V(a)\supset M(a)$		
$M(a)$		$\sim V(a)$
$\sim(\ M(a)\&H(a)\ )$		*
$\sim M(a)$	$\sim H(a)$	
*	*	

Pl6:

$\sim((x=y)\supset(A^{x/z}\supset A^{y/z}))$
$(x=y)$
$\sim(A^{x/z}\supset A^{y/z})$
$A^{x/z}$
$\sim A^{y/z}$
$A^{y/z}$
*

Pl7:

$\forall x\exists yF(x)F(y)$
$\exists y(F(a)(y))$
$F(a)(b)$
$\exists yF(b)(y)$
$F(b)(c)$
$\exists yF(c)(y)$
$\vdots$

soha nem áll le:

az AT módszere nulladrendben mindig jó volt, elsőrendben nem!

A szintaxis és a szemantika viszonya

DEF: $\Gamma \subseteq Form$, $A, B \in Form$

1. – A Γ **kielégíthető**, ha van modellje: $\Im p$, ν minden $B \in \Gamma$-ra: $|B|^{Ip}_{\nu} = 1$.
   Különben **kielégíthetetlen.**

   – Γ **szemantikus következménye** A ($\Gamma \Rightarrow A$), ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen.

2. – Γ-nak **"szintaktikai következménye"** A ($\Gamma \vdash A$), ha A-nak van levezetése Γ-ból.

   – Γ **inkonzisztens**, ha bármely $B \in Form$: $\Gamma \vdash B$.
   Különben **konzisztens.**

DEF: Egy **kalkulus** egy adott szemantikára nézve:

- **helyes**, ha minden $\Gamma \subseteq$*Form* és $A \in$*Form* (azaz minden formulaosztályra és minden formulára) fennáll a következő viszony:

$$\Gamma \vdash A \rightarrow \Gamma \Rightarrow A$$

- **teljes**, ha minden $\Gamma \subseteq$*Form* és $A \in$*Form* esetén:

$$\Gamma \Rightarrow A \rightarrow \Gamma \vdash A$$

- **adekvát**, ha helyes és teljes.

TÉTEL: *Gödel teljességi tétele* (*Gödel, 1930*)

A QC (kvantifikációs kalkulus) az elsőrendű szemantikára nézve adekvát.

Biz:

I. Helyesség: $\Gamma \vdash A \rightarrow \Gamma \Rightarrow A$

1. A azért szerepel a levezetésben, mert ő (elsőrendű) logikai axióma.

Áll.: Ekkor $\{\sim A\}$ kielégíthetetlen. $\rightarrow$ $\Gamma \cup \{\sim A\}$ is kielégíthetetlen.

(A1):

$\sim(A \supset (B \supset A))$

A

$\sim(B \supset A)$

B

$\sim A$

$*$

$\Rightarrow$ tehát $\sim$(A1) tényleg kielégíthetetlen.

(A2)

$\sim((A\supset(B\supset C)) \supset ((A\supset B)\supset(A\supset C))$

$(A\supset(B\supset C))$

$\sim((A\supset B)\supset(A\supset C))$

$A\supset B$

$\sim(A\supset C)$

A

$\sim C$

$\sim A$	B		
*	$\sim A$	$B\supset C$	
	*	$\sim B$	C
		*	*

(A3) $\sim((\sim A\supset\sim B)\supset(B\supset A))$– már volt

(A4)

$\sim(\forall xA\supset A^{t/x})$

$\forall xA$

$\sim A^{t/x}$

$A^{t/x}$

*

(A5)

$\sim(\forall x(A\supset B) \supset (\forall xA\supset\forall xB))$

$\forall x(A\supset B)$

$\sim(\forall xA\supset\forall xB)$

$\forall xA$

$\sim\forall xB$

$\sim B^{a/x}$

$A^{a/x}$

$A^{a/x}\supset B^{a/x}$

$\sim A^{a/x}$	$B^{a/x}$
*	*

(A6)

$\sim(A\supset\forall xA))$ ha A-ban x nem fordul elő szabadon

A

$\forall xA$

$\sim A$

*

(A7) $\sim(x_0=x_0)$ *

(A8) $\sim((X=Y)\supset(A^{x/z}\supset A^{y/z}))$ – már láttuk

Így beláttuk, hogy az axiómák ellentétei kielégíthetetlenek.

2. A azért szerepel a levezetésben, mert $A\in\Gamma$.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \hline A \\ \hline \vdots \end{array}\right\}\Gamma$$

$$\begin{array}{cl} \sim A & \text{hiszen azt vizsgáljuk, vajon } \Gamma\Rightarrow A\ ? \\ * & \end{array}$$

3. A azért szerepel a levezetésben, mert MP-szel kaptuk;

korábban szerepelt B ill. $B\supset A$

$\rightarrow$ Tudjuk, hogy (1) $\Gamma\Rightarrow B$

(2) $\Gamma\Rightarrow(B\supset A)$

a) Tfh. Γ kielégíthetetlen $\rightarrow$ kérdés: $\Gamma\Rightarrow A$?

$\rightarrow$ $\Gamma\cup\{\sim A\}$ is kielégíthetetlen lesz $\rightarrow$ $\Gamma\Rightarrow A$

b) Ha Γ kielégíthető $\rightarrow$ az AT-nak (analitikus táblázatnak) lesz nyitott, és befejezett ága

(1) feltétel miatt $\rightarrow$ legyen ez egy befejezett ág:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\}\ \Gamma \text{ és származékai} \\ \sim B \quad \text{mert } \Gamma\Rightarrow B \\ \ \ * \end{array}\right\}\Rightarrow \text{korábban szerepel valahol B}$$

(2) feltétel miatt

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \hline B \\ \hline \vdots \end{array}\right\}\Gamma \text{ és származékai}$$

$$\begin{array}{cl} \sim(B\supset A) & \\ B & \\ \sim A & \\ * & \text{lezárul, mert } \Gamma\Rightarrow(B\supset A) \end{array}$$

lezárult $\Rightarrow$ szerepelt korábban ~B vagy A

De! ~B nem lehet, mert akkor az ág már korábban lezárult volna

$\Rightarrow$ korábban szerepel A

Azaz A és B is szerepel Γ származékai között.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ B \\ \vdots \\ A \\ \vdots \end{array}\right\}\Gamma \text{ és származékai}$$

$$\begin{array}{cl} \sim A & \rightarrow\ \Gamma\Rightarrow A \\ * & \end{array}$$

Δ

II. Teljesség: $\Gamma \Rightarrow A \rightarrow \Gamma \vdash A$

Bizonyítás lépései:

1. T_1: Ha Γ konzisztens (szintaktikai fogalom), akkor az AT-nak (szemantikai módszer) van nyitott és befejezett ága.
2. T_2: Ha Γ AT-nak van nyitott és befejezett ága, akkor Γ kielégíthető.
3. Ha Γ konzisztens, akkor kielégíthető.
4. (3-at kontraponálva $\Rightarrow$) Ha Γ kielégíthetetlen, akkor inkonzisztens.
5. Ha $\Gamma\cup\{\sim A\}$ kielégíthetetlen ($\Gamma \Rightarrow A$), akkor $\Gamma\cup\{\sim A\}$ inkonzisztens.
6. T_3: Ha $\Gamma\cup\{\sim A\}$ inkonzisztens, akkor $\Gamma \vdash A$.
7. Ha $\Gamma \Rightarrow A$ (5)(6)$\rightarrow$ $\Gamma \vdash A$.

Már csak T_1, T_2 és T_3-at kell belátnunk!

T_3: Az állítás bikondícionálisát fogjuk belátni!

$\Gamma\cup\{\sim A\}$ inkonzisztens $\leftrightarrow$ $\Gamma \vdash A$

Biz: $\leftarrow$:

1.	$\{\sim A, \sim B\} \vdash \sim A$
2. KP 1:	$\{\sim A, A\} \vdash B$
3. DT:	$\{A\} \vdash \sim A \supset B$
4. feltétel:	$\Gamma \vdash A$
5. MSZ 3-4:	$\Gamma \vdash \sim A \supset B$
6. DT:	$\Gamma\cup\{\sim A\} \vdash B$

7. mivel B tetszőleges lehet, definíció szerint:

$\Gamma\cup\{\sim A\}$ inkonzisztens

$\rightarrow$: $\Gamma\cup\{\sim A\}$ inkonzisztens $\Rightarrow$ bármi levezethető belőle

1.	$\Gamma\cup\{\sim A\} \vdash A$
2. DT:	$\Gamma \vdash \sim A \supset A$
3. MP:	$\{\sim A, \sim A \supset A\} \vdash A$
4. KP:	$\{\sim A, \sim A\} \vdash \sim(\sim A \supset A)$
5.	$\{\sim A\} \vdash \sim(\sim A \supset A)$
6. KP:	$\{\sim A \supset A\} \vdash A$
7. MSZ: 2-6	$\Gamma \vdash A$ Δ

T_1: Γ konzisztens $\rightarrow$ az AT-nak van nyitott és befejezett ága

ST_1: Ha Γ konzisztens, és $\Gamma \vdash A$ $\rightarrow$ $\Gamma\cup\{A\}$ is konzisztens. (Azaz konzisztens formulaosztály konzisztensen bővíthető a belőle következő formulákkal.)

$\leftrightarrow$ Ha $\Gamma\cup\{A\}$ inkonzisztens, és $\Gamma \vdash A$, akkor Γ inkonzisztens

Biz: Tfh. $\Gamma\cup\{A\}$ inkonzisztens.

1.	$\Gamma\cup\{A\} \vdash B$ (mert bármi levezethető belőle)
2. DT:	$\Gamma \vdash A \supset B$
3. feltétel	$\Gamma \vdash A$
4. MP 2,3:	$\Gamma \vdash B$

Mivel B tetszőleges $\Rightarrow$ Γ inkonzisztens. Δ

ST2: Ha Γ konzisztens, és A analitikus származéka (= AT-ban származéka) B∈Γ-nak, akkor Γ∪{A} konzisztens.

Biz: (végig kell nézni az analitikus táblázat származtatási szabályait)

a) $\sim\sim A$ ▶ A

$\sim\sim A \vdash A$ (tudjuk)

$\{\sim\sim A\} \cup \{A\}$ konzisztens (ST1)

⇒ A-val konzisztensen bővíthető ST1 miatt

b) $\sim(A \supset B)$ ▶ $\begin{cases} A \\ \sim B \end{cases}$

i) A esete

1. a) lev. szabály
2. $\{\sim A, \sim B\} \vdash \sim A$
3. KP: $\{\sim A, A\} \vdash B$
4. DT: $\{\sim A\} \vdash A \supset B$
5. KP: $\{\sim(A \supset B)\} \vdash \sim\sim A$
6. MSZ 5,1: $\{\sim(A \supset B)\} \vdash A$

ii) ~B esete

1. A1: $\vdash B \supset (A \supset B)$
2. DT: $B \vdash A \supset B$
3. KP: $\sim(A \supset B) \vdash \sim B$

c) $\forall x A$ ▶ $\begin{cases} A^{a_1/x} \\ \vdots \\ A^{a_n/x} \end{cases}$

1. A4: $\vdash \forall x A \supset A^{t/x}$ minden létező terminussal
2. DT: $\forall x A \vdash A^{t/x}$

⇒ ha levezethető belőle, akkor vele konzisztensen bővíthető

d) $\begin{cases} a=b \\ A^{a/x} \end{cases}$ ▶ $A^{b/x}$

1. A8: $\vdash (a=b) \supset (A^{a/x} \supset A^{b/x})$
2. $(a=b) \vdash A^{a/x} \supset A^{b/x}$
3. $\{(a=b), A^{a/x}\} \vdash A^{b/x}$

⇒ ST1 miatt vele konzisztensen bővíthető

e) $\sim\forall x A$ ▶ $\sim A^{a/x}$

"a" új névkonstans

→ $\sim A^{a/x}$ nem tud semminek ellentmondani

→ lehet vele konzisztensen bővíteni

f) $A \supset B$ ▶ $\sim A \mid B$

Áll. átfogalmazása: a bővítés után legalább az egyik ágon konzisztens marad

Tfh. $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens → T3: $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash A \supset B$ (mivel ő premissza, azaz "$A \supset B$"$\in \Gamma$) → $\Gamma \vdash B$

⇒ ST1 miatt vele is konzisztensen bővíthető. △

T2: Ha Γ AT-nak van nyílt és befejezett ága, akkor Γ kielégíthető.

Biz: Így van.

■

Alternatív logikák

Természetes levezetés /*Genzten 1934*/ – nem alternatív logika

Axiómák csökkentése – levezetési szabályok növelése

Genzten 0-ra redukálta az axiómák számát.

nullad-rendű logika:

(G0) Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$

(G1) Ha $\Gamma \vdash A \supset B$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$

(G2) Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$

(G3) Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ és $\Gamma \cup \{A\} \vdash \sim B$, akkor $\Gamma \vdash \sim A$

(G4) Ha $\Gamma \vdash \sim\sim A$, akkor $\Gamma \vdash A$

(G5) Ha $\Gamma \vdash \forall x A$, akkor $\Gamma \vdash A^{t/x}$

(G6) Ha $\Gamma \vdash A^{t/x}$ és x nem fordul elő szabadon Γ elemeiben, akkor $\Gamma \vdash \forall x A$

(G7) Ha $\Gamma \vdash A^{t/x}$, akkor $\Gamma \cup \{s=t\} \vdash A^{s/x}$

(G8) Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash \sim(t=t)$, akkor $\Gamma \vdash \sim A$

Intuicionista logika

Megalkotója egy konstruktivista: *Brouwer, Hegting*

Jellemzői: – nem léteznek végtelen objektumok (*finitista logikusok*: elvetik a végtelent)

– tétel illetve annak negácjója más értelemben szerepel:
A: bizonyítható (=valaki már bizonyította)
~A: cáfolható (=valaki valamikor már cáfolta is)

– nem érvényes a kizárt harmadik elve !!!
$\nvdash A \vee \sim A$ – intuicionista logikának nem tétele
pl.: egy tételt még senkinek nem sikerült bizonyítania, de cáfolni sem.
Gödel tétele ⇒ valamit nem lehet sem bizonyítani, sem cáfolni
⇒ nem klasszikus logika

– nincs indirekt bizonyítás (nincs G4!)
$\nvdash \sim\sim A \supset A$

– De-Morgen szabályok sem érvényesek (ahhoz kéne a kettős negáció törlése)

– univerzális és egzisztenciális kvantor közötti kapcsolat ?

Kevesebb dolgot tudunk bizonyítani, mint a klasszikus logikában (halmazelmélet kiesik), azonban sokkal biztosabb alapokon áll! (Kevesebbet tudunk, de azt sokkal jobban!)

Gentzen ehhez dolgozott ki tételeket. (Ez szigorúbb, mint a *Hilbert-féle kalkulus*.)

Ma is sokan foglalkoznak intuicionista logikával. Támadói azzal érvelnek, hogy az int. logika a klasszikus logika része, töredéke; minden, amit ebben be tudunk látni, azt a klasszikusban is. Az int. logika hívei szerint amit itt bizonyíthatunk: biztosabb, és itt a logikai jeleknek más a jelentése – ezért sem lehet ez a klasszikus logika része.

Értékréses logika

Deskripció problémája: határozott individuum leírása, pl.: "*Brutus apja*", "*Rózsa Sándor lova*". Eddig ezt függvényekkel és névfunktorokkal oldottuk meg (pl.: f(a)).

Sokan bizalmatlanok voltak a névfunktorokkal szemben → helyette predikátumok.
2 argumentumú predikátum: **A(x)(y)**: "*x apja y-nak*", **b**: "*Brutus*"
A(x)(b): " Brutus apja ", nyitott mondat: még nem tudjuk, kicsoda
I – **deskriptor**: logikai operátor; leköti a változókat: nevet csinál egy nyitott mondatból:
IxA(x)(b) – "*az, aki Brutus apja*"

Ezzel kapcsolatban probléma: minden nyitott mondat elé odatehetjük, de nem biztos, hogy értelmes is lesz:

Pl1: **B(x)(y)**: "*x barátja y-nak*", **a**: "*Nyuszi*"
IxB(x)(a) – "*az, aki Nyuszi barátja*"
De Nyuszinak sok barátja van → nem nevezhetünk meg 1 meghatározott személyt (jó lenne, ha csak 1 barátja lenne.)

Pl2: Ix | x= $\sqrt{Ceasar}$: "*Ceasar gyöke*" – ilyen egyáltalán nincs

Pl3: *Bertrand Russel* példája:

K(Ix Frk(x)) "*Franciaország jelenlegi királya kopasz.*"

Kérdés: igaz-e? Ha hamis (mondván, hogy Franciaországnak nincs királya), akkor a mondat ellentéte ("*Franciaország jelenlegi királya nem kopasz.*") is hamis lesz. H feltesszük, hogy igaz (nem létező személyre minden igaz), akkor hasonló a helyzet. ⇒ A=~A – ez pedig nem teljesülhet

Russel szerint ezek a mondatok "többet állítanak, mint amennyit állítani tűnnek". Ezeket nevezte (**határozott) logikai individuumleírás**nak:

$\exists x($ Frk(x) & $\forall y$ (Frk(y)$\supset$x=y) & K(x))
tagadás: $\exists x($ Frk(x) & $\forall y$ (Frk(y)$\supset$x=y) & ~K(x))

Pl4: "*Annyira szeretem a Trabantom, hogy nem cserélném el a világ leggyorsabb autójára sem.*"
nem állítom, hogy van a világon leggyorsabb autó

⇒ a határozott individuumleírásoknak nincs igazságértéke! – ez az **értékrés**, **értékréses mondatok**

Többértékű logikák

Nem csak két igazságérték van!

1. **Háromértékű** (*Łukasievitz* – megpróbálta modernizálni az antik logikát)

   Arisztotelész: **tengeri csata problémája** (híres filozófiai probléma)
   Athén, Peloponnészoszi háború, nem tudjuk, hogy holnap lesz-e tengeri csata, avagy sem.
   "*Holnap tengeri csata lesz.*"
   olcsó válasz: még nem tudjuk, hogy igaz, vagy hamis, majd holnap kiderül.

   "A mondatokat tények teszik igazzá és hamissá." Eszerint már most van olyan tény, ami ezt igazzá vagy hamissá teszi. → Determinizált: eszerint minden jövőbeli dolog előre meg van határozva.

   Łukasievitz szerint nem igaz, hogy minden vagy igaz, vagy hamis → bevezette a 3. igazságértéket:

   1 – igaz **0 – hamis** **½ – eldöntetlen**

   Nála minden jövőre vonatkozó állítás: eldöntetlen.

   $i=0, \frac{1}{2}, 1$ $|{\sim}A|=1-|A|$

   $i=\frac{1}{2} \Rightarrow |A|=\frac{1}{2} \rightarrow |{\sim}A|=\frac{1}{2}$

   $|A|=\frac{1}{2}, |B|=\frac{1}{2}$ $|A \vee B|=\frac{1}{2}$?

   $|A \vee {\sim}A|=\frac{1}{2}$?

2. **Végtelen értékű logika** /*Carnapp*/

   A kifejezi e eseményt, $Pr(e)=p \rightarrow |A|=p$

Másodrendű logika /*Frege*/

$R(x)(y)$: "*x szülője y-nak*" → $S(x)(y)$: "*x őse y-nak*"
$S(x)(y) \Leftrightarrow y\ R(x)(y) \vee \exists z(R(x)(z)\ \&\ R(z)(y) \vee \exists z_1,z_2\ (R(x)(z_1)\ \&\ R(z_1)(z_2)\ \&\ R(z_2)(y)) \vee \ldots)$
– végtelen lesz a formula

Her_F: az F tulajdonság öröklődő

$Her_F \Leftrightarrow \forall x \forall y\ (F(x)\&R(x)(y)) \supset F(y))$
Ezzel definiáljuk az "őse"-t (S): $S(x)(y) \Leftrightarrow \forall \phi\ ((Her_\phi\ \&\ \phi(x)) \supset \phi(y))$

Predikátumváltozók: $Var_p^n = \{\phi_0^n, \phi_1^n, \phi_2^n \ldots\}$

Szemantika: (interpretáció): $\Im p$ – változatlan; (értékelés): v: $v(\phi^n) \subseteq U^n$

Új kiszámítási szabályok:

– Ha $\phi \in Var_p^n$, $t_1, ..., t_n \in$ *Term* és $|t_i|_v^{Ip} = u_i \in U$, akkor

$|\phi(t_1)...(t_n)|_v^{Ip} = 1$, ha $<u_1, ..., u_n> \in v(\phi)$, különben 0.

– Ha $\phi \in Var_p^n$, és $A \in Form$, akkor

$|\forall x \phi A|_v^{Ip} = 0$ ha van olyan $K \in U^n$, hogy $|A|_{v[\phi:K]}^{Ip} = 0$, különben 1.

Új kiszámítási szabály:

$\forall P \forall Q\ (P \supset (Q \supset P))$

Peano-aritmetika: $\forall P(P^{0/x}\ \&\ \forall y(P^{y/x} \supset P^{S(y)/x}))\supset \forall xP$ – teljes indukció

Az azonosság definiálható:

$a=b \Leftrightarrow \forall \phi((\phi(a)\supset \phi(b))\&(\phi(b)\supset\phi(a)))$

(Leibnicz-elv: ha 2 dolognak azonos tulajdonságai vannak, akkor ők azonosak

(A9) $\forall \phi A \supset A^{F/x}$

A másodrendű logika helyes, de nem teljes:

$\Gamma \Rightarrow_2 \not\Rightarrow A\ \Gamma \vdash_2 A$

Sokan elvetik a másodrendű, illetve magasabb rendű logikákat.

(Harmadrendű: megengedjük tulajdonságok tulajdonságát: Her(F), negyedrendű: ezek helyett is változók és kvantifikációk)

Típuselméleti logika

Típus-megkülönböztetéseken keresztül magába foglalja az összes sokadrendű logikát

Ez sem teljes (sőt, még kevésbé teljes)

Modális logikák

Olyan szavak logikai jelentését vizsgálja, mint lehetséges, szükségszerű.

Arisztotelész: **aktuális** ↔ **potenciális** (a változásokat próbálta ezek bevezetésével "kezelni")

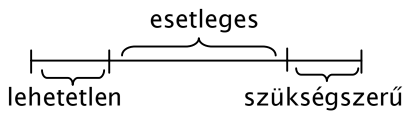
"*Most állok.*" "*Most ülök.*" – ha állok, az "*ülök*" potenciális tulajdonságom → változás: amikor a potenciálisból aktuális lesz.

Vannak nem potenciális tulajdonságok: nem realizálhatók (pl.: "*háromlábú vagyok*", "*prímszám vagyok*"); valamint vannak olyan tulajdonságok, melyekkel nem lehetséges, hogy ne rendelkezzem (pl.: Arisztotelésznél az ember egyik fő tulajdonsága: "*racionális*") – ezekkel szükségszerűen rendelkeznem kell. Ha megszűnnék ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezni: megszűnnék önmagammal azonos lenni. Ezeket nevezzük **lényegi tulajdonságok**nak → **esszencializmus**.

A következő összefüggéseket Arisztotelész is észrevette:

Szükségszerű, hogy A = nem lehetséges, hogy nem A. (pl.: "Racionális vagyok.")

Lehetséges, hogy A = nem szükségszerű, hogy nem A.



Arisztotelész ezen kívül még két modális szóval foglalkozott:

Lehetetlen, hogy A = nem lehetséges, hogy A.

Esetleges (kontingens), hogy A = lehetséges, hogy A, de nem szükségszerű, hogy A.
= lehetséges, hogy A és lehetséges, hogy nem A.

Jelölések:

Lehetséges, hogy A:	$\Diamond A$	$\Diamond A \Leftrightarrow \sim\Box\sim A$
Szükségszerű, hogy A:	$\Box A$	$\Box A \Leftrightarrow \sim\Diamond\sim A$

(A kalkulusban elég lesz az egyik – a másikkal ki lehet fejezni.)

Mire vonatkoznak?

"de re" megközelítés (dolgokra vonatkozó)

azon álláspont, mely szerint ezek a fogalmak a világ részei

"de dicto" megközelítés (kijelentésekre)

empiristák: szerintük mindent tapasztalunk, így a világ részei nem lehetnek, hiszen soha nem tapasztalunk szükségszerűséget vagy lehetőséget – ezt az elme teszi hozzá a tapasztalt dolgokhoz. (Pl. az elmém csak úgy gondolja bizonyos dolgokról, hogy az szükségszerű, vagy ha valaha tapasztalom: az lehetséges.)

"de re" " ⟷ **de dicto"**

$\Box,\Diamond$ nyitott mondat előtt is állhat — $\Box,\Diamond$ csak zárt mondatokelőtt

"*Minden ember racionális.*"

(E(x) – "*x ember*", R(x) – "*x racionális*")

$\forall x(E(x)\supset\Box R(x))$ — $\Box\forall x(E(x)\supset R(x))$

"*Minden ember lehet miniszterelnök.*"

$\forall x(E(x)\supset\Diamond R(x))$ — $\Diamond\forall x(E(x)\supset R(x))$

ez azt jelenti, hogy mindenki egyszerre M.e.

$\Rightarrow$ "de re"-ben árnyaltabban fogalmazhatunk, viszont ebben komoly, technikai problémák lesznek.

Probléma: a modális kifejezések sokféleképpen értelmezhetők

Modális kalkulusok /*Clerance Irwin Lewis* – az első modális kalkulus/

Ötlet: adott az elsőrendű kalkulus: egészítsük ki, terjesszük ki

$\mathcal{L}^1 = \langle Log, Var, Con, Term, Form \rangle$

Log = {~, ⊃, ∀, =, (,), □} – új elem: szükségszerű

Modális axiómák:

(A1) $A\supset(B\supset A)$

(A2) $(A\supset(B\supset C))\supset((A\supset B)\supset(A\supset C))$

(A3) $(\sim A\supset\sim B)\supset(B\supset A)$

(m0) $\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$ – modus ponens jól alkalmazhatóságához kell

K rendszer – leggyengébb modális kalkulus

(m1) $\Box A\supset\sim\Box\sim A$

T⁰ rendszer

(m2) $\Box A\supset A$

T rendszer

(m4) $\Box A\supset\Box\Box A$ – a modális jelek szaporíthatók

S4 rendszer (Lewis-féle kalkulus)

(m5) $\sim\Box\sim\Box A\supset\Box A$

/$\sim\Box\sim\Box$ = lehetséges hogy szükségszerű – ha a szükségszerűség lehetősége fennáll – szükségszerű lesz/

S5 rendszer (Lewis-féle kalkulus)

T^0: **"deontikus" logika** (erkölcsi szabályokon alapul)

$\vdash\Box A\supset\Diamond A$, $\nvdash\Box A\supset A$

Értelmezés: $\Box A$: egy törvény előírja, hogy A (Lehetséges: a törvény lehetőséget biztosít rá.)

De! Nem lehet tétel: $\nvdash\Box$Nem öl(a) $\supset$ Nem öl(a).
"*Attól, hogy a törvény előírja, hogy ne öljek, még gyilkolhatok.*"
$\vdash$Nem öl(a) $\supset\sim\Box\sim$Nem öl(a).
"Ha valamit előírnak, azt nem lehet megtiltani."

T: **"alethikus" modalitás** (görögül "*aletha*" = igazság)

$\vdash\Box A\supset A$

$\vdash\sim A\supset\sim\Box A$ (KP)

$\vdash B\supset\sim\Box\sim B$

$\vdash\Box A\supset\Diamond A$ $\Rightarrow$ T magába foglalja T^0-t is $\Rightarrow$ ez erőseb rendszer.

Értelmezés: szükségszerű = természeti törvénynek igazzá kell tennie
"*Minden tömeggel rendelkező testre gravitáció hat.*"
$\Box\forall x$(Tömege van(x)$\supset$Gravitál(x))
"*Minden ember halandó.*"
$\Box\forall x(E(x)\supset H(x))$

S4 – Gödel

$\vdash\Box A\supset\Box\Box A$ (T-ben: $\vdash\Box A\supset A$, A helyére $\Box B\rightarrow\vdash\Box\Box B\supset\Box B$)

$\Rightarrow$ $\Box\Box=\Box$ – a szükségszerűségnek nincsenek fokozatai

(KP, A helyére ~B)	$\vdash\sim\Box\Box A \supset \sim\Box A \Rightarrow$
	$\vdash\sim\Box\Box\sim B \supset \sim\Box\sim B \Rightarrow (\Box\sim=\sim\Diamond)$
	$\vdash\sim\Box\sim\Diamond B \supset \Diamond B \Rightarrow (\sim\Box\sim=\Diamond)$
	$\vdash\Diamond\Diamond B \supset \Diamond B$
$(\vdash\Box\Box B\supset\Box B \Rightarrow)$	$\vdash\sim\Box B \supset \sim\Box\Box B \Rightarrow$
	$\vdash\sim\Box\sim A \supset \Box\Box\sim A \Rightarrow$
	$\vdash\Diamond A \supset \sim\Box\sim\Diamond A \Rightarrow$
	$\vdash\Diamond A \supset \Diamond\Diamond A \quad \Rightarrow \Diamond\Diamond=\Diamond$

Értelmezés: $\Box A$: matematikailag bizonyítható, hogy A.

S5:

(T-ben: $\vdash\Box A\supset A$, A helyére $\Diamond B$) $\Rightarrow$

$\vdash\Box\Diamond B \supset \Diamond B \Rightarrow$ (KP)

$\vdash\sim\Diamond B \supset \sim\Box\Diamond B \Rightarrow$ (B helyére ~C)

$\vdash\sim\Diamond\sim C \supset \sim\Box\Diamond\sim C \Rightarrow (\sim\Diamond\sim=\Box,\ \Diamond\sim=\sim\Box)$

$\vdash\Box C \supset \sim\Box\sim\Box C\ (\sim\Box\sim=\Diamond) \Rightarrow$

$\vdash\Box C \supset \Diamond\Box C$

Másik irány:	$\vdash\Diamond\Box A \supset \Box A \Rightarrow$
	$\vdash\sim\Box A \supset \sim\Diamond\Box A \Rightarrow$
	$\vdash\sim\Box\sim B \supset \sim\Diamond\Box\sim B \Rightarrow$
	$\vdash\Diamond B \supset \sim\Diamond\sim\Diamond B \Rightarrow$
	$\vdash\Diamond B \supset \Box\Diamond B$

$\Rightarrow$ mindig a 2. modális operátor "kerül ki nyertesen a buliból" – a különböző modális operátorok iterálása felesleges.

Értelmezés: $\Box A$: A analitikusan igaz $\rightarrow$ a benne szereplő szavak miatt igaz a logikai tétel. (empirista megközelítés)

Elsőrendű propozícionális modális logika

Az előzőeket kiegészítjük elsőrendűvé:

+ (A4)-(A8)
+ modus ponens
+ **univerzális generalizáció** (Ha A axióma $\Rightarrow \forall xA$ is axióma)
+ **modális generalizáció** törvénye (Ha A axióma $\Rightarrow \Box A$ is axióma)

Sok ránézésre ellentmondásos eredményt kapunk:

Paradoxonok:

I. "azonosság paradoxona":

(1)	(A8)	$\vdash(a=b) \vdash (A^{a/x} \supset A^{b/x})$
(2)	helyettesítés: $A \rightarrow \Box(a=x)$	$(a=b) \vdash (\Box(a=a) \supset \Box(a=b))$
(3)	DT 2:	$\{(a=b)\} \vdash \Box(a=a)\supset\Box(a=b)$
(4)	DT 3:	$\{(a=b),\Box(a=a)\} \vdash \Box(a=b)$
(5)	DT 4:	$\{\Box(a=a)\} \vdash (a=b) \supset \Box(a=b)$
(6)	(A7) modális generalizáltja	$\vdash\Box(a=a)$
(7)	MSZ 5,6:	$\vdash(a=b) \supset \Box(a=b)$

ez minden modális logikában fennáll.

Miért paradoxon?

Pl.: a: "*Bill Gates*", b:"*a világ leggazdagabb embere*", IxF(x) "*a leggazdagabb ember*"

a=Ix(F(x)) ⊃ □(a=IxF(x)) – "*szükségszerű, hogy ő a világ leggazdagabb embere*" – nem igaz.

II. "kvantorparadoxon"

(1)	(A5)	$\vdash \forall xA \supset A^{t/x}$
(2)		$\vdash \sim A^{t/x} \supset \sim \forall xA$
(3)	A helyére ~B	$\vdash B^{t/x} \supset \sim \forall xB$
(4)	~∀x~B=∃xB	$\vdash B^{t/x} \supset \exists xB$
(5)	B helyére □C	$\vdash \Box C^{t/x} \supset \exists x \Box C$

Pl.: a: "legnagyobb természetes szám", G(y): "nincs y-nál nagyobb szám"

$\Box G(a) \supset \exists x \Box G(x)$

ha szükségszerű, hogy a legnagyobbnál nincs nagyobb → létezik olyan, aminél szükségszerűen nincs nagyobb – ez nem igaz.

A modális logika **intenzionális**: a bemenetek extenziója nem határozza meg egyértelműen a kimenetek extenzióját.

Pl.: □*Nő*(*Shelley felesége*)

(A8) *Shelley felesége = Frankenstein írója*

⇒ □*Nő*(*Frankenstein írója*) – ez sem igaz.

Pl2: □(*9>7*)

9=Naprendszer bolygóinak száma

⇒ *Naprendszer bolygóinak száma > 7* – hülyeség

⇒ a modális logika intenzionális.

A modális logika hibáinak kijavításával sokan foglalkoztak – ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

Kvázi-szemantika /*Carnap*/ – nulladrend

állapotleírás: atomi mondatok egy interpretációja

□A : A minden állapotleírásban igaz (→logikai igazság)

◇A: van olyan állapotleírás, ahol A igaz

Kripke 1 – nulladrendű

Lehetséges világ: állapotleírás, nem csak lehetséges világok – azok közötti relációk is

A lehetséges világok halmazát rendezzük: R – alternatív reláció:

wRw' = w' alternatívája a w-nek (w látja a w'-t)

Struktúra:

S=<W, R> W lehetséges világok osztálya, R⊆W

Interpretáció:

$\mathfrak{I}_p$=*<W, R, Φ>* Φ: ha p∈At, akkor Φ(p)⊆W

Nyelv:

$\mathscr{L}^{pm}$ = <*Log, At, Form*>

Log = {~, ⊃, □, (,)}
At = {p0, p1, p2...}
Form: – p1∈*Form*
– ha A∈*Form*, akkor (~A), (□A)∈*Form*
– ha A, B∈*Form*, akkor A⊃B∈*Form*
és más nincs.

Szabályok:

- $|pi|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow w \in \Phi(pi)$
- $|{\sim}A|_w^{Ip} = 1 - |A|_w^{Ip}$
- $|A \supset B|_w^{Ip} = 0$, ha $|A|_w^{Ip} = 1$ és $|B|_w^{Ip} = 0$
- $|\Box A|_w^{Ip} = 0$, ha van olyan lehetséges világ: w', amire: wRw' és $|A|_{w'}^{Ip} = 0$ (azaz van olyan lehetséges világ, amit ő lát, és ott hamis)

$|\Box A|_w^{Ip} = 0 \leftrightarrow \exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |A|_{w'}^{Ip} = 0) \Leftrightarrow |\Box A|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow {\sim}\exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |A|_{w'}^{Ip} = 0) \Leftrightarrow$

$|\Box A|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow {\sim}\exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; {\sim}(|A|_{w'}^{Ip} = 1)) \Leftrightarrow |\Box A|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow {\sim}\exists w'\text{: } (wRw' \supset |A|_{w'}^{Ip} = 1) \Leftrightarrow$

$|\Box A|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow \forall w'\text{: } (wRw' \supset |A|_{w'}^{Ip} = 1)$, tehát igaz, ha minden olyan világban, amit ő lát igaz.

$|{\sim}\Box A|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow \exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |A|_{w'}^{Ip} = 0)$ A helyére ~B ⇒ $|{\sim}\Box{\sim}B|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow \exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |{\sim}B|_{w'}^{Ip} = 0)$ ⇔ $|\Diamond B|_w^{Ip} = 1 \leftrightarrow \exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |B|_{w'}^{Ip} = 1)$, azaz B lehetséges, ha van olyan lehetséges világ, amelyet látunk, és ahol igaz.

DEF: Γ⊆Form **kielégíthető**, ha van olyan w és $\mathfrak{I}_p$, hogy minden $A_i \in \Gamma$: $|A_i|_w^{Ip} = 1$.

DEF: **Γ⊨A**, ha Γ∪{~A} **kielégíthetetlen**. (Γ∪{~A} – világrelatív, az egész rendszerre érvényes)
∅⊨A: **"⊨A" – tétel.**

TÉTEL: R reflexív ⇔ ⊨□A⊃A

Biz: ⇒: Tfh. R reflexív /↔ ∀w(wRw)/ ⇒ ⊨□A⊃A (K logika (m1) axiómája)
Tfh. $|\Box A|_w^{Ip} = 1$, kérdés: $|A|_w^{Ip} = 1$ lesz-e?
$|\Box A|_w^{Ip} = 1 \Rightarrow \forall w'\text{: } (wRw' \supset |A|_w^{Ip} = 1)$, de wRw ⇒ tehát $|A|_w^{Ip} = 1 \Rightarrow |\Box A \supset A|_w^{Ip} = 1$ – a világnak nem használtuk ki speciális tulajdonságát ⇒ ⊨□A⊃A

⇐: ⊨□A⊃A ⇒ R reflexív
Tfh. R nem reflexív /∃w: ~(wRw)/ ⇒ $|p_0|_w^{Ip} = 0$, 1 mindenhol máshol ⇒ $\sim\exists w'\text{: } (wRw' \;\&\; |p_0|_{w'}^{Ip} = 0) \Rightarrow$ minden világban, amit lát, p_0 igaz ⇒ $|p_0|_w^{Ip} = 1 \Rightarrow |\Box p_0 \supset p_0|_w^{Ip} = 0$ ⇒ ⊭□A⊃A ellentmondás! ■

TÉTEL: R szimmetrikus $\Leftrightarrow \vDash A \supset \Box\Diamond A$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh. R szimmetrikus /$\leftrightarrow \forall w_1,\forall w_2$: $(w_1Rw_2 \supset w_2Rw_1)$/ $\Leftrightarrow \vDash A\supset\Box\Diamond A$
Tfh. $|A|^{Ip}_{w_1}=1 \Rightarrow \forall\, w_2$: $(w_2Rw_1 \supset |\Diamond A|^{Ip}_{w_2}=1) \Rightarrow w_2Rw_1 \supset w_1Rw_2$ /R szimmetrikus/ $\Rightarrow$ mivel minden olyan világban, ahol amit ő lát: $\Diamond A$ igaz $\Rightarrow |\Box\Diamond A|^{Ip}_{w_1}=1$ (ha ez minden világban) $\Rightarrow \vDash A\supset\Box\Diamond A$

$\Leftarrow$: Tfh. $\vDash A\supset\Box\Diamond A \Rightarrow$ R szimmetrikus
Kontrapozícióval: R nem szimmetrikus $\Rightarrow \forall w_1,\forall w_2$: $(w_1Rw_2\ \&\ \sim(w_2Rw_1)) \Rightarrow |p_0|^{Ip}_{w_1}=1$, = mindenhol máshol $\Rightarrow |\Diamond p_0|^{Ip}_{w_2}=0 \Rightarrow w_1$ látja w_2-t, ahol $\Diamond A$ hamis $\Rightarrow |\Box\Diamond p_0|^{Ip}_{w_1}=0 \Rightarrow |\ p_0\supset\Box\Diamond p_0|^{Ip}_{w_1}=0 \Rightarrow$ $\nvDash A\supset\Box\Diamond A$. ■

TÉTEL: R tranzitív /$\leftrightarrow\forall w_1\forall w_2\forall w_3$: $(w_1Rw_2\ \&\ w_2Rw_3)\supset w_1Rw_3$/$\Leftrightarrow \vDash\Box A\supset\Box\Box A$.

Ezen tulajdonságokkal különböző modális szemantikákat gyárthatunk:

- K: R bármilyen lehet
- T: R **reflexív** kell, hogy legyen (alethikus szemantika)
- S4: R **reflexív** és **tranzitív** (adekvát szemantika)
- S5: R reflexív+tranzitív+szimmetrikus, azaz **ekvivalenciareláció** (univerzális reláció)

Kripke 2

nyelv: $\mathscr{L}^1$+"□"

Ötlet: interpretációt kiegészítő tárgyalási univerzum: U – speciálisan választjuk meg: minden világban tudjunk létezőkről beszélni, de lesznek dolgok, melyek csak az egyes világokban fognak létezni, nem az összesben

- U-t relativizáljuk

- U – az össze lehetséges világ individuumainak halmaza
- $d(w)\subseteq U$ – az aktuális világ individuumainak halmaza

- A nevek jelölete és a változók értéke minden világban azonos $\in U$. (Süsü minden világban van: nem biztos, hogy létezik, de mindenhol ugyanazt a Süsüt jelöli.)

$\mathfrak{I}_p = <W, R, U, d, \Phi>$ pl. ha $a\in NC$, akkor $\Phi(a)\in U$

(A mi univerzumunkban Julius Ceasar nem létezik, de abban a világban, ahol Ceasar halála előtt 20 évvel felfedezték az örök élet italát: Ceasar létezik.)

$v(x)\in U$, $|\forall xA|^{Ip}_{v,w}=0$, ha van olyan $u\in d(w)$, hogy $|A|^{Ip}_{v[x:u],w}=0$

pl.: "Süsü egy sárkány." A lehetséges individuumok között Süsü individuum, és U-ban sárkány individuum is: így Süsü beletartozik a sárkány individuumok terjedelmébe.

De Süsü a mi világunkban nem létezik: nem mondhatjuk, hogy "Minden sárkány többfejű."

Ennek a szemantikának nagy kifejezőereje van!

Paradoxonok?

- nem modális elsőrendű logikában:: $\forall xA \supset A^{t/x}$ – itt nem lehet érvényes; t bármilyne individuum lehet, de $\forall x$: csak a mi világunkban létező individuumokat jelöli

  Helyette: $\forall y(xA \supset A^{t/x})$ – az első $\forall$ lekorlátozza az aktuális világban létezőkre

- deskripcókkal továbbra is problémák

A paradoxonok többségét azonban kijavítja.

Filozófiailag azonban sokan támadják!

Pl.: "*Bill Gates*"$\in$U – a különböző világokban rendelkezhet különböző tulajdonságokkal: valahol egylábú, valahol háromlábú... ☺

Eszencialista gondolatok:
Vannak olyan tulajdonságok, melyekkel minden lehetséges világban rendelkeznem kell, pl.: önmagammal azonos vagyok. Egy olyan világban, ahol 16 méter magas lennék, nem lennék azonos önmagammal, de ezen elmélet alapján a "16 méteres" is ugyanaz az individuum lenne, azaz én.

David Lewis: a modális logikák filozófiai értelmezésének úttörője. Szerinte nem fizikai értelemben léteznek lehetséges világok, fel kell azonban tételezni azok létezését.
Ha ezzel egyetértünk: "*Megölhetem Magyarország miniszterelnökét, nem leszek bűnös. Ez ugyanis egy logikai szükségszerűség: nem tehetek róla, hogy ebben a világban meg kellett ölnöm Medgyessy Pétert. Van sok olyan világ, ahol nem ölöm meg.*" ☺

Metalogikai tételek

Gödel 1. nemteljességi tétele (1931)

$\tau = \langle \alpha, \Gamma \rangle$, α: elsőrendű nyelv, $\Gamma \subseteq Form_\alpha$, $Term_a \subseteq Term_\alpha$, ahol $Term_a$ az aritmetika terminusait jelenti (hogy tudjunk számokról beszélni).

Ha "$\Gamma \vdash Q$",g konzisztens ($\sim\exists A \in Form$: $(\Gamma \vdash A \& \Gamma \vdash \sim A)$)**, akkor Γ nem negációmentes.**

(Negációmentes: $\exists A \in Form$: $(\Gamma \nvdash A$ & $\Gamma \nvdash \sim A)$, azaz egy állítást vagy be tudunk bizonyítani, vagy "be tudjuk cáfolni".)

Biz:

1. **Gödel-számozás**:

α kifejezéseihez számot rendel: (Jelölés: $\lceil A \rceil$= A Gödel-száma)

a) szimbólumok	$\sim$,	$\supset$,	$\forall$,	$=$,	(,	),	a_1,	...	f_1,	...	F_1,	...	x_0,	...
	1	2	3	4	5	6	7	...						

b) formulák Pl.: A: $\sim$ (F_1 (a_2)) $\Rightarrow \lceil A \rceil = 2^1 \bullet 3^5 \bullet 5^q \bullet 7^5 \bullet 11^8 \bullet 13^6 \bullet 17^6$
1 5 q 5 8 6 6

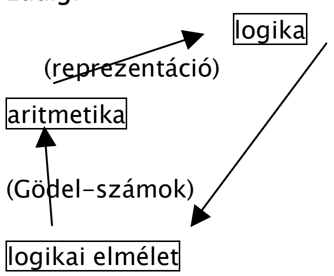
c) formulasorozatok $\lceil A_1, ..., A_n \rceil = 2^{\lceil A_1 \rceil} \cdot 3^{\lceil A_2 \rceil} \cdot ... \cdot \pi^{\lceil A_n \rceil}$, ahol π az n. prímszám

2. Bizonyos logikai összefüggések kifejezhetők a **rekurzív függvények** elméletében: $\omega^n \rightarrow \omega$
(Alapfüggvények: +, *, $K_<(a,b)$, projekció; Konstrukciók: kompozíció, primitív rekurzió, minimalizáció)
Formula(a)=1, ha $a = \lceil A \rceil$, $A \in Form$ (azaz a egy formula Gödel-száma), =0 különben
Levezetés$_\Gamma$(a,b)=1, ha $a = \lceil A_n \rceil$, $b = \lceil A_1, ..., A_n \rceil$, és $A_1, ..., A_n$ az A_n levezetése Γ-ból.
(Ezzel algogikát lefordítottuk matematikára)

3. (Most visszafordítjuk logikára)
a) Reprezentációs tétel
A rekurzív függvények és relációk reprezentálhatók az aritmetikában, mint elsőrendű elméletben (=logikán belül vannak).
$f(a_1, ..., a_n) = b \Leftrightarrow$ ha van 1 és csak 1 (n+1) változós formula, amelyre:
$\Gamma \vdash A^{\bar{a}_1/x_1,...\bar{a}_n/x_n,\bar{b}/x_{n+1}}$ – a számokat terminusként jelenítjük meg

b) Diagonalizációs lemma
Minden A 1 szabad változós formulára létezik olyan $B \in Form$, hogy $\Gamma \vdash (A^{\overline{\lceil B \rceil}/x} \equiv B)$ – ahol $\overline{\lceil B \rceil}$ a B Gödel-számának terminusa, reprezentánsa (az a terminus,. amivel a számot kifejezzük)

Eddig:



Mindezt azért, hogy a logika beszélhessen saját magáról (diagonalizáció segítségével)
$\Rightarrow$ Így a logikával tudjuk kifejezni saját tulajdonságait.

4. <u>**Levezetés**</u>$_{\Gamma}$**(a,b)** → (reprezentáció) <u>**Proof**</u>$_{\Gamma}$ 2 szabad változós formula, Jelölés: <u>**Proof**</u>$_{\Gamma}$**(x,y)**

$Pr_{\Gamma}(x) \Leftrightarrow \exists y$: <u>Proof</u>$_{\Gamma}(x,y)$ = "*levezethető*"

$Pr_{\Gamma}(x) \rightarrow \sim Pr_{\Gamma}(x)$ diagonalizáltja: $\Gamma \vdash (\sim Pr_{\Gamma}(\ulcorner G \urcorner) \equiv G)$ – **Gödeli mondat**
G: akkor és csak akkor igaz, ha nem levezethető
G: "*Nem vagyok levezethető*", ~G: "*az én negációm levezethető*" = "*nem vagyok levezethető*"
⇒ sem ő, sem az ellentettje nem levezethető – Gödeli mondat: nem eldönthető
G kifejezhető a rendszerben, de se nem levezethető, se nem cáfolható.

⇒ a rendszer nem negációmentes. ■

Gödel 2. nemteljességi tétele (1931)

$Con_{\Gamma} \in Form$: kifejezi az elmélet konzisztenciáját /pl.: $Con_{\Gamma} \Leftrightarrow \sim Pr_{\Gamma}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$/

$\Gamma \nvdash Con_{\Gamma}$ (az is igaz, hogy $\Gamma \nvdash \sim Con_{\Gamma}$)

Egy ilyen elmélet nem tudja bizonyítani a saját konzisztenciáját.

Sokan úgy gondolták, ennek a tételnek nagyobb a jelentősége. ⇒ Az aritmetika nem tudja bizonyítani a saját ellentmondásmentességét. ⇒ Nem lehet bizonyítani a matematika ellentmondásmentességét.

Church-tétele (1936)

<u>**Levezethető**</u>$_{\Gamma}$**(a) = Formula(a) & ∃b:** <u>**Levezetés**</u>$_{\Gamma}$**(a,b)**

Levezethető – nem rekurzív reláció: a jobb oldalon minden rekurzív, kivéve a ∃-et: ez korlátlan kvantifikáció! A rekurzióban csak korlátos kvantifikációt használhatunk.

Church-tézis: (nincs bizonyítva)

A rekurzív függvények elméleténél nincs erősebb eldöntési eljárás.

Tarski-tétel (1935)

/*Tarski* – lengyel logikus/

az igazság fogalma definiálhatatlan szintaktikailag. (⇒ nem tudunk megszabadulni a szemantikától)

(Ha definiálható lenne ⇒ $|I(p)|=1 \Leftrightarrow |p|=1$ – így nem lenen szükség a szemantikára, de I nem definiálható

Hazug-paradoxon (i.e. 4. század óta ismert)
$P_H \Leftrightarrow \sim I(P_H)$: "*Ez a mondat hamis.*"
Tfh. $|P_H|=1 \rightarrow |\sim I(P_H)|=1 \rightarrow I(P_H)=0 \rightarrow P_H = 0$
Tfh. $|P_H|=0 \rightarrow |\sim I(P_H)|=0 \rightarrow I(P_H)=1 \rightarrow P_H = 1$

Hazug krétai paradoxon (*Pál apostol*):
"*A krétai azt állítja, hogy minden krétai hazudik.*"
Ez nem lehet igaz, de hamis lehet! – ez nem igazi paradoxon