Az ógörög matematika és nyelve

Tudománytörténet és kommunikáció

2014. február 24.

Alapszöveg – Eukleidész: *Elemek*

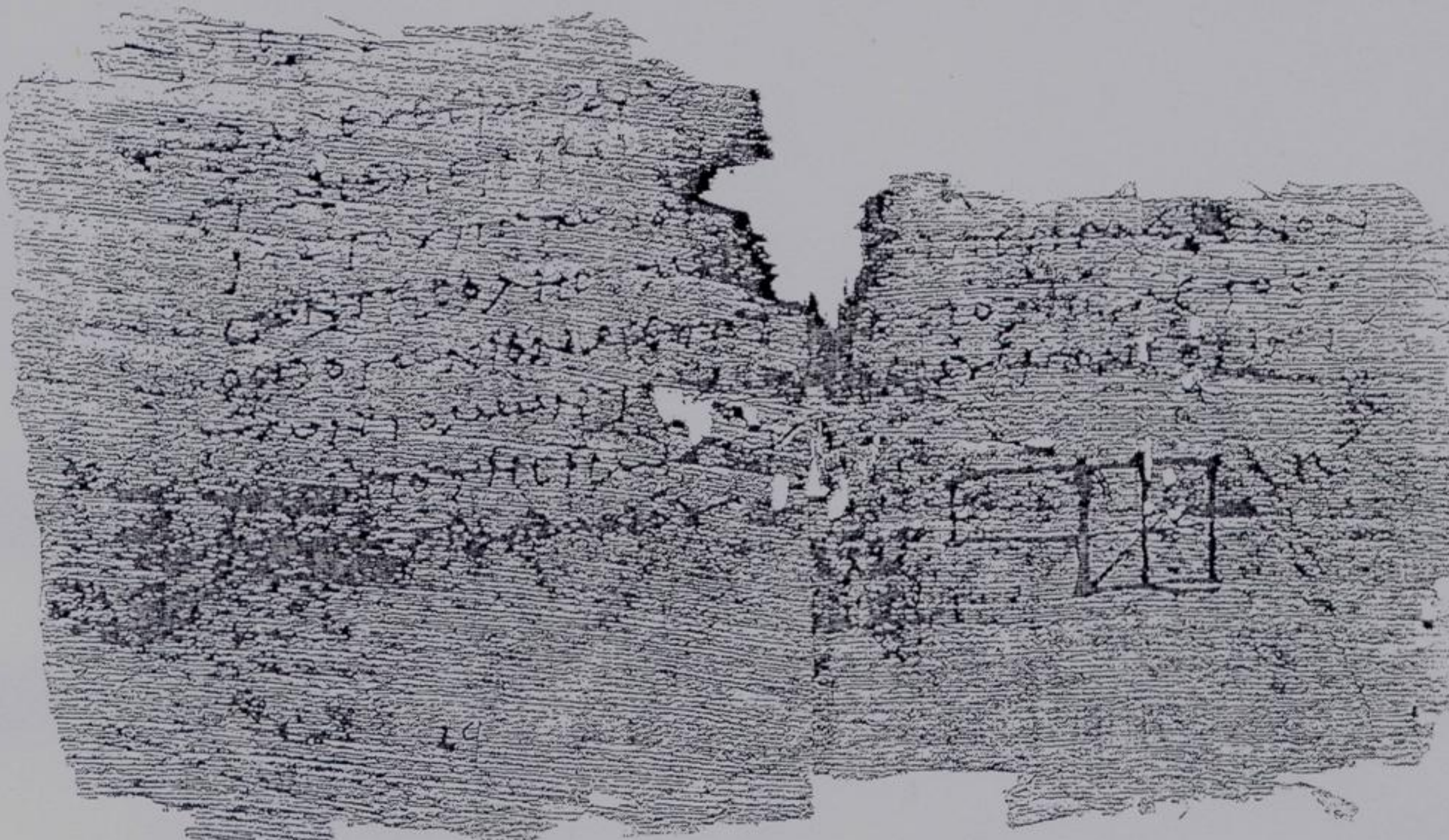
- A legkorábbról fennmaradt teljes matematikai szöveg, kb. i.e. 300
- A korabeli matematikai tudás összegzése és rendszerezése
- kb. a 17. századig a nyugati matematikai tradíció mintaképe, a legtöbbet tanulmányozott és oktatott matematikai mű
- 13 könyv, 467 probléma („tétel”)
- Alaptételek:
  - 23 + 98 definíció
  - 5 posztulátum
  - 9 axióma
- (Első könyv: http://mek.niif.hu/00800/00857/html/index.htm)

- \+ Fontosak még: Arkhimédész (kb. i.e. 287-212), Apollóniosz (kb. i.e. 265-190), néhány fennmaradt szövege, Eukleidész egyéb fennmaradt művei, és néhány későbbi szerző hasonló munkái

P. Oxy. i 29 (Oxyrhynchus Papyri)

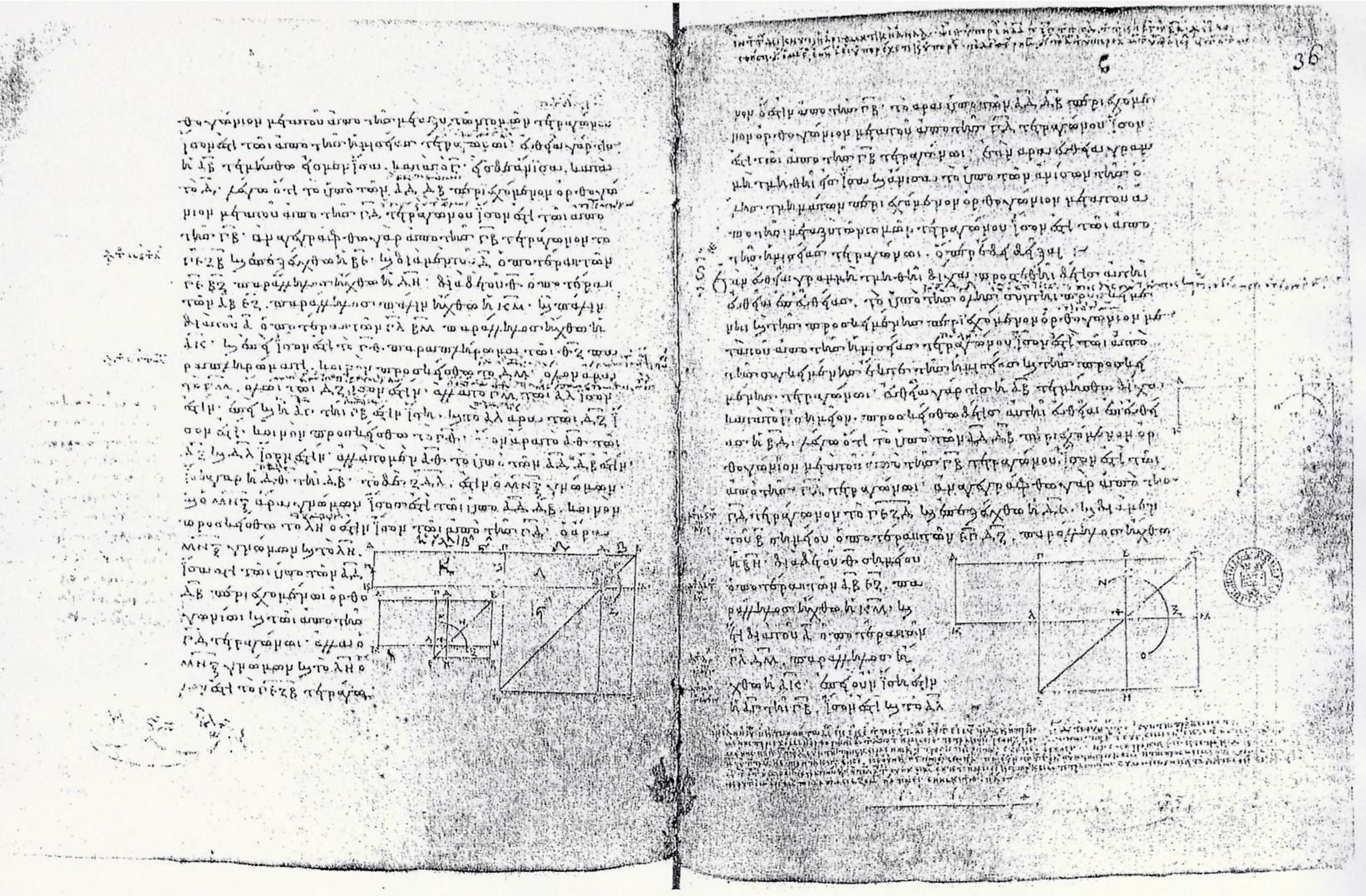
Eukleidész *Elemek*-jének II.5 tételét tartalmazó papirusz

(Kr.u. 1-2. század, Egyiptom)



Bodlei kézirat D'Orville 301, 35v és 36r oldalak

Az *Elemek* legrégebbi teljes példányából (Bizánc, Kr.u. 888), II.5 és II.6 tételek

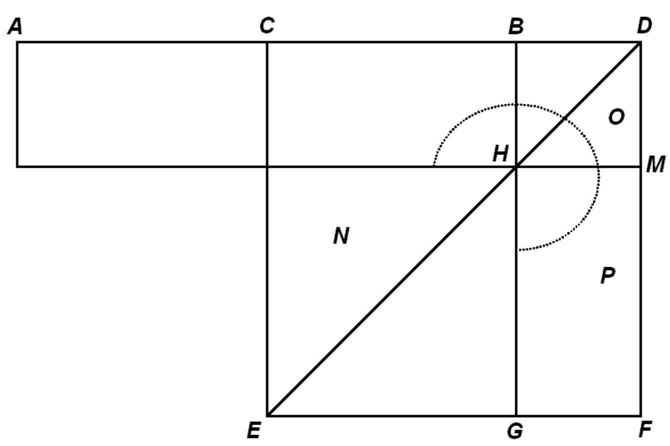


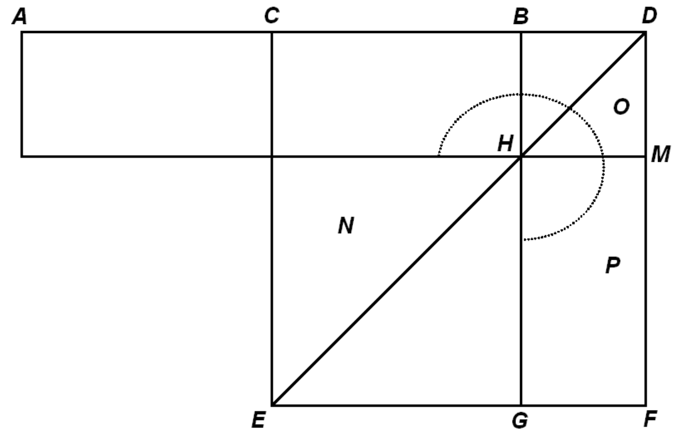
Egy tétel: II.6

Ha egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a szakasz felére emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel.

Felezzünk meg ugyanis valamely *AB* szakaszt a *C* pontban [I.10], és adjunk hozzá vele egy egyenesben egy *BD* szakaszt. Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel.

Legyen ugyanis *CEFD* a *CD* oldallal szerkesztett négyzet [I.46], és húzzuk meg *DE*-t, és húzzuk a *B* ponton át az *EC* és *DF* egyenessel párhuzamosan *BG*-t, és aztán húzzuk a *H* ponton át az *AB* és az *EF* egyenessel párhuzamosan *KM*-et, és végül húzzuk *A* ponton át a *CL* és a *DM* egyenessel párhuzamosan *AK*-t [I.31,30].





Minthogy tehát *AC* egyenlő *CB*-vel, *AL* is egyenlő *CH*-val [I.36]. *CH* azonban egyenlő *HF*-fel [I.43], *AL* tehát egyenlő *HF*-fel [1.Ax]. Adjuk hozzájuk közös tagnak *CM*-et, így a teljes *AM* egyenlő az *NOP* gnómónnal. *AM* azonban az *AD* és *DB* közötti téglalap, mert *D* egyenlő *DB*-vel; az *NOP* gnómón is egyenlő tehát az *AD* és *BD* által közrefogott téglalappal. Adjuk hozzájuk közös tagnak a *CB* oldalú négyzettel egyenlő *LG*-t, így az *AD* és *BD* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő az *NOP* gnómónnal és *LG*-vel [2.Ax]. Az *NOP* gnómón és *LG* viszont együtt a teljes *CEFD* négyzet, s ennek oldala *CD*. Az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel.

Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a szakasz felére emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

Az *Elemek* tételeinek szerkezete

- **Felvetés** (*protaszisz*):
  „Ha egy egyenesszakaszt megfelezünk […] a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel."
- **Kiindulás** (ektheszisz):
  „Felezzünk meg ugyanis valamely *AB* szakaszt a *C* pontoban [I.10], és adjunk hozzá vele egy egyenesben egy *BD* szakaszt."
- **Célkitűzés** (*dioriszmosz*):
  „Azt állítom, hogy az *AD* és *DB* által közrefogott téglalap meg a *CB* oldalú négyzet együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel."
- **Szerkesztés** (*kataszkeué*):
  „Legyen ugyanis *CEFD* […] párhuzamosan *AK*-t [I.31,30]."
- **Bizonyítás** (*apodeixisz*):
  „Minthogy tehát *AC* egyenlő *CB*-vel […] együtt egyenlő a *CD* oldalú négyzettel."
- **Konklúzió** (*szumperaszma*):
  „Ha tehát egy egyenesszakaszt megfelezünk […] Éppen ezt kellett megmutatni."

Az *Elemek* nyelvi sajátosságai

- Szűkített szókészlet
- Elliptikus (hiányos) kifejezések
- Formulákon alapuló szintaxis
- Implicit konvenciók
- Ábrára vonatkozás

- (Lásd a kiadott anyagok között R. Netz könyvét)

Szűkített szókészlet

Szöveg (783 szavas)	**Szavak száma: különböző**	**Szavak száma: egyszer megjelenő**
Apollóniosz, *Kónika* I.15 – matek	74	19
Arisztotelész, *Metafizika*, Λ könyv – filozófia	200	100
Platón valamelyik szövege – filozófia	sok	Kb. 70 %

Arkhimédész (ránk maradt) életműve: kb. 100 000 szó, ebből 851 különböző, ebből kb. 150 „kedvenc” teszi ki az egész 95%-át

Matekban használt szó	**Matekban nem használt szinonima**	**Jelentés**
grammé	*kánón*	vonal(szakasz)
kentron	*mezón*	közép(pont)
szémeion	*sztigmé*	pont

(Magyar analógia: kör – karika, pont – pötty, stb.)

Elliptikus (hiányos) kifejezésmód

Kifejezés az *Elemek*ben	**Jelentés**	**Nyelvileg teljes kifejezés**	**Jelentés (+ kifejezés a fordításban)**
to A	az[1] *A*	*to szémeion* A	az *A* pont
hé AB	az[2] *AB*	*hé grammé* AB	az *AB* vonal(szakasz)
to AB	az[1] *AB*	*to khórion* AB	az *AB* terület
to ABG	az[1] *ABC*	*to trigónon* ABG	az *ABC* háromszög
ho ABG	az[3] *ABC*	*ho küklosz* ABG	az *ABC* kör
hé hüpo tón ABG	a rajta a *ABC*-n (?)	???	az ABC pontokon levő szög [*gónia*] („az *ABC* szög”)

[1]semleges nem; [2]nőnem; [3]hímnem

→ az elhagyott szavakra a névelő neme utal

→ technikai nyelv, melyet csak a szakértő ért (szemben a fordításokkal)

Formulák a szintaxisban

- Formula: állandósult szókapcsolat, kifejezésmód (pl. Homérosz-szövegek)

- Objektum-formulák:
  pl. „*A* [pont]", „*AB* [szakasz]", „*ABC* [háromszög]", stb.
- Tulajdonság- és reláció-formulák:
  pl. „*AB* metszi *CD*-t", „*AB* merőleges *CD*-re", „az *ABC* szög derékszög", stb.
- Szerkesztési formulák:
  „húzzunk *AB*-vel *C*-n keresztül párhuzamos szakaszt", „állítsunk *AB*-re merőlegest *C*-ben", stb.
- Másodrendű formulák:
  „bizonyítani fogjuk, hogy…", „mindebből következik, hogy…", stb.

- Nagyon pontosan meghatározott, erősen elliptikus koreográfia

Implicit konvenciók

- A betűk sorrendje egy objektumon belül: „*AB* szakasz” *vs.* „*BA* szakasz”
  $\rightarrow$ kb. 80%-ban rendes, 20%-ban megfordul
- A betűk bevezetésének sorrendje a szövegben: pl. II.6: *A, B, C, D, E, F, G, H*… ABC-sorrendben kerülnek bevezetésre
  $\rightarrow$ itt is kb. 15-20% eltérés van ettől
- Ha eltérés is van a bevezetés sorrendjében, mindig az ABC első *n* betűjét használja, ahol *n* a szükséges betűk száma

- (Vigyázat: a fordítások „normalizálnak”, néha visszaállítják a sorrendet!)
- (Vigyázat2: a görög számírás alfabetikus, az első 10 számot az ABC első 10 betűje jelöli, így az *A, B, G*… pont jelentheti azt is, hogy az 1, 2, 3. … pont!)

- A betűzés, ábrára hivatkozás stb. eljárásai nem szigorú szabályokat követnek, hanem szokás alapú konvenciót

Ábrára vonatkozás

Betűk meghatározottsága a szöveg által (példák: II.6 szövege)

- **A) Teljesen meghatározott**: „Felezzünk meg ugyanis valamely *AB* szakaszt a *C* pontban” – minden pontról tudjuk, micsoda
- **B) Elégtelenül meghatározott**: „Legyen ugyanis *CEFD* a *CD* oldallal szerkesztett négyzet” – *E* és *F* tudjuk, hol van, de melyik melyik?
- **C) Meghatározatlan**: „és aztán húzzuk a *H* ponton át…” – mi az a *H*???
- **D) Változó meghatározottságú**: eleinte nem tudjuk a szövegből, hogy az mi, de később a szöveg kontextusából jobban kiderül

Szöveg (mindkét esetben 838 betű-bevezetés)	A)	B)	C)	D)
Eukleidész, *Elemek* XIII. könyv	47%	8%	19%	25%
Apollóniosz, *Kónika* I. könyv	42%	37%	4%	16%

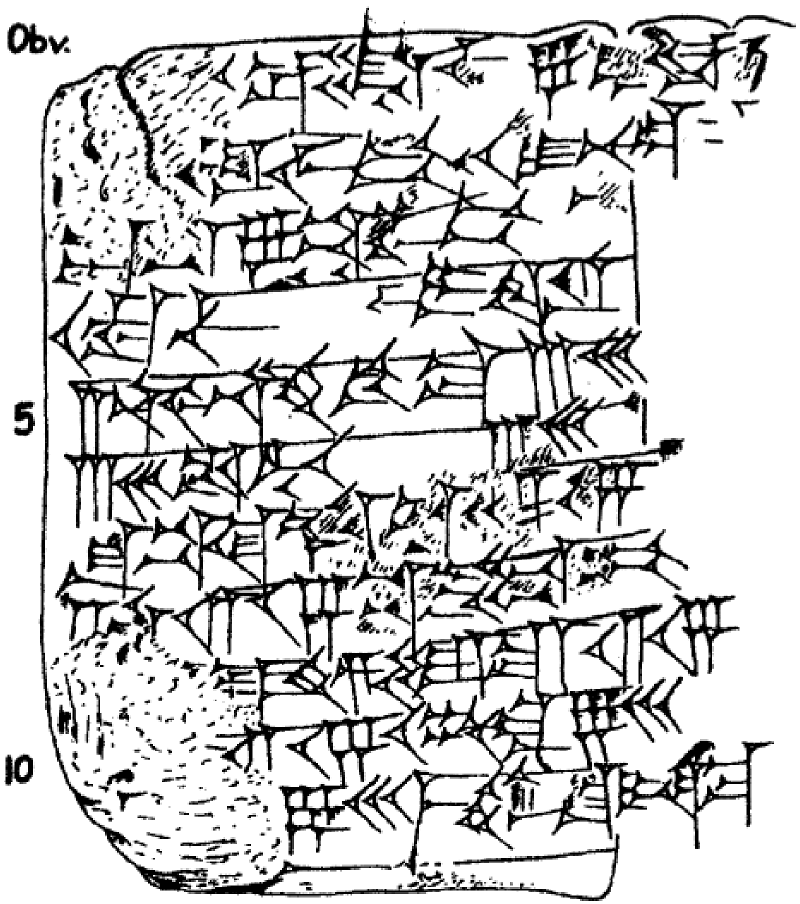
→ Az ábra nélkül nem érthető a szöveg, arra vonatkozik a tétel
(modern könyvek: az ábra csak szemléltetés, a szöveg magában megáll)

A II.6 probléma értelmezéséhez

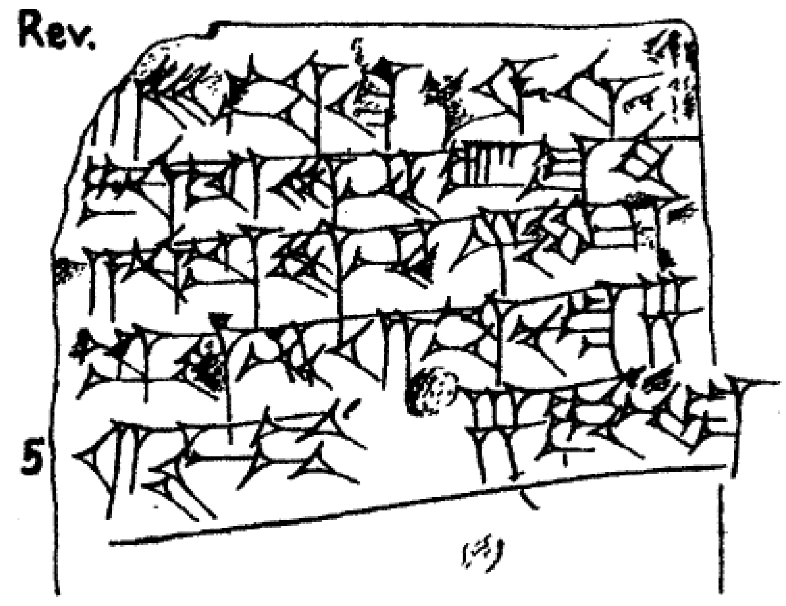
- Az „YBC 6967” babilóniai probléma
- Algebrai értelmezés
- Geometriai értelmezés

Az YBC 6967 agyagtábla (i.e. 2500)

Előlap:



Hátlap:



YBC 6967 – nyers fordítás

Előlap:

(1) [Az igib]um az igum felett, 7-tel megy túl,

(2) [igum] és igibum mennyi?

(3) T[e], a 7-et, amivel az igibum

(4) az igum felett túlmegy

(5) kettétörd: 3°30’;

(6) 3°30’ és 3°30’ együtt

(7) egybetart: 12°15’.

(8) A 12°15’-höz, amit megkapsz,

(9) [1`-et, a felül]etet rakd hozzá: 1`12°15’.

(10) [Az egyenoldal 1`]12°15’-höz mennyi? 8°30’.

(11) [8°30’ és] 8°30’-at, a mellékpárját, fektesd le.

Hátlap:

(1) 3°30’-at, az egybetartót

(2) az egyikből szakítsd ki,

(3) a másikhoz rakd hozzá.

(4) Az első 12, a második 5.

(5) 12 az igibum, 5 az igum.

Néhány magyarázat

- A szögletes zárójelben levő kifejezések kiegészítések: itt az agyagtábla sérült.

- A számok hatvanas számrendszerben vannak. Pl.:
  $1`12°15' = 1×60^1 + 12×60^0 + 15×60^{-1} = 72¼$

- (1) Igum, igibum: két szám, amelyik a reciproktáblán összetartozik (vagyis szorzatuk egységnyi, azaz 60.)
- (5) Kettétörni: szükségszerűen fél keletkezik (nem olyan fél, ami akár harmad is lehetne). Pl. a háromszög alapjának fele a területszámításkor.
- (7) *a* és *b* egybetart: *a* és *b* téglalapot alkotnak (vagyis *a*, *b* az oldalak hossza).
- (9) Hozzárakni: az összeadás egyik fajtája (amihez hozzáadtunk, nagyobbá válik, de nem szűnik meg ugyanannak lenni. „Felhalmoz”: dolgok mennyiségét összeadjuk, de nem érdekel, mi lesz belőle: pl. hossz + terület)
- (10) Egyenoldal: a négyzetként felfogott mennyiség oldalának hossza (vagyis négyzetgyök).
- (11) Az egyenoldal mellékpárja egy olyan oldal, amellyel találkozik egy csúcsban.

YBC 6967 – algebrai értelmezés (Otto Neugebauer)

(1)	[Az igib]um az igum felett, 7-tel megy túl,	$xy = 60$, $x - y = 7$
(2)	[igum] és igibum mennyi?	
(3)	T[e], a 7-et, amivel az igibum	
(4)	az igum felett túlmegy	
(5)	kettétörd: 3°30′;	$(x-y)/2 = 3\frac{1}{2}$
(6)	3°30′ és 3°30′ együtt	
(7)	egybetart: 12°15′.	$((x-y)/2)^2 = 12\frac{1}{4}$
(8)	A 12°15′-höz, amit megkapsz,	
(9)	[1\`-et, a felül]etet rakd hozzá: 1\`12°15′.	$((x-y)/2)^2 + xy = 72\frac{1}{4}$
(10)	[Az egyenoldal 1\`]12°15′-höz mennyi? 8°30′.	$(x+y)/2 = \sqrt{72\frac{1}{4}} = 8\frac{1}{2}$
(11)	[8°30′ és] 8°30′-at, a mellékpárját, fektesd le.	
(1)	3°30′-at, az egybetartót	
(2)	az egyikből szakítsd ki,	$(x+y)/2 - (x-y)/2 = 5$
(3)	a másikhoz rakd hozzá.	$(x+y)/2 + (x-y)/2 = 12$
(4)	Az első 12, a második 5.	
(5)	12 az igibum, 5 az igum.	$x = 12$, $y = 5$

Algebrai értelmezés: előfeltételezett ismeretek

Obv. (9)-(10): $((x-y)/2)^2 + xy = ((x+y)/2)^2$

vagyis:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ és $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

tehát $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

Rev. (2)-(5): $(x+y)/2 - (x-y)/2 = y$ és $(x+y)/2 - (x-y)/2 = x$

Az algebrai értelmezés szerint a szöveg bizonyítja, hogy ezeknek az előismereteknek birtokában voltak a korabeliek, csak nem tudták őket szimbolikus nyelven kifejezni, ezért nem jelentek meg leírva.

YBC 6967 – geometriai értelmezés (Jens Hoyrup)

(1) [Az igib]um az igum felett, 7-tel megy túl,
(2) [igum] és igibum mennyi?
(3) T[e], a 7-et, amivel az igibum
(4) az igum felett túlmegy
(5) kettétörd: 3°30′;
(6) 3°30′ és 3°30′ együtt
(7) egybetart: 12°15′.
(8) A 12°15′-höz, amit megkapsz,
(9) [1`-et, a felül]etet rakd hozzá: 1`12°15′.
(10) [Az egyenoldal 1`]12°15′-höz mennyi? 8°30′.
(11) [8°30′ és] 8°30′-at, a mellékpárját, fektesd le.
(1) 3°30′-at, az egybetartót
(2) az egyikből szakítsd ki,
(3) a másikhoz rakd hozzá.
(4) Az első 12, a második 5.
(5) 12 az igibum, 5 az igum.