

A deduktív logika elemei

Érvelésselmélet, 2013. 10. 22.

Ismétlés: Deduktív érvelés

Deduktív érvelés:

A premisszák igazsága *szükségszerűen maga után vonja* a konklúzió igazságát.

Minden magyar adócsaló.

Pityu magyar.

Pityu adócsaló.

Érvényesség

- Mi van, ha Pityu mégsem adócsaló?
Rossz a következtetés?
- NEM: Ekkor két lehetőség van:
 - nem igaz, hogy Pityu magyar; vagy
 - nem igaz, hogy Pityu adócsaló
- Vagyis **HA a premisszák igazak, akkor a konklúzió is igaz** – azaz ha a konklúzió nem igaz, akkor nem voltak igazak a premisszák

Érvényesség vs. helytállóság

- Egy következtetés deduktíve *érvényes*:
a premisszák igazsága maga után vonja a
konklúzió igazságát
(*ha* igazak a pr., *akkor* igaz a k.)
- Egy következtetés *helytálló*:
HA deduktíve érvényes,
ÉS tudjuk, hogy a premisszák igazak
→ EKKOR tudjuk, hogy a konklúzió is igaz
- A logika csak az érvényesség kérdését firtatja

Formális analógia

- Minden madár gerinces.
A veréb madár.
A veréb gerinces.
- Minden politikus hazug.
Izolda politikus.
Izolda hazug.
- Minden ilyen formájú érvelés érvényes:
„Minden A az B . De x egy A . Tehát x egy B .”
- Eltekinthetünk a tartalomtól (vs. induktív logika):
itt tökmindegy, mi áll A , B és x helyén!

Formális logika

- A deduktív érvelések érvényessége azok formáján (logikai szerkezet) múlik:
- bizonyos kifejezések fontosak (pl. „minden”), ezek elrendezése számít,
- a többi kifejezés tartalmától eltekinthetünk és szimbólumokkal helyettesíthetjük őket.
- (Analógia: „ $x + y = y + x$ ” – itt édesmindegy, mi szerepel x és y helyén, csak $+$ és $=$ jelentése és elrendezése számít.)

I. Összetett mondatok a logikában

- Bizonyos következtetések formáját a bennünk szereplő kötőszavak határozzák meg
- Pl. Ha A , akkor B . De A . Tehát B .
- Itt eltekinthetünk az elemi mondatok értelmétől: a következtetés mindig érvényes, *függetlenül* attól, hogy milyen mondatokat helyettesítünk A és B helyére
- Alapelv: a kötőszó igazságértékek viszonya
- Kérdés: mely kötőszavak foghatók fel így?

1. Negáció

- Ha A egy mondat, $\sim A$ a mondat negációja
 - Pl. A : „Esik az eső”; $\sim A$: „*Nem* esik az eső”
 - Mit csinál a „nem” szócska? Igaz mondatból hamisat csinál, hamisból pedig igazat: az igazságértéket az ellenkezőjére változtatja
 - tökmindegy, mit A értelme, mert a „ \sim ” a mondat igazságértékére hat, nem az értelmére
 - Ez persze erős egyszerűsítés: a természetes nyelv „nem” szava ennél sokoldalúbb
- „Józsi nem ment el a buliba”
„Nem Józsi ment el a buliba”
„Józsi nem a buliba ment el”
- } ezek logikailag azonosak:
 $\sim(\text{Józsi elment a buliba})$

2. Konjunkció

- Ha A és B mondatok, $A \& B$ kettőjük konjunkciója
 - Pl. A : „Esik az eső”; B : „Hideg van”
 $A \& B$: „Esik az eső és hideg van”
- A fenti mondat csak akkor igaz, ha A is igaz és B is igaz, minden más esetben hamis
 - Ez is értelemfüggetlen viszony az igazságértékek között, nem úgy, mint a természetes nyelvi „és”:
„Fejberúgtam és hanyattesett”
„Hanyattesett és fejberúgtam” } a kettő logikailag azonos, egyébiránt nem igazán
 - Mindig mondatok között: „Józsi és Pisti buliba mentek”
= „(Józsi buliba ment) & (Pisti buliba ment)”

3. Alternáció

- Ha A és B mondatok, $A \vee B$ kettőjük alternációja
 - Pl. A : „Józsi buliba ment”; B : „Józsi moziba ment”
 $A \vee B$: „Józsi buliba vagy moziba ment”
 - Mi az igazságértékek közti viszony?
 - Ha egyik helyre sem ment, akkor $A \vee B$ hamis
 - Ha az egyikre ment, a másikra nem, akkor $A \vee B$ igaz
 - Ha mindkét helyre elment, akkor $A \vee B$ legyen igaz:
 - „Mit csinálsz ma este, Józsi?”
 - „Még nem tudom, buliba vagy moziba megyek”
- nyilván nem hazudott, ha mindkét helyre elment

(3.b Diszjunkció)

- Gizi, Józsi barátnője közbeszól:
 - „Tudod, hogy siralmasan állunk anyagilag, nem pazarolhatunk. Vagy moziba megyünk, vagy buliba!”
- Ekkor is a „vagy” szót használjuk, de másképp:
 $A \nabla B$ akkor igaz, ha A és B közül pontosan az egyik igaz, de hamis, ha mindkettő igaz, vagy ha mindkettő hamis
 - Alternáció: a „vagy” megengedő használata: a két tagmondat lehet egyszerre igaz
 - Diszjunkció: a „vagy” kizáró használata: a két tagmondat nem lehet egyszerre igaz

Intermezzo: A Wason-teszt

- Múlt óra: a *ha-akkor* mondatok problematikusak
- Ellenőrizzük a következő mondat igazságát:

„Ha egy kártya egyik oldalán a szám páros, akkor a másik oldalán a betű magánhangzó”

Melyiket *kell* megfordítani az alábbiak közül?

5

2

E

C

Egy analóg szituáció

- Ellenőrizzük a következő mondat igazságát:

„Ha valaki alkohol iszik a kocsmában, akkor az elmúlt 18 éves”

Melyiket *kell* megfordítani az alábbiak közül?

kóla

rum

25

14

- A két mondat formailag azonos, ugyanúgy kell bánni velük:

‘Ha A , akkor B ’ hamis akkor, ha A igaz és B hamis:

- Valaki alkoholt iszik és nem múlt el 18 éves
- Az egyik oldalon páros a szám és mássalhangzó van a másik oldalon

De ha A hamis (nem alkoholt iszik; páratlan a szám),
vagy ha B igaz (elmúlt 18; magánhangzó van),
akkor azok nem cáfolják a mondatot, vagyis az igaz

- Persze mi véges lények könnyebben ítélünk tartalom alapján, mint forma alapján: az ismerős szituációban biztosabban tudunk dönteni

4. Kondicionális

- Ha A és B mondatok, akkor az $A \supset B$ kondicionális képezhető, ahol A az előtag és B az utótag
 - Pl. „Ha egy szám nagyobb 4-nél, akkor az nagyobb 2-nél” – minden számra igaz
 - Pl. 5-re, melynél az előtag és az utótag is igaz
 - Pl. 3-ra, melynél az előtag hamis, az utótag igaz
 - Pl. 1-re, melynél az előtag és az utótag is hamis
 - De olyan szám nincs, amelynél az előtag igaz (nagyobb 4-nél), és az utótag hamis (nem nagyobb 2-nél)!
- $A \supset B$ csak akkor hamis, ha A igaz és B hamis, minden más esetben igaz

A kondicionális ekvivalensei

- „Ha valaki alkoholt iszik, az elmúlt 18 éves” =
„Nem lehet, hogy alkoholt igyon, és nincs még 18”

$$A \supset B = \sim(A \& \sim B) \quad (\text{lásd kond. igazságfeltételei})$$

- „Ha elhanyagolod a tanulást, akkor megbuksz” =
„Ne hanyagold el a tanulást, vagy megbuksz”

$$A \supset B = \sim A \vee B$$

- A természetes nyelvben rengetegféleképpen ki lehet még fejezni (feltéve, amennyiben, ugyanis), de sokszor nem egyértelmű, hogy erről van-e szó

(4.b Bikondicionális)

- Persze a természetes nyelvben többféleképpen érthetjük a ha-akkor kapcsolatot, pl.:

„Ha kérsz csokit, adok”

– „Nem igaz, hogy kérsz csokit, és én nem adok”

$$\sim(K \& \sim A) = K \supset A$$

– „De az sem igaz, hogy nem kérsz, és én adok”

$$\sim(A \& \sim K) = A \supset K$$

- Valójában „Akkor és csak akkor adok, ha kérsz”
→ akkor igaz, ha mindkét tagmondat igaz, vagy mindkét tagmondat hamis
– azaz hamis, ha az egyik igaz, a másik hamis

Ennyi legyen elég...

- Nem minden kötőszóra igaz, hogy a tagmondatok igazságértéke meghatározza az összetett mondat igazságértékét, *függetlenül* az értelemtől
- Pl. „M megbuktam a ZH-n, *mert* nem tanultam”
→ igaz az eleje, igaz a vége, és igaz az egész mondat is
De: „M megbuktam a ZH-n, mert $2+2=4$ ”
→ igaz az eleje, igaz a vége, de nem igaz az összetett
- A legtöbb esetben a tartalom is számít, és ilyenkor nem tudunk formális logikai eszközökkel megfelelő rekonstrukciót adni
- De néha tudunk → ezzel foglalkozunk most

II. Érvelések összetételekkel

- Mivel ezekben a szituációkban a forma számít, nem a tartalom, érvényes érvelési formákat tudunk megállapítani
- Csak az összetételek módján múlik az érvényesség: *ha* a premisszák igazak, *akkor* a konklúzió is igaz
- Könnyen kiszűrhetők a formailag hibás következtetések

1. Kontrapozíció

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek

Ha nem beszélek hülyeségeket, nem vagyok részeg

- Hiszen
valamint
de nyilván
tehát
- $$R \supset H = \sim R \vee H$$
- $$\sim H \supset \sim R = \sim \sim H \vee \sim R$$
- $$\sim \sim H = H$$
- $$R \supset H = \sim H \supset \sim R$$
- Mivel a két mondat logikailag ekvivalens, ha az egyik igaz, a másik is igaz, és fordítva: ez a következtetés oda-vissza működik!

- Konverziós **hiba**:

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek

Ha hülyeségeket beszélek, részeg vagyok

Hiszen más helyzetben is beszélhetek hülyeséget:

$R \supset H \neq H \supset R$ (a kondicionális nem bikondicionális!)

- Kontrapozíciós **hiba**:

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek

Ha nem vagyok részeg, nem beszélek hülyeséget

Hiszen mástól is beszélhetek hülyeségeket:

$R \supset H \neq \sim R \supset \sim H$

- Lásd: szükséges és elégséges feltételek különbsége
 $(\sim A \supset \sim B)$ $(A \supset B)$

2. Modus ponens

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek.

Részeg vagyok.

Hülyeségeket beszélek.

- A legalapvetőbb következtetés formális logikában
 $\{ A \supset B, A \} \Rightarrow B$
- Modus ponens **hiba** (az utótag állítása):

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek.

Hülyeségeket beszélek.

Részeg vagyok.

$\{ A \supset B, B \} \Rightarrow A$

3. Modus tollens

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek.

Nem beszélek hülyeségeket.

Nem vagyok részeg.

$$\{ A \supset B, \sim B \} \Rightarrow \sim A$$

- Modus tollens **hiba** (az előtag tagadása):

Ha részeg vagyok, hülyeségeket beszélek.

Nem vagyok részeg.

Nem beszélek hülyeségeket.

$$\{ A \supset B, \sim A \} \Rightarrow \sim B$$

- Ezek nem hibák, ha a „ha-akkor” bikondicionálist fejez ki!

4. Diszjunktív szillogizmus

Ma moziba megyek vagy berúgok.

Nem megyek moziba.

Berúgok.

$$\{ A \vee B, \sim A \} \Rightarrow B$$

- **Hibás** diszjunktív szillogizmus:

Ma moziba megyek vagy berúgok.

Moziba megyek.

Nem rúgok be.

$$\{ A \vee B, A \} \Rightarrow \sim B$$

- Nem hiba, ha a „vagy” diszjunkciót fejez ki, nem alternációt

5. Hipotetikus szillogizmus

Ha randizok, ideges vagyok.

Ha ideges vagyok, idétlenül vihogok.

Ha randizok, idétlenül vihogok.

$$\{ A \supset B, B \supset C \} \Rightarrow A \supset C$$

- Ez így magában egyszerű, de ha keveredik kontraponált állításokkal, nehezebb követni
→ figyelni kell, ne keveredjen bele konverziós vagy kontrapozíciós hiba

6. Konstruktív dilemma

A félév végén vagy zh-t írtok, vagy beadandót.

Ha zh-t írtok, napokig kell magolni az anyagot.

Ha beadandót írtok, napokig újságot kell bújni.

A napok magolással vagy újságbújással fognak telni.

$$\{ A \vee B, A \supset C, B \supset D \} \Rightarrow C \vee D$$

- Itt már mind a kondicionális, mind az alternáció lehetséges hibáit figyelembe kell venni!

-
- Természetesen (végtelen) sok következtetési séma lehetséges még itt, de talán ezek a leggyakoribbak

III. Tulajdonságok terjedelmei

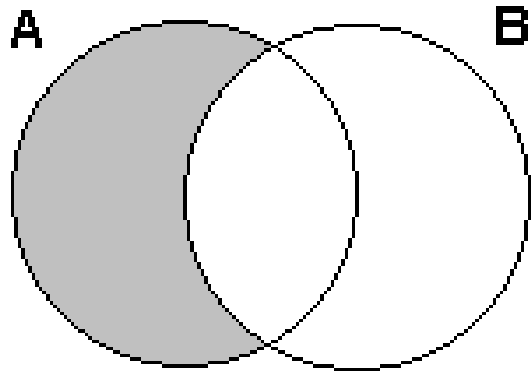
- Vannak formálisan érvényes következtetések, ahol nem a kötőszavak garantálják a formát
 - Pl. Minden egyetemista okos.
Egyetlen rendőr sem okos.
Egyetlen rendőr sem egyetemista.
 - (Vagy ilyen volt az óra elején az adócsalós példa)
 - Ilyenekkel foglalkozott Arisztotelész, az első következtetéselmélet megalkotója
 - Ma egy tágabb logikai rendszer keretei között szokás tárgyalni, de ettől eltekintünk

Szillogizmusok

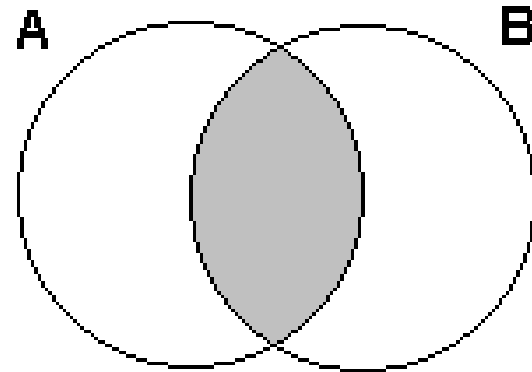
- Szillogizmus (Arisztotelész): olyan következtetés, amely:
 - két premisszával rendelkezik
 - mindkét premissza és a konklúzió formája:
 - „Minden A az B ” ; vagy
 - „Egyetlen A sem B ” ; vagy
 - „Van olyan A , amelyik B ” ; vagy
 - „Van olyan A , amelyik nem B ”
 - a két premisszában egy tulajdonság („ A ”, „ B ”) közös, a másik eltérő – ez utóbbi kettő jelenik meg a konklúzióban

Mondatok Venn-diagrammon – 1.

A „Minden A az B ”
azt jelenti, hogy
„Nincs olyan A , ami nem B ”



Az „Egyetlen A sem B ”
azt jelenti, hogy
„Nincs olyan A , ami B ”

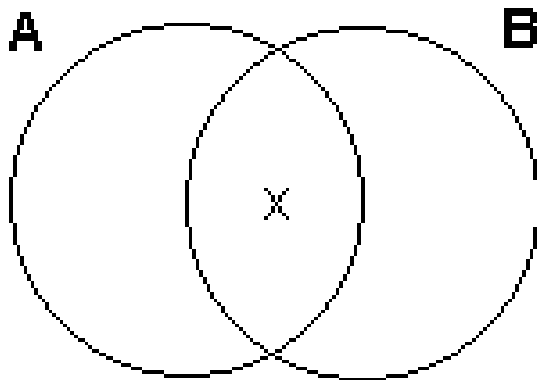


Pl. „Minden egyetemista okos”
→ az egyetemisták halmazának az okosok halmazán kívüli része üres

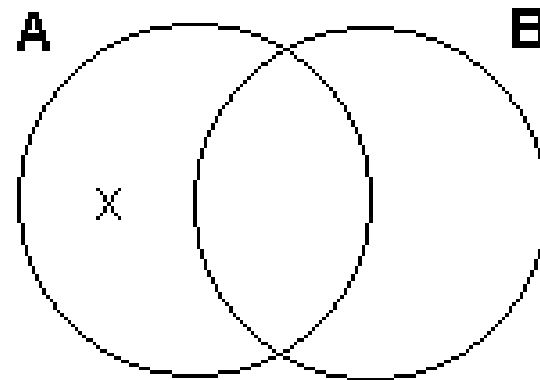
Pl. „Egyetlen rendőr sem okos”
→ a rendőrök halmazának és az okosok halmazának üres a metszete

Mondatok Venn-diagrammon – 2.

A „Van olyan A , amelyik B ”
azt jelenti, hogy



„Van olyan A , amelyik nem B ”
azt jelenti, hogy

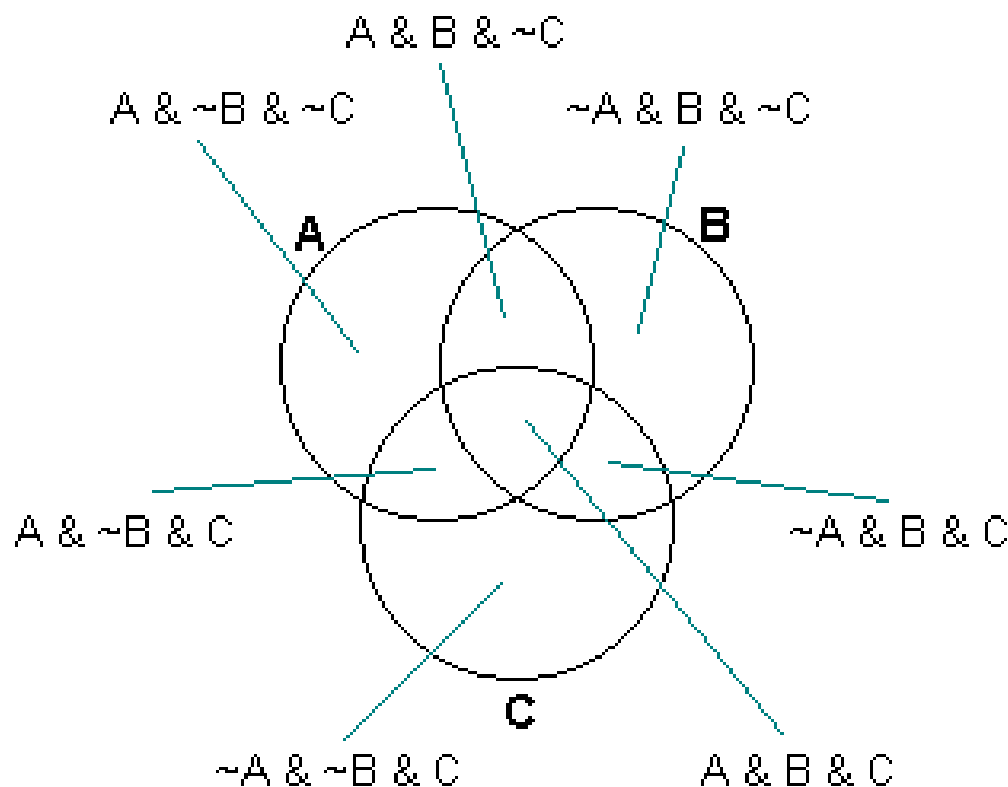


Pl. „Vannak okos rendőrök”
→ a rendőrök halmazának és az
okosok halmazának nem üres a
metszete

Pl. „Van egyetemista, aki nem okos”
→ az egyetemisták halmazának az
okosok halmazán kívüli része nem
üres

Következtetés Venn-diagrammon

1. A három tulajdonság lehetséges terjedelmét átfedő körökkel reprezentáljuk



2. Ábrázoljuk külön-külön a két premisszát
3. Leolvassuk, helyes-e a konklúzió

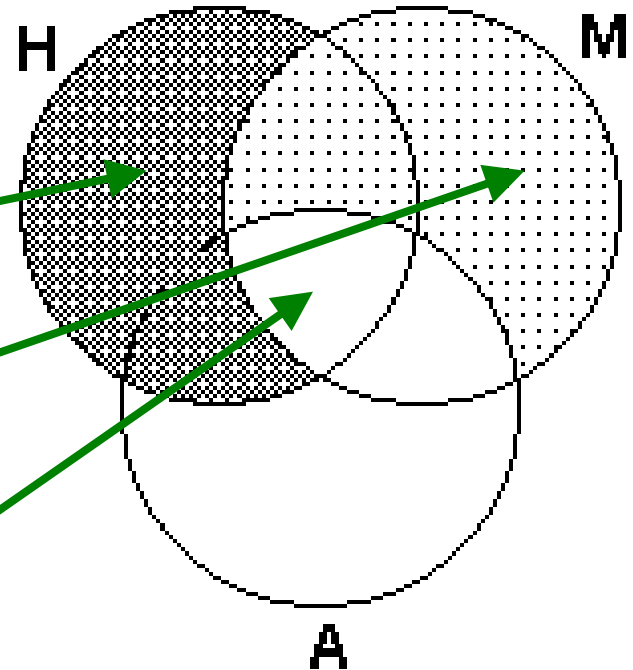
Példa – 1.

- Minden holló madár
Minden madár állat
Minden holló állat

első premissza

második premissza

Konklúzió: csak olyan helyen lehetnek hollók, ahol egyben állatok is



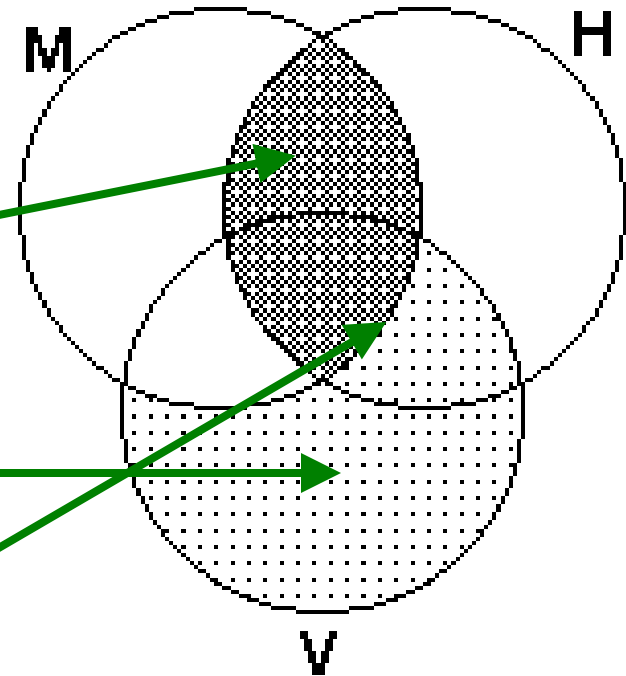
Példa – 2.

- Egyetlen méhész sem horgász
Minden vadász méhész
Egyetlen horgász sem vadász

első premissza

második premissza

Konklúzió: a horgászok és a vadászok metszete üres



Példa – 3.

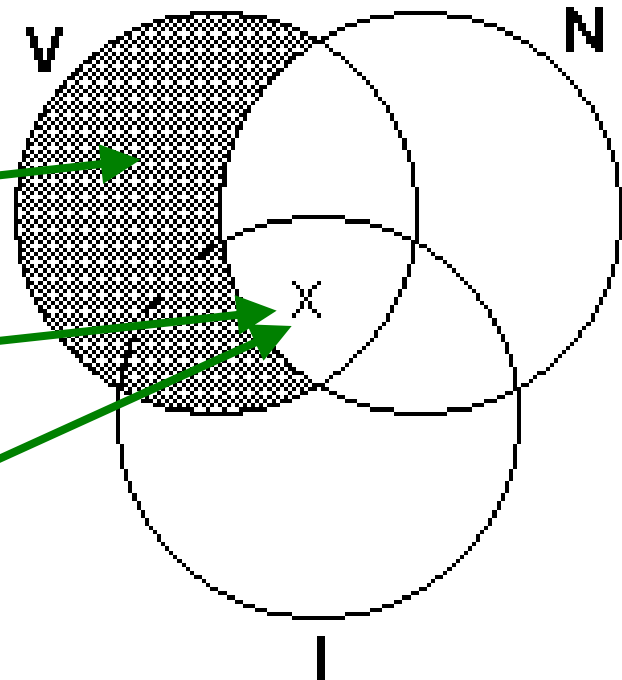
- Minden vizsga nehéz
Vannak írásbeli vizsgák
Van olyan írásbeli, ami nehéz

első premissza

második premissza

Konklúzió: a nehéz dolgok
és az írásbeli dolgok metszete
nem üres

- Tanulság: érdemes az ürességet kifejező premisszával kezdeni, különben a másik ábrázolása nem egyértelmű



Példa – 4.

- Egyetlen ember sem halhatatlan
Minden ember bűnös
Van bűnös, aki nem halhatatlan

első premissza

második premissza

Konklúzió: látunk itt létezésre utaló jelet??? → nem érvényes!

- Tanulság: attól még, hogy valamit nem találtunk üresnek, nem biztos, hogy van ott valami. DE: ha vannak emberek, akkor már érvényes!!! (De ez egy extra premissza lenne)

