LAKATOS IMRE

BIZONYÍTÁSOK ÉS CÁFOLATOK

A MATEMATIKAI FELFEDEZÉS LOGIKÁJA

SZERKESZTETTE

JOHN WORRALL ÉS ELIE ZAHAR

GONDOLAT • 1981

A mű eredeti címe

IMRE LAKATOS

Proofs and Refutations
The Logic of Mathematical Discovery

Fordította

BORECZKY ELEMÉR

1981

A fordítást az eredetivel egybevetette,
szakmailag ellenőrizte és az utószót írta

DR. URBÁN JÁNOS

86

Raktári szám:
Leltári szám: 42.859

ISBN 963 280 739 1

© Cambridge University Press 1976
© Boreczky Elemér 1981. Hungarian translation

TARTALOM

A SZERKESZTŐK ELŐSZAVA

Nagy barátunk és tanárunk, Lakatos Imre, 1974. február 2-án váratlanul meghalt. Mint mindig, akkoriban is sok intellektuális terv foglalkoztatta, s ezek közül az egyik legfontosabb a „Bizonyítások és cáfolatok" című ragyogó esszé átdolgozott és kibővített változatának a kiadása volt. A tanulmány eredetileg négy részletben jelent meg 1963—64-ben, a *The British Journal for the Philosophy of Science*-ben. Lakatos már régen megkötötte a szerződést erre a könyvre, de halogatta kiadását, mivel azt remélte, hogy még kibővítheti, tovább javíthatja a tanulmányt, és néhány fontos anyaggal kiegészítheti. A munkát igencsak késleltette, hogy érdeklődése a természettudomány filozófiája felé fordult, de 1973 nyarán végleg elhatározta a kiadással kapcsolatos munkálatok megkezdését. Azon a nyáron mindketten többször beszélgettünk vele a könyvvel kapcsolatos terveiről, s most olyan könyvet próbáltunk összeállítani, amely — a sajnálatosan megváltozott körülmények ellenére — a lehető legnagyobb mértékben megfelel Lakatos akkori elképzeléseinek.

Így az e könyv első fejezeteként szereplő eredeti „Bizonyítások és cáfolatok" tanulmányhoz további három részt csatoltunk. Először a fő szöveget egészítettük ki egy második résszel, amely a Descartes—Euler-sejtés Poincarétől származó vektoralgebrai bizonyításával foglalkozik. Ennek alapja Lakatos 1961-es cambridge-i doktori értekezésének második fejezete. (Az eredeti „Bizonyítások és cáfolatok" a disszertáció első fejezetének jelentősen átdolgozott és továbbfejlesztett változata volt.) Az értekezés harmadik fejezetének egy része könyvünk első függeléke. Ez egy újabb esettanulmányt tartalmaz a bizonyítások és cáfolatok módszeréről, s annak a tételnek a Cauchy-féle bizonyításával foglalkozik, amely szerint bármely, folytonos függvényekből álló konvergens sorozat határfüggvénye is folytonos. A második fejezet és az első függelék remélhetően eloszlatja azoknak a matematikusoknak a gyakorta hangoztatott kételyeit, akik elolvasván a „Bizonyítások és cáfolatok"-at, úgy vélekedtek, hogy a bizonyításelemzés Lakatos által leírt módszere a poliéderek esetében — egy „szinte empirikus" kérdés kapcsán, ahol az ellenpéldák könnyen szemléltethetők — talán alkalmazható, de az „igazi" matematikában valószínűleg alkalmazhatatlan. A harmadik kiegészítés (II. függelék) szintén a disszertáció harmadik fejezetének egyik részletére épül. Ebben arról esik szó, hogy milyen következményei vannak Lakatos álláspontjának a matematika felépítésére, kifejtésére és tanítására vonatkozóan.

Lakatos egyik oka a könyv kiadásának halogatására annak felismerése volt, hogy e kiegészítő anyagok, bár számos új szempontot és álláspontjának teljesebb kidolgozását tartalmazzák, további megfontolást, további történeti kutatásokat igényelnek. Ez különösen a Cauchyval és Fourier-val foglalkozó anyagra érvényes (I. függelék). Magunk is tudjuk, hogy ebben a részben akadnak nehézségek, kétértelműségek, hiányosságok. Mégis úgy éreztük, nem változtathatjuk meg annak a tartalmát, amit Lakatos leírt. Ahhoz, hogy az anyagot alaposabban kidolgozzuk vagy kiegészítsük, hosszadalmas és aprólékos történeti kutatásra lett volna szükség, és egyikünk sem volt abban a helyzetben, hogy ezt elvégezze. El kellett döntenünk, hogy vagy egyáltalán nem adjuk ki ezt az anyagot, vagy töredékes formájában tesszük közzé, s az utóbbi mellett döntöttünk. Szerintünk sok érdekes dolog található benne, és reméljük, más kutatókat arra fog ösztönözni, hogy szükség esetén kiegészítsék vagy helyesbítsék.

Úgy gondoltuk, egyébként sem lenne helyes, ha módosítanánk a Lakatos által leírtak tartalmát, még azokat a részeket sem, amelyekről biztosan tudtuk, hogy Lakatos velük kapcsolatban megváltoztatta né-

zeteit. Ebben a kiadásban ezért arra szorítkozunk, hogy csillaggal jelölt megjegyzésekben hívjuk fel a figyelmet azokra a pontokra, amelyekkel kapcsolatban Lakatost változtatásokra próbáltuk volna rábeszélni, és (ami igen gyakran egybeesik ezzel) amelyeket szerintünk meg is változtatott volna. (A doktori disszertáció megírása és halála között eltelt tizenhárom évben intellektuális szemlélete természetesen alaposan megváltozott. Filozófiai nézeteinek változásáról 1970-ben írt egyik tanulmányában. Meg kell említenünk, hogy Lakatos szerint a tudományos kutatási programok általa kidolgozott módszertanának saját matematikai filozófiájára nézve is fontos következményei voltak.)

A szerkesztés során azokat az anyagokat, amelyeket Lakatos maga publikált (például a fő szöveg első fejezetét) néhány sajtóhiba és nyilvánvaló apróbb pontatlanság kivételével változatlanul hagytuk. A korábban kiadásra nem került anyagokat viszont elég alaposan átdolgoztuk, noha, ismételjük, csakis formailag, nem tartalmilag. Mivel ez az eljárás meglehetősen szokatlan, talán helyénvaló néhány szóval megindokolni.

Lakatos mindig nagy gondot fordított anyagai sajtó alá rendezésére. Mielőtt kiadásra bocsátotta volna őket, sok barátjának és kollégájának elküldte, hogy megbírálják és kijavítsák az esetleges hibákat. Az itt először megjelenő anyagokkal is biztosan ugyanez történt volna, és feltehetően sokkal drasztikusabb változtatásokra is sor került volna, mint amilyenekre mi vállalkozni mertünk. Mivel személyes tapasztalatainkból tudtuk, milyen nagy gondot fordított Lakatos arra, hogy álláspontját a lehető legvilágosabban fejtse ki, kötelességünknek éreztük, hogy legjobb képességeink szerint kijavítsuk a fogalmazási hibákat. Biztos, hogy ezek az új részek nem hangzanak olyan jól, mintha Lakatos maga dolgozza át az eredeti anyagot, de úgy éreztük, elég közel álltunk szerzőjükhöz, elég sokat dolgoztunk vele együtt néhány korábbi publikációján ahhoz, hogy megkísérelhessük az anyagot olyan szintre emelni, amely megközelíti Lakatos munkáinak magas színvonalát.

Nagyon örülünk annak, hogy lehetőségünk nyílott kötetbe szerkeszteni Lakatos fontos matematikai filozófiai tevékenységének néhány darabját, mivel ily módon leróhatjuk annak a szellemi és személyes adósságnak egy részét, amellyel mindketten tartozunk neki.

Az e könyv alapjául szolgáló anyagnak hosszú és változatos története van, amelyre részben már utaltunk az előszóban. Az 1963—64-ben publikált eredeti tanulmányt (e könyv első fejezetét) megelőző köszönetnyilvánításában Lakatos azt írta, hogy a tanulmány munkálataihoz 1958—59-ben, a cambridge-i King's College-ban látott hozzá, és első változatát 1959 márciusában olvasta fel Karl Popper szemináriumán, a London School of Economicsban. Egy másik változatát beépítette az 1961-ben készült cambridge-i doktori disszertációjába, amelyre e könyv többi része épül. A disszertáció R. B. Braithwaite professzor irányításával készült, s Lakatos köszönetét fejezte ki a Rockefeller Alapítvány pénzügyi támogatásáért is, meg „azért a sok segítségért, bátorításért és értékes bírálatért, amelyet dr. T. J. Smileytól kapott". A köszönetnyilvánítás a továbbiakban így hangzik: „Amikor a szerző a London School of Economicsban a végső változat elkészítésén dolgozott, különösen dr. J. Agassi, dr. I. Hacking, A. Musgrave, J. W. N. Watkins, valamint W. C. Kneale, R. Montague és Polányi M. professzorok bíráló megjegyzéseit és javaslatait vette figyelembe. A kivételek kizárása módszerének értelmezését Pólya György és B. L. van der Waerden professzorok bíráló megjegyzései hatására helyesbítette. A torzszülöttek kizárásának és a torzszülöttek kiigazításának módszere közti megkülönböztetést B. MacLennan javasolta.

A dolgozat hátterének a Pólya által felelevenített matematikai heurisztika és Popper kritikai filozófiája tekinthető."

E könyv összeállításában a szerkesztőknek John Bell, Mike Hallett, Moshé Machover és Jerry Ravetz segített, akik készségesen elolvasták a második fejezet és a függelékek vázlatát, majd hasznos bíráló megjegyzéseket tettek.

Szeretnénk még köszönetet mondani Sandra D. Mitchellnek és különösen Gregory Currie-nek, akik gondosan ellenőrizték Lakatos anyagának általunk végzett átdolgozását.

JOHN WORRALL
ELIE ZAHAR

A SZERZŐ BEVEZETÉSE

A gondolkodás történetében gyakran megesik, hogy előtérbe kerül és gyorsan halad azoknak a problémáknak a tanulmányozása, amelyek egy hatékonynak ígérkező új módszer segítségével vizsgálhatók, míg a többi problémát hajlamosak elhanyagolni, vagy akár el is felejteni, tanulmányozásukat pedig lebecsülni.

Úgy látszik, századunkban — a metamatematika lendületes fejlődésének eredményeként — ilyen helyzet alakult ki a matematikai filozófia területén.

A metamatematika tárgya a matematikának egy olyan absztrakciója, ahol a matematikai elméleteket formális rendszerekkel, a bizonyításokat jól képzett formulák bizonyos sorozataival, a definíciókat olyan „rövidítésekkel" helyettesítik, amelyek „elméletileg mellőzhetők", de „tipográfiailag kényelmesek".[1] Ezt az absztrakciót Hilbert azért vezette be, hogy hatékony eljárást biztosítson a matematika

1 *A. Church:* Introduction to Mathematical Logic. Princeton 1956. I. k. 76—77. o. Vö. még: *G. Peano:* Notations de logique mathématique. Torino 1894.; *B. Russell—A. N. Whitehead:* Principia Mathematica. I. k. Cambridge 1910. 12. o. Ez az euklideszi program Pascal-féle megfogalmazásának integráns része. L.: *B. Pascal:* Les réflexions sur la géométrie en général (De l'ésprit géométrique et de l'art persuader). *In:* J. Chevalier (szerk.): Oeuvres complètes. Párizs 1954. 575—604. o. Vö.: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. *In:* „Aristotelian Society Supplementary Volumes", 36. k. 1962. 158. o.

egyes módszertani problémáinak megközelítésére. Vannak azonban olyan problémák, amelyek kívül esnek a metamatematikai absztrakciók körén. Ezek közé tartozik az informális *(inhaltliche)* matematikával, az informális matematika fejlődésével és a matematikai problémamegoldás szituácionális logikájával kapcsolatos valamennyi kérdés.

Azt a matematikai filozófiai iskolát, amely hajlamos arra, hogy a matematikát formális axiomatikus absztrakciójával (és a matematika filozófiáját a metamatematikával) azonosítsa, „formalista" iskolának fogom nevezni. A formalista álláspont egyik legvilágosabb megfogalmazása Carnaptól származik. Carnap azt állítja, hogy *a)* „a filozófia helyét a tudomány logikája fogja elfoglalni...", *b)* „a tudomány logikája nem más, mint a tudomány nyelvének logikai szintaxisa...", *c)* „a metamatematika a matematikai nyelv szintaxisa".[1] Vagyis a matematika filozófiájának helyét a metamatematika foglalja el.

A formalizmus a matematika történetét elszakítja a matematika filozófiájától, mivel a matematikáról alkotott formalista elképzelés szerint a matematikának valójában nincsen története. A formalisták bármelyike alapjában véve egyetértene Russell „romantikusan" megfogalmazott, de komolyan gondolt megjegyzésével, hogy Boolenak „A gondolkodás törvényei" (Laws of Thought. 1854.) című munkája volt „az első könyv, amelyet valaha is a matematikáról írtak".[2] A formalizmus nem hajlandó matematikának tartani annak nagy részét, amit általában oda sorolnak, s a matematika fejlődéséről egy szót sem tud szólni. A matematikai elméletek „alkotó" korszakai közül egyiket sem, a „kritikai" korszakok közül alig néhányat bocsátanának be a formalista mennyországba, ahol mint szeráfok, minden földi bizonytalanság szennyétől megtisztítva lakoznak a matematikai elméletek. A formalisták azért rendszerint a bukott angyalok számára is nyitva hagynak egy kis hátsó ajtót: ha kiderül, hogy a „matematika

1 *R. Carnap:* Logische Syntax der Sprache. Bécs 1934. XIII. és 9. o.

2 *B. Russell:* Miszticizmus és logika. Bp. 1976. 120. o. A „Miszticizmus és logika" előszavában Russell a következőket mondja erről az esszéről: „Hangvétele részben azzal magyarázható, hogy a szerkesztő igen szépen megkért arra, hogy a cikket »a lehető legromantikusabban« fogalmazzam meg."

és valami egyéb dolog keverékére" olyan formális rendszert tudunk találni, amely „bizonyos értelemben magában foglalja e keveréket", akkor ez a rendszer is bejuthat a mennybe.[1] Így Newtonnak négy évszázadon át kellett várakoznia, mígnem Peano, Russell és Quine végül is besegítette a mennyországba, miután sikerült formalizálniuk az analízist. Dirac szerencsésebb volt: Schwarz még életében megmentette a lelkét. Talán itt kell említést tennünk a metamatematikus paradox helyzetéről: formalista, sőt, még deduktivista kritériumok alapján sem tisztességes matematikus. Dieudonné szerint „minden matematikusnak, *aki ad valamit a szellemi integritásra* (kiemelés tőlem — *L. I.*), abszolút szükségszerű" axiomatikus formába foglalni érvelését.[2]

Manapság, a formalizmus uralma alatt, az ember hajlik arra, hogy Kantot parafrazálja: a matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, *vakká*, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, *üressé* válik.

A „formalizmus" a logikai pozitivista filozófia bástyája. A logikai pozitivizmus szerint egy állításnak csak akkor van értelme, ha vagy „tautologikus", vagy empirikus. Mivel az informális matematika se nem „tautologikus", se nem empirikus, szükségképpen értelmetlen, merő badarság.[3] A logikai pozitivizmus dogmái ártanak a matematika történetének és filozófiájának.

1 *H. B. Curry:* Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Amszterdam 1951. 56—57. o.

2 *J. Dieudonné:* Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *In:* „Revue Scientifique", 1939. 225. o.

3 Turquette szerint a Gödel-féle mondatok értelmetlenek. (*A. Turquette:* Gödel and the Synthetic A Priori. *In:* „The Journal of Philosophy", 1950. 129. o.) Turquette Copival vitatkozik, aki azt állítja, hogy mivel ezek a mondatok *a priori igazságok*, de nem analitikusak, cáfolják az *a priori* analitikus elméletét. (*I. M. Copi:* Modern Logic and the Synthetic *A Priori*. *In:* „The Journal of Philosophy", 1949. 243—245. o.; Gödel and the Synthetic *A Priori:* a Rejoinder. *In:* „The Journal of Philosophy", 1950. 633—636. o.) Egyikük sem veszi észre, hogy ebből a szempontból a Gödel-féle mondatok sajátos státusa abból ered, hogy ezek a tételek nem formális matematikai tételek, és így tulajdonképpen az informális matematikának egy speciális esetben betöltött státusáról vitatkoznak.

Ezekben az esszékben a *matematika metodológiájának* néhány problémáját akarom megvizsgálni. A „metodológia" szót hasonló értelemben használom, mint Pólya és Bernays a „heurisztiká"-t,[1] vagy Popper a „felfedezéslogiká"-t, a „szituácionális logiká"-t.[2] A „matematika metodológiája" kifejezés mai, a „metamatematika" szinonimájaként való túlzott használata kétségtelenül a formalizmus jegyét viseli magán. Azt mutatja, hogy a formalista matematikai filozófiában a metodológiának — mint felfedezéslogikának — nincs megfelelő helye.[3] A formalisták szerint a matematika a képletekbe foglalt mate-

1 *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Bp. 1977., különösen 142—143. o.; *G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. London 1954.; *Pólya Gy.:* A problémamegoldás iskolája. Bp. 1966.; *P. Bernays:* Review of Pólya's How to Solve It. *In:* „Dialectica", 1947., különösen 187. o.

2 *K. R. Popper:* Logik der Forschung. Bécs 1934. 90. o.; The Poverty of Historicism. London 1957. 147. o. és kk.

3 Ezt például Tarski két írásával szemléltethetjük. (*A. Tarski:* Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. *In:* „Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres Varsovie", 1930. Cl. III. 22—29. o. és Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. *In:* „Monatshefte für Mathematik und Physik", 1930. 361—404. o.) Az első dolgozatban Tarski a „deduktív tudományok" kifejezést *kimondottan* a „formalizált deduktív tudományok" rövidítéseként alkalmazza. A következőket mondja: „A formalizált deduktív tudományok alkotják a metamatematika kutatási területét, nagyjából azonos értelemben, mint ahogy a térbeli entitások alkotják a geometriai kutatások területét." A második dolgozatban fondorlatosan imperialista módon kicsavarja ezt az értelmes megfogalmazást: „A deduktív tudományok éppúgy a deduktív tudományok metodológiájának tárgyát alkotják, ahogy a térbeli entitások a geometriáét, az állatok az állattanét. Természetesen nem minden deduktív tudomány formája alkalmas arra, hogy tudományos vizsgálódás tárgya legyen. Azok a tudományok például, amelyek nem nyugszanak határozott logikai alapon, amelyeknek nincsenek pontos levezetési szabályaik, és amelyeknek a tételeit a köznyelv rendszerint kétértelmű és pontatlan kifejezéseivel fogalmazzák meg — egyszóval a nem formalizált tudományok —, nem alkalmasak erre. A metamatematikai kutatások tehát a formalizált deduktív tudományok tárgyalására korlátozódnak." Ebben az az újdonság, hogy míg az első megfogalmazás azt állította, hogy a metamatematika tárgyát a formalizált deduktív tudományok képzik, a második megfogalmazás szerint a metamatematika tárgya csak azért korlátozódik a formalizált deduktív tudományokra, mert a nem formalizált deduktív tudományok egyáltalán nem alkalma-

matikával azonos. De mit lehet *felfedezni* egy formalizált elméletben? Kétféle dolgot. *Először:* olyan problémák megoldását, amelyeket egy megfelelően programozott Turing-gép véges időn belül képes megoldani. (Például: bizonyítás-e valami, amiről ezt feltételezik, vagy nem?) Nincs olyan matematikus, akit érdekelne annak a halálosan unalmas mechanikus „módszernek" a végigvitele, amelyet az efféle eldöntési eljárások előírnak. *Másodszor:* olyan problémák megoldását fedezheti fel az ember (például: egy eldönthetetlen elmélet egy bizonyos formulája tétel-e, vagy nem), ahol a „szabályozhatatlan intuíció és a jó szerencse" az egyetlen eligazító „módszer".

Az élő matematikában nemcsak ez a soványka választási lehetőség van egy gép racionalitása és a vak találgatás irracionalitása között:[1]

sak arra, hogy tudományos vizsgálat tárgyát képezzék. Ez az állítás azt is magában foglalja, hogy egy formalizált tudomány előtörténete nem lehet tudományos vizsgálat tárgya, eltérően egy állatfaj előtörténetétől, amely a valóban tudományos fejlődéselmélet tárgya lehet. Senki sem kételkedik abban, hogy egy matematikai elmélet egyes problémáit csakis azután lehet megvizsgálni, miután formalizálták az elméletet, mint ahogy az emberi lényekkel kapcsolatos kérdések némelyikét (mondjuk, az emberek anatómiáját) csak haláluk után vizsgálhatjuk meg. Mégis kevesen fognak ebből arra a következtetésre jutni, hogy az emberi lények csak akkor „alkalmasak tudományos vizsgálatra", ha „halottként" szerepelnek, tehát a biológiai kutatások a holtak tárgyalására korlátozódnak. Bár nem lepődnék meg, ha Vesalius valamelyik lelkes tanítványa az anatómia kialakulásának dicsőséges napjaiban, amikor a boncolás hatékony új módszere kialakult, az élettant azonosította volna a holttestek elemzésével.
Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences (New York 1941.) című műve előszavában Tarski részletesen kifejti a formális rendszerektől eltérő bármely metodológia lehetőségére vonatkozó tagadó álláspontját: „Az empirikus tudományok metodológiájával foglalkozó könyv... főként tapogatózások és sikertelen erőfeszítések értékelésére és kritikájára kénytelen korlátozódni." Ennek az az oka, hogy az empirikus tudományok tudománytalanok: Tarski definíciója szerint ugyanis a tudományos elmélet „bizonyos szabályok szerint rendezett, igazolt állítások rendszere" (uo.).

1 A formalista filozófia egyik legveszélyesebb hóbortja az, hogy 1. valamit — helyesen — állít a formális rendszerekről, 2. azután azt mondja, hogy ez a „matematikára" is érvényes, s ez ismét helyes, ha elfogadjuk a matematika azonosítását a formális rendszerekkel, 3. végül hamis jelentéseltolással a „matematika" szót ismét

2

Budapesti Műszaki Egyet... Marxizmus-Leninizmus Intézet KÖNYVTÁRA

az informális matematika vizsgálata a gyakorló matematikusok számára gazdag szituácionális logikát eredményez, egy olyan szituácionális logikát, amely nem mechanikus, nem irracionális, de amelyet a formalista filozófia nem ismerhet el, még kevésbé ösztönözhet.

A matematikatörténet és a matematikai felfedezés logikája, azaz a matematikai gondolkodás filogenezise és ontogenezise,[1] csak a formalizmus kritikájával és végső elutasításával építhető fel.

A matematika formalista filozófiájának azonban nagyon mély gyökerei vannak. Ez a *dogmatikus* matematikai elméletek hosszú láncolatának utolsó láncszeme. Több mint kétezer éve vitatkoznak egymással a *dogmatikusok* és a *szkeptikusok*. A dogmatikusok azt állítják, hogy — emberi értelmünk és/vagy érzékszerveink segítségével — képesek vagyunk eljutni az igazsághoz, és meg is tudjuk állapítani, hogy eljutottunk hozzá. A szkeptikusok viszont vagy azt állítják, hogy egyáltalán nem juthatunk el az igazsághoz (hacsak misztikus élményeken keresztül nem), vagy azt, hogy nem tudhatjuk, képesek vagyunk-e elérni avagy hogy elértük-e az igazságot. Ebben a nagy vitában, amelyben újra és újra korszerűsítik az érveket, a matematika a dogmatizmus

a hagyományos értelemben használja. Erről mondja Quine, hogy „ez a matematika jellegzetes helyzetét tükrözi: a matematikus a szabályozhatatlan intuíció és jó szerencse segítségével bukkan rá egy bizonyításra, más matematikusok viszont később ellenőrizni tudják ezt a bizonyítást" (*W. V. O. Quine:* Mathematical Logic. Cambridge—Massachusetts 1951. 87. o.). Gyakran azonban igen kényes vállalkozásnak bizonyul egy *köznapi* (informális) bizonyítás ellenőrzése. Ahhoz, hogy valaki ráakadjon egy „hibára" éppen annyi intuícióra és szerencsére van szükség, mint ahhoz, hogy rájöjjön egy bizonyításra. Az informális bizonyításokban a „hibák" felfedezése néha évtizedekbe telhet, ha nem évszázadokba.

1 Poincaré és Pólya szerint Haeckel „biogenetikai alaptörvénye", amely szerint az ontogenezis a filogenezis megismétlése, a szellemi fejlődésre is alkalmazható, különösen a matematikában. [*H. Poincaré:* Science et méthode. Párizs 1908. 135. o.; *G. Pólya:* The Teaching of Mathematics and the Biogenetic Law. *In:* I. J. Good (szerk.): The Scientist Speculates. London 1962. 352—356. o.] Hogy Poincarét idézzük: „A zoológusok azt állítják, hogy az állat embrionális fejlődése röviden megismétli őseinek a geológiai korszakokban lezajlott egész történetét. Úgy látszik, ugyanez a helyzet a szellemi fejlődéssel is... Ezért legelső kalauzunknak a tudomány történetének kell lennie."

büszke fellegvára volt. Valahányszor „válságba" került az adott kor matematikai dogmatizmusa, egy új változat ismét teljes pontosságot és végleges alapokat szolgáltatott, ily módon állítván helyre azt az elképzelést, hogy a matematika ellentmondást nem tűrő, tévedhetetlen, cáfolhatatlan tudomány, „az egyetlen tudomány..., amellyel Istennek ez ideig az emberiséget megajándékoznia tetszett".[1] A legtöbb szkeptikus belenyugodott a dogmatikus ismeretelmélet e védőbástyájának rendíthetetlenségébe.[2] Igencsak ideje már, hogy leszámoljunk ezzel a képzettel.

Az itt következő tanulmány lényege vitatja a matematikai formalizmust, de a matematikai dogmatizmus végső állásait közvetlenül nem támadja. Szerény célja annak a nézetnek a kifejtése, hogy az informális, kváziempirikus matematika nem a kétségbevonhatatlanul megalapozott tételek számának egyhangú növekedése révén fejlődik, hanem a találgatások szüntelen helyesbítésével, az elmélkedés és a kritika, a bizonyítások és cáfolatok logikája segítségével. Mivel azonban a metamatematika az éppen most gyorsan fejlődő informális, kváziempirikus matematika egyik paradigmája, a tanulmány, témájánál fogva, a modern matematikai dogmatizmussal is szembefordul. Aki tanulmányozza a metamatematika legújabb történetét, az itt leírt modelleket saját területén is fel fogja ismerni.

A dialógus forma a történet dialektikáját kívánja tükrözni: az a célja, hogy valamiféle *racionálisan rekonstruált vagy „desztillált" történelmet* mutasson be. *A tényleges történelem ez alatt, a lábjegyzetekben olvasható, melyek legtöbbjét ezért a tanulmány szerves részének kell tekinteni.*

1 *T. Hobbes:* Leviatán. Bp. 1970. 31 o.

2 A matematika szerepéről a dogmatikusok és szkeptikusok vitájában lásd: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. Id. kiad. 155—184. o.

1. Egy probléma és egy sejtés

A dialógus egy képzeletbeli tanteremben folyik. A hallgatókat érdekelni kezdi egy PROBLÉMA: van-e olyan összefüggés a poliéderek — különösen a *szabályos poliéderek* — c csúcsainak, $é$ éleinek és l lapjainak száma között, amely analóg a *sokszögek* csúcsainak és éleinek száma közti triviális összefüggéssel, vagyis azzal, hogy a sokszögeknek annyi csúcsa van ahány éle ($c=é$)? Ez az összefüggés teszi ugyanis lehetővé, hogy a *sokszögeket* az élek (vagy a csúcsok) száma szerint osztályozzuk: háromszögek, négyszögek, ötszögek stb. Egy ezzel analóg összefüggés segítségével a *poliédereket* is osztályozni tudnánk.

Számtalan próbálkozás és tévedés után a hallgatók észreveszik, hogy minden szabályos poliéder esetében $c-é+l=2$.[1] Az egyik hall-

1 Ezt az összefüggést először Euler vette észre. (*L. Euler:* Elementa Doctrinae Solidorum. *In:* „Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae", 1758. 109—140. o.) Euler eredeti problémája a poliéderek osztályozása volt, s ennek nehézségére a szerkesztő összefoglalása mutatott rá: „Míg a síkgeometriában a sokszögek *(figurae rectilineae)* nagyon könnyen osztályozhatók az oldalak száma szerint — amely természetesen egyenlő a szögek számával —, a térgeometriában a poliéderek *(corpora hedris planis inclusa)* osztályozása sokkal nehezebb feladatot jelent, mivel ehhez önmagában nem elégséges a lapok számának ismerete."
Euler eredményének kulcsa éppen a *csúcs* és az *él* fogalmának felfedezése volt. Euler mutatta ki először, hogy a poliéderek (topológiai) jellegét a lapok száma mellett a poliéder felületén található *pontok* és *vonalak* száma határozza meg. Érdekes, hogy míg egyrészt, kiemelte az általa használt fogalmak újszerűségét, és azt,

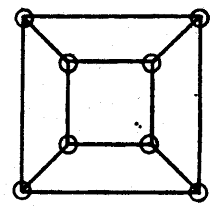
gató úgy *véli*, hogy ez mindenféle poliéderre alkalmazható. A többiek megpróbálják megcáfolni ezt a *sejtést*, sokféleképpen vizsgálgatják, de továbbra is igaznak bizonyul. Az eredmények *alátámasztják* a sejtést, és azt sugallják, hogy *bizonyítható* is. A *probléma* és a *sejtés* felvetését követően lépünk most be a tanterembe.[1] A tanár éppen arra készül, hogy *bebizonyítsa* a sejtést.

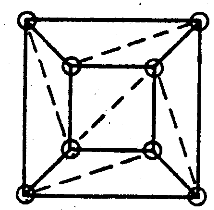
hogy a régi „*latus*" (oldal) helyett az „*acies*" (él) terminust kellett kigondolnia, mivel a *latus* fogalma a sokszögekhez kapcsolódott, míg Eulernek poliedrikus fogalomra volt szüksége, másrészt, az általa bevezetett pontszerű csúcsok jelölésére mégis megőrizte az „*angulus solidus*" (szilárd szög) terminust. Újabban általánosan elterjedt az a nézet, hogy e téren Descartes-ot illeti meg az elsőség. Ez a nézet Descartes-nak arra a körülbelül 1639-ből származó kéziratára épül, amelyet Leibniz 1775—76-ban másolt le Párizsban az eredetiről, s 1860-ban Foucher de Careil fedezett fel újra és adott ki. Némi fenntartás nélkül mégsem tulajdonítható Descartes-nak az elsőség. Igaz, Descartes megállapította, hogy a síkszögek száma $2\Phi+2\alpha-4$, ahol Φ a lapok számát, α a szilárd szögek számát jelenti. Az is igaz, hogy Descartes megállapította: kétszer annyi síkszög van, mint ahány él *(latera)*. Ha ezt a két állítást összekapcsoljuk, természetesen megkapjuk az Euler-formulát. Descartes azonban nem látta értelmét annak, hogy ezt megtegye, mivel még szögekben (szilárd és síkszögekben) meg lapokban gondolkodott, és nem végezte el azt a tudatos forradalmi változtatást, amely szerint a poliéderek teljes topológiai jellemzéséhez a 0-dimenziós csúcsok, az egydimenziós élek és a kétdimenziós lapok fogalma ad szükséges és elégséges alapot.

1 Euler elég alaposan megvizsgálta sejtésének következményeit, ellenőrizte hasáboknál, gúláknál stb. Azt is hozzátehette volna, hogy ugyanebből a sejtésből ered az az állítása is, hogy csak öt szabályos test létezik. Egy másik következménye ennek a sejtésnek az a nagyon plauzibilis, de nem bizonyított állítás is, amely szerint négy szín elegendő bármely térkép kiszínezéséhez.
A $c-é+l=2$ összefüggéssel kapcsolatban Pólya tárgyalja a *sejtés* és az *ellenőrzés* fázisát. (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 35—41. o.) Itt azonban megáll, és nem foglalkozik a *bizonyítás* szakaszával, noha természetesen hangsúlyozza, hogy szükség van a „bizonyító feladatok" heurisztikájára. (*Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 167. o.) A mi gondolatmenetünk ott kezdődik, ahol Pólya megállt.

2. Egy bizonyítás

TANÁR: Az előző órán eljutottunk a poliéderekre vonatkozó következő sejtés megfogalmazásáig: minden poliéder esetében $c-é+l=2$, ahol c a csúcsok, $é$ az élek, l pedig a lapok számát jelöli. Különböző módszerekkel ellenőriztük ezt a sejtést, de még nem bizonyítottuk be. Talált-e valamelyikük bizonyítást?
SZIGMA TANULÓ: „Ami engem illet, be kell vallanom, hogy még nem tudtam szigorú bizonyítást konstruálni erre a tételre... Mivel azonban oly sok esetben bizonyult igaznak, nem lehet kétséges, hogy minden testre vonatkozóan igaz. Az állítást tehát, úgy látszik, kielégítően megindokoltuk."[1] Ha azonban ön talált egy bizonyítást, kérem, fejtse ki!
TANÁR: Valóban van egy bizonyításom. Ez a következő gondolat-


1. ábra


2. ábra

kísérletből áll. *1. lépés:* Képzeljük el, hogy a poliéder belül üres, felülete pedig vékony gumiból van. Ha az egyik lapját kivágjuk, a megmaradt felületet kiteríthetjük a táblára, anélkül, hogy elszakítanánk. A lapok és az élek deformálódnak ugyan, sőt, az élek esetleg el is görbülnek, de c és $é$ nem változik; vagyis az eredeti poliéder esetében $c-é+l=2$, akkor és csak akkor igaz, ha a fentiek szerint kiterített háló esetében $c-é+l=1$, mivel egy lapot kivágtunk. (Az 1. ábrán egy kocka kiterített hálója látható.) *2. lépés:* Térképünket, amely valóban

1 *L. Euler:* Elementa Doctrinae Solidorum. Id. kiad. 119. és 124. o. Később azonban mégis kísérletet tett a bizonyításra. (*L. Euler:* Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatus Quibus Solida Hedris Planis Inclusa sunt Praedita. *In:* „Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae", 1758. 140—160. o.)

(*a*) 3. ábra (*b*)

úgy néz ki, mint egy földrajzi térkép, háromszögeléssel fölmérjük. (Esetleg görbe) átlókat húzunk azokba az (esetleg görbe oldalú) sokszögekbe, amelyek még nem (esetleg görbe oldalú) háromszögek. Minden egyes átlóval mind $é$-t, mind l-t eggyel növeljük, vagyis $c-é+l$ összege nem változik (2. ábra). *3. lépés:* Most a háromszögekre osztott hálóból egyenként eltávolítjuk a háromszögeket. Egy háromszög eltávolítása vagy egy él eltávolításával jár, amelynek következtében egy lap és egy él eltűnik (3(*a*) ábra), vagy két él és egy csúcs eltávolításával, amelynek eredményeképpen egy lap, két él és egy csúcs tűnik el (3(*b*) ábra). Így, ha az egyik háromszög eltávolítása előtt $c-é+l=1$ volt, ugyanannyi marad a háromszög eltávolítása után is. Vagyis $c-é+l=1$ igaz. Sejtésünket tehát bebizonyítottuk.[1]

DELTA TANULÓ: Nevezze most már *tételnek*, tanár úr! Nincs benne többé semmi sejtésszerű.[2]

1 Ennek a bizonyításnak az ötlete Cauchytól ered. (*A. L. Cauchy:* Recherches sur les polyèdres. *In:* „Journal de l'École Polytechnique", 1813. 68—86. o.)

2 Delta véleményét, hogy az előbbi bizonyítás kétséget kizáróan alátámasztja a „tételt", a XIX. században sok matematikus osztotta. (Például: *A. L. Crelle:* Lehrbuch der Elemente der Geometrie. I. k. Berlin 1826. 668—671. o.; *L. Matthiessen:* Über die scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern. *In:* „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 1863. 449—450. o.; *E. de Jonquières:* Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. *In:* „Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences", 1890. 110—115. o. és Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Uo. 169—173. o.) Egy jellemző részlet így hangzik: „Cauchy bizonyítását követően teljesen bizonyossá vált, hogy a $c-é+l=2$ elegáns összefüggés valamennyi poliéderre igaz, pontosan úgy, ahogy azt Euler 1752-ben állította. 1811-ben minden bizonytalanság eloszlott." (*E. de Jonquières:* Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. Id. kiad. 111—112. o.)

ALFA TANULÓ: Nem tudom. Azt ugyan belátom, hogy ezt a kísérletet egy kocka vagy egy tetraéder esetében el lehet végezni, de honnan tudjam, hogy *bármilyen* poliéderrel elvégezhető. Biztos-e a tanár úr például abban, hogy *minden poliéder kiteríthető a táblán, miután az egyik lapját eltávolítottuk?* Kételkedem az első lépés helyességében.

BÉTA TANULÓ: Biztos, hogy *a térkép háromszögelésekor minden új élhez egy új lap is járul?* Én a második lépésben kételkedem.

GAMMA TANULÓ: Biztos, hogy *amikor egyenként eltávolítjuk a háromszögeket, csak az az alternatíva, hogy vagy egy él, vagy két él és egy csúcs tűnik el?* Avagy biztos-e akár csak abban is, hogy *e folyamat végén csak egy háromszög marad?* Nekem a harmadik lépés helyességét illetően vannak kételyeim.[1]

TANÁR: Természetesen egyikben sem vagyok biztos.

ALFA: Hiszen akkor rosszabbul állunk, mint az előbb! Egy sejtés helyett most már legalább hárommal állunk szemben! És ezt nevezi ön „bizonyításnak"!

TANÁR: Elismerem, hogy a hagyományos „bizonyítás" szó az előző gondolatkísérlet esetében joggal tartható egy kicsit félrevezetőnek. Magam sem hiszem, hogy ez a „bizonyítás" igazolja a sejtést.

DELTA: Hát akkor mit csinál? Ön szerint mit bizonyít egy matematikai bizonyítás?

TANÁR: Kényes kérdés, később megpróbálunk válaszolni rá. Addig is azt javaslom, hogy a hagyományos „bizonyítás" *terminus technicust* az olyan *gondolatkísérlet* — avagy *„kvázikísérlet"* — jelölésére tartsuk fenn, amely *az eredeti sejtésnek további sejtésekre vagy lemmákra való lebontását indítja el*, miáltal az eredeti sejtést tőle esetleg egészen távol eső ismeretanyagba *ágyazza*. A mi „bizonyításunk" például az eredeti sejtést — amely kristályokra vagy, mondjuk, szilárd testekre vonatkozott — a gumilapok elméletébe ágyazta. Egész biztos, hogy Descartes vagy Euler, az eredeti sejtés alkotói, erről még csak nem is álmodtak.[2]

1 Tanulócsoportunk igencsak fejlett. Cauchy, Poinsot és a XIX. század megannyi kitűnő matematikusa előtt fel sem merültek ezek a kérdések.

2 A gondolatkísérlet *(deiknümi)* a matematikai bizonyítás legősibb módja. Az Eukleidész előtti görög matematikában ez dominált. (Vö.: *Szabó Á.:* „Deiknymi"

als mathematischer Terminus für „Beweisen". *In:* „Maia", 1958. 1—26. o.) Az ókori matematikusok számára közhelynek számított, hogy heurisztikus értéküket tekintve a sejtések (vagy tételek) megelőzik a bizonyításokat. Ez abból következett, hogy a heurisztikában az *„analízis"* elsőbbséget élvezett a *„szintézissel"* szemben. (Kitűnő értekezést írt erről *R. Robinson:* Analysis in Greek Geometry. *In:* „Mind", 1936. 464—473. o.) Proklosz szerint „előre tudnunk kell azt, amit keresünk..." (*T. L. Heath:* The Thirteen Books of Euclid's Elements. Cambridge 1925. I. k. 129. o.) „Azt mondták, hogy tétel az, amit azért fogalmaznak meg, hogy éppen a tervezett dolgot mutassák ki" — mondja Papposz. (Uo. 10. o.) A görögök nem tartották sokra az olyan tételeket, amelyekre történetesen deduktív gondolkodással akadtak rá, anélkül, hogy előzőleg már kitalálták volna őket. *Porizmának* nevezték őket, korolláriumnak, a bizonyított tétel egyenes következményének, véletlenszerű eredménynek, amely egy tétel bizonyításából vagy egy probléma megoldásából sarjad, olyan eredménynek, amelyet nem kerestek kifejezetten, csak véletlenül, minden erőfeszítés nélkül adódott, és amely — Proklosz szavaival — valamiféle szélcsendet *(ermaion)* vagy jutalmat *(kerdosz)* jelent. (Uo. 278. o.) Euler egyik könyvének szerkesztői összefoglalásában olvashatjuk, hogy az aritmetikai tételeket „sokkal előbb felfedezték, mint ahogy igazságukat szigorú bizonyításokkal megerősítették". (*L. Euler:* Specimen de usu Observationum in Mathesi Pura. *In:* „Novi Commentarii Academiae Scientarum Petropolitanae", 1756—57. 19—21. o.) A szerkesztő és Euler egyaránt a modern *„indukció"* kifejezéssel jelöli a felfedezésnek ezt a folyamatát az ókori *„analízis"* helyett. (Uo.) A heurisztika értékrendje — az eredmény megelőzi az érvelést, a tétel a bizonyítást — mélyen gyökerezik a matematikai folklórban. Hadd idézzünk néhány változatot erre az ismerős témára! Azt mondják, Khrüszipposz a következőket írta Kleanthésznek: „Csak küld el a tételeket, a bizonyításokat majd én megtalálom." Gauss állítólag így panaszkodott: „Már régen megvannak az eredményeim, csak azt nem tudom még, hogyan kell elérnem őket." (Vö.: *A. Arber:* The Mind and the Eye. Cambridge 1954. 47. o.) Riemann meg emígy: „Bárcsak meglennének a tételek! Akkor már elég könnyen megtalálnám a bizonyításokat." (Vö.: *O. Hölder:* Die mathematische Methode. Berlin 1924. 487. o.) Pólya is hangsúlyozza: „Egy matematikai tételre először rá kell jönni, mielőtt bizonyítaná az ember." (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. VI. o.)

A *„kvázikísérlet"* kifejezés Euler előbb idézett művének szerkesztői összefoglalásából származik. A szerkesztő szerint „mivel a számokat kizárólag a tiszta értelemhez sorolhatjuk, alig értjük, miképpen használhatók fel a megfigyelések és a *kvázikísérletek* a számok természetének vizsgálatában. Valójában mégis, ahogy ezt itt alapos érvekkel ki fogom mutatni, a számok ma ismert tulajdonságait jórészt megfigyelések segítségével fedezték fel..." (Pólya — fentebb idézett munkájának 3. oldalán — ezt az idézetet tévesen Eulernek tulajdonította.)

3. A bizonyítás kritikája helyi, de nem globális ellenpéldákkal

TANÁR: A sejtésnek ilyen, a bizonyítás által elindított lebontása új távlatokat nyit az ellenőrzés előtt. A lebontás a sejtést szélesebb fronton bontakoztatja ki, s így kritikánk több célpontra irányulhat. Egy helyett most már legalább három lehetőségünk van arra, hogy ellenpéldákat sorakoztassunk fel!

GAMMA: Jeleztem már, hogy nem tetszik nekem a tanár úr harmadik lemmája (vagyis az, hogy a kiterítést követő háromszögelésből származó háromszögeknek a hálóból való eltávolítása során csak két lehetőségünk van: vagy egy élt, vagy két élt és egy csúcsot távolítunk el). Azt gyanítom, hogy más formációk is létrejöhetnek, amikor eltávolítunk egy háromszöget.

TANÁR: A gyanú még nem kritika.

GAMMA: Hát az *ellenpélda* kritika?

TANÁR: Természetesen. A sejtések nem vesznek tudomást az ellenszenvről és a gyanúról, de az ellenpéldákat kénytelenek figyelembe venni.

THÉTA *(félre)*: A sejtések nyilván nagyon is különböznek azoktól, akik képviselik őket.

GAMMA: Triviális ellenpéldát hozok fel. Vegyük azt a háromszögekből álló hálót, amit azt követően kapunk, hogy a kockán elvégezzük az első két műveletet (2. ábra). Ha most ennek a hálónak a *belsejéből* veszek el egy háromszöget — ahogy a mozaikjátékból is ki lehet venni egy darabot —, akkor ezt a háromszöget anélkül vettem el, hogy egyetlen élt vagy csúcsot eltávolítottam volna. Vagyis a harmadik lemma hamis, és nemcsak a kocka, hanem a tetraéder kivételével *minden* poliéder esetében. A tetraéder esetében ugyanis a kiterített hálón valamennyi háromszög határháromszög. Az ön bizonyítása tehát bebizonyítja az Euler-tételt a tetraéderre. Azt viszont már *tudjuk*, hogy a tetraéder esetében $c-é+l=2$, akkor miért bizonyítjuk?

TANÁR: Igaza van. De ne feledkezzünk meg arról, hogy a kocka, ami a harmadik lemmára nézve ellenpélda, nem ellenpéldája a fő sejtésnek, mivel a kockánál is $c-é+l=2$. Kimutatta ugyan az érvelés — a bizonyítás — gyengeségét, de a sejtés hamisságát nem.

ALFA: Elveti tehát ezt a bizonyítást?

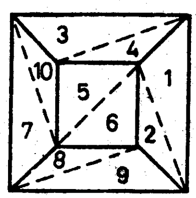
TANÁR: Nem. A kritika nem szükségképpen rombolás. Úgy fogom helyesbíteni a bizonyításomat, hogy megállja a helyét a kritikával szemben.

GAMMA: Hogyan?

TANÁR: Mielőtt elmondanám, hadd vezessem be a következő terminológiát! Az olyan ellenpéldát, amely csak egy lemmát cáfol, anélkül, hogy szükségképpen megcáfolná a fő sejtést is, „*helyi ellenpéldá*nak", az olyan ellenpéldát, amely magát a fő sejtést cáfolja meg, „*globális ellenpéldá*nak" fogom nevezni. A maga ellenpéldája tehát helyi, de nem globális. A helyi, de nem globális ellenpélda a bizonyítás kritikája, de nem a sejtésé.

GAMMA: Vagyis lehet, hogy a sejtés igaz, de a tanár úr bizonyítása ezt nem bizonyítja.

TANÁR: Viszont könnyen finomíthatom és *helyesbíthetem a bizonyítást* úgy, hogy a hamis lemmát egy némileg módosított lemmával cserélem fel, amelyet majd a maga ellenpéldája sem cáfol meg. Most már nem azt állítom, hogy *bármelyik háromszög eltávolítása az említett két változat egyike szerint megy végbe*, hanem csak azt, hogy *az eltávolítás során bármely határháromszög eltávolítása e változatok valamelyike szerint megy végbe*. Visszatérve a gondolatkísérletre, mindössze annyit kell tennem, hogy a harmadik lépés megfogalmazását értelemszerűen kiegészítem egyetlen szóval: „a háromszögekre osztott hálóból



4. ábra

egyenként eltávolítjuk a *határ*háromszögeket". Bizonyára egyetértenek azzal, hogy csupán jelentéktelen módosításra volt szükség a bizonyítás helyesbítéséhez.[1]

GAMMA: Nem hiszem, hogy ez a módosítás olyan jelentéktelen. Tulajdonképpen igen szellemes. Hogy ezt világossá tegyem, be fogom bizonyítani, hogy hamis. Vegyük ismét a kocka kiterített hálóját, és a 4. ábrán feltüntetett sorrendben távolítsunk el a tíz háromszögből nyolcat! A nyolcadik háromszög eltávolításakor, amely addigra már kétségtelenül határháromszög, két élt távolítunk el, de egyetlen csúcsot sem, ami $c-é+l$ összegét 1-gyel megváltoztatja. És marad a 9-es és 10-es számú, egymástól különálló háromszög.

TANÁR: Meg tudnám őrizni a látszatot, ha azt mondanám, határháromszög alatt olyan háromszöget értettem, amelynek az eltávolítása után a háló összefüggő marad. Az intellektuális tisztesség azonban visszatart attól, hogy álláspontomat újra és újra módosítsam „úgy értettem" kezdetű mondatokkal, ezért elismerem, hogy most kénytelen leszek a háromszögek eltávolítási műveletének második változatát egy harmadikkal *felcserélni:* úgy távolítjuk el egyenként a háromszögeket, hogy közben $c-é+l$ nem változik.

KAPPA: Nagylelkűen elfogadom, hogy az e műveletnek megfelelő lemma igaz: ha úgy távolítjuk el egyenként a háromszögeket, hogy közben $c-é+l$ nem változik, akkor $c-é+l$ nem változik.

TANÁR: Nem. A lemma úgy hangzik, hogy *a hálóban található háromszögeket meg lehet úgy számozni, hogy helyes sorrendben való eltávolításuk során $c-é+l$ mindaddig nem fog változni, amíg el nem jutunk az utolsó háromszöghöz.*

KAPPA: De hogyan lehet megállapítani ezt a helyes sorrendet, ha egyál-

1 Lhuilier, hasonlóan helyesbítvén Euler egyik bizonyítását, azt mondja, hogy csupán „jelentéktelen módosítást" eszközölt. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. *In:* „Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées", 1812—13. 179. o.) Maga Euler azonban lemondott a bizonyításról, mert észrevette a hibát, de nem volt képes elvégezni ezt a „jelentéktelen módosítást".

talán van ilyen?[1] Az ön eredeti gondolatkísérletében az utasítás szerint tetszőleges sorrendben távolíthattuk el a háromszögeket. Módosított gondolatkísérletében az utasítás szerint csak helyes sorrendben távolíthatjuk el a háromszögeket. Most azt mondja, meghatározott sorrendet kell követnünk, de arról nem szól, hogy milyent és hogy ilyen sorrend egyáltalán létezik-e. Így a gondolatkísérlet meghiúsul. Igaz, helyesbítette a bizonyításelemzést, azaz a lemmák sorát, a gondolatkísérlet viszont, amit a tanár úr „bizonyításnak" nevezett, semmibe veszett.

RHÓ: Csak a harmadik lépés veszett el.

KAPPA: Egyébként tényleg *helyesbítette* a lemmát? Az ön első két egyszerű változata legalább triviálisan igaznak látszott, mielőtt megcáfolták őket; de ez a terjedelmes, összetákolt változat még valószínűnek sem látszik. Valóban azt hiszi, hogy ez elkerüli a cáfolatot?

TANÁR: A „valószínűnek látszó" vagy még inkább a „triviálisan igaz" tételeket általában hamar meg szokták cáfolni; a kritika során érő, kifinomult, valószínűtlen sejtések viszont esetleg ráhibáznak az igazságra.

ÓMEGA: És mi lesz akkor, ha „kifinomult sejtéseit" is megcáfolják, és nem lesz képes meg nem cáfolt sejtésekkel felcserélni őket? Vagy ha már *nem* sikerül helyi toldozgatással helyesbíteni az érvelést? Egy helyi ellenpéldát, ami nem volt globális, sikerült kivédenie úgy, hogy kicserélte a megcáfolt lemmát. Mi lesz, ha legközelebb ez nem sikerül?

TANÁR: Jó kérdés. Holnap ezt tűzzük napirendre.

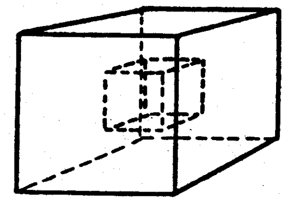
1 Cauchy azt hitte, bármely poliéder esetében könnyedén végrehajtható az az utasítás, hogy minden lépésben keressünk egy olyan háromszöget, amely vagy két él és egy csúcs, vagy egy él elvételével eltávolítható. (*A. L. Cauchy:* Recherches sur les polyèdres. Id. kiad. 79. o.) Ennek az volt az oka, hogy képtelen volt a gömbbel nem homeomorf poliédert elképzelni.

4. A sejtés kritikája globális ellenpéldákkal

ALFA: Van egy ellenpéldám, amely cáfolja az ön első lemmáját, de egyben a fő sejtésnek is ellenpéldája, vagyis globális ellenpélda lesz.

TANÁR: Valóban? Érdekes. Lássuk!

ALFA: Képzeljünk el egy két egymásba illesztett kocka által határolt testet; a kockák egyike belül van, de nem érinti a másikat (5. ábra)!



5. ábra

Nevezzük ezt a testet kockaodvas kockának! Ez megcáfolja az első lemmát, mert ha a belső kocka egyik lapját eltávolítjuk, a poliédert nem tudjuk síkban kiteríteni. Az sem segít, ha a külső kocka egyik lapját távolítjuk el. Ráadásul, mindegyik kockánál $c-é+l=2$, vagyis a kockaodvas kocka esetében $c-é+l=4$.

TANÁR: Jó kis mutatvány. Nevezzük *1. ellenpéldá*nak![1] Most mihez kezdünk?

1 Ezt az *1. ellenpéldát* Lhuilier fedezte fel. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 194. o.) Gergonne, a szerkesztő, azonban hozzátette (uo. 186. o.), hogy ő ezt már jóval Lhuilier előtt észrevette. Cauchy viszont nem, aki bizonyítását éppen egy évvel ezt megelőzően adta ki. Hessel húsz évvel később újra felfedezte ezt az ellenpéldát. (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1832. 16. o.) Mind Lhuilier-t, mint Hesselt olyan ásványgyűjtemények vezették erre a felfedezésre, amelyekben kettős kristályokat vettek észre, ahol a belső kristály nem volt átlátszó, a külső viszont igen. Lhuilier el is ismeri, milyen ösztönzően hatott rá barátjának, Pictet professzornak a kristálygyűjteménye. (I. m. 188. o.) Hessel áttetsző kálciumfluorid kristályokba zárt ólomszulfid kockákra utal. (I. m. 16. o.)

a) A sejtés elvetése. A megadás módszere

GAMMA: Uram, a nyugalma zavarba ejt. Egyetlen ellenpélda éppen olyan hatékonyan cáfol egy sejtést, mint tíz. A sejtés és a bizonyítás végleg kútba esett. Fel a kezekkel! Adja meg magát! Dobja sutba a hamis sejtést, felejtse el, és próbálkozzon radikálisan új megközelítéssel!

TANÁR: Elismerem, Alfa ellenpéldája súlyos kritika a *sejtés* felett. Az viszont nem igaz, hogy a *bizonyítás* „végleg kútba esett". Ha egyelőre elfogadják azt a korábbi javaslatomat, hogy a „bizonyítás" kifejezést „az olyan gondolatkísérlet jelölésére használjuk, amely az eredeti sejtésnek további sejtésekre vagy lemmákra való lebontását eredményezi", nem pedig „a kétségtelen igazság biztosítéka" értelemben, akkor nem szükségszerű, hogy az előbbi következtetésre jussanak. Bizonyításom az Euler-sejtést az első értelemben kétségtelenül bizonyította, a második értelemben viszont nem feltétlenül. Magukat kizárólag olyan bizonyítások érdeklik, amik azt „bizonyítják", amit be akarnak bizonyítani. Engem a bizonyítások akkor is érdekelnek, ha nem érik el kitűzött céljukat. Kolumbusz ugyan nem jutott el Indiába, de azért egész érdekes dolgot fedezett fel.

ALFA: Vagyis az ön filozófiája szerint a helyi ellenpélda (hacsak nem globális is egyidejűleg) a bizonyítás kritikája, de a sejtésé nem, a globális ellenpélda viszont kritikája a sejtésnek, de nem szükségképpen a bizonyításnak is. Hajlandó megadni magát a sejtést illetően, de a bizonyítást tovább védelmezi. De ha a sejtés hamis, mi az ördögöt bizonyít a bizonyítás?

GAMMA: A Kolumbusszal vont párhuzam összeomlik. A globális ellenpélda elfogadása menthetetlenül teljes megadást jelent.

b) Az ellenpélda elvetése. A torzszülöttek kizárásának módszere

DELTA: De miért fogadjuk el az ellenpéldát? Sejtésünket bebizonyítottuk, most már tétel. Elismerem, nem egyeztethető össze ezzel az úgynevezett „ellenpéldával". Az egyikről le kell mondani. De miért a

tételről, amikor azt már bebizonyítottuk? A „kritikának" kell visszavonulnia. Ez álkritika. A kockaodvas kocka egyáltalán nem poliéder. Ez egy *torzszülött*, patologikus eset, nem ellenpélda!

GAMMA: Miért nem? *A poliéder olyan test, amelynek a felülete sokszögekből áll.* Az én ellenpéldám pedig egy sokszögek által határolt test.

TANÁR: Nevezzük ezt *1. definíció*nak![1]

DELTA: A definíciód helytelen. A poliéder nyilvánvalóan *felület*, lapjai, élei, csúcsai vannak, kiteríthető egy táblán, és semmi köze sincs a „test" fogalmához. *A poliéder sokszögek rendszeréből álló felület.*

TANÁR: Nevezzük ezt *2. definíció*nak![2]

DELTA: Így tulajdonképpen *két* poliédert láttunk, *két* felületet, amelyek közül az egyik teljes egészében a másikon belül helyezkedik el. Egy nő, akinek gyermek van a méhében, nem ellenpéldája annak a tételnek, hogy az embereknek egy fejük van.

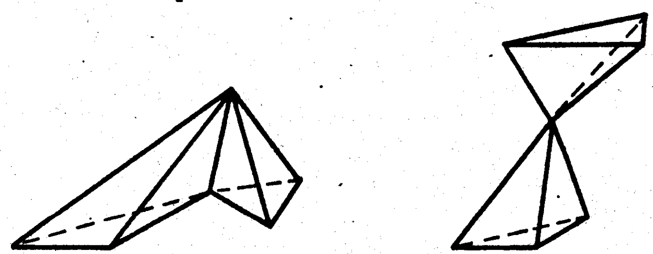
ALFA: No lám! Ellenpéldám a poliédernek egy új fogalmához vezetett.

1 Az *1. definíció* először a XVIII. században bukkan fel: „*Poliedrikus testnek* vagy egyszerűen *poliédernek* nevezünk minden olyan testet, amelyet síkok vagy sík lapok határolnak." (*A. M. Legendre:* Éléments de géométrie. Párizs 1809. 160. o.) Hasonló definíciót találunk Eulernél. (*L. Euler:* Elementa Doctrinae Solidorum. Id. kiad.) Eukleidész a kockát, az oktaédert, a gúlát és a hasábot definiálja, a poliéder gyűjtőfogalmat viszont nem, bár alkalmanként használja. (Például XII. könyv. Második probléma. 17. tétel.)

2 A *2. definíció* Jonquièresnek egyik olyan dolgozatában szerepel, amelyet a Francia Akadémián az Euler-tételt cáfolni kívánók ellen olvasott fel. Ezek a dolgozatok valóságos enciklopédiáját jelentik annak a módszernek, amelyet a torzszülöttek kizárásának nevezünk. Jonquières ekképp mennydörög Lhuilier torzszülött kockaodvas kockája ellen: „Egy efféle rendszer valójában nem egy poliéder, hanem két különálló poliéder, amelyek mindegyike független a másiktól... A poliéder, legalábbis a klasszikus álláspont szerint, mindenekelőtt csak akkor szolgál rá erre az elnevezésre, ha egész felületét be tudja járni egy pont; itt nem ez a helyzet... Lhuilier-nek ezt az első kivételét tehát figyelmen kívül hagyhatjuk." (*E. de. Jonquières:* Note sur le theorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Id. kiad. 170. o.) Ezt a definíciót — ellentétben az *1. definíció*val — teljes egészében elfogadják az analitikus topológusok, akiket egyáltalán nem a poliéderek elmélete érdekel, hanem az, hogy mennyiben lehet ezt az elméletet a felületek elméletének szolgálólányává tenni.

3

Vagy azt mered állítani, hogy poliéderen *mindig* felületet értettél?
TANÁR: Egyelőre fogadjuk el Delta *2. definíció*ját. Akkor is meg tudja cáfolni a sejtést, ha poliéderen felületet értünk?
ALFA: Hát persze! Vegyünk két olyan tetraédert, amelyeknek van egy közös éle (6(*a*) ábra)! Vagy vegyünk két olyan tetraédert, amelyeknek az egyik csúcsa közös (6(*b*) ábra)! Mindkét ikerpár összeér, mindkettő egy felületet alkot, és ellenőrizhető, hogy mindkettő esetében $c-é+l=3$.
TANÁR: *2a* és *2b ellenpélda.*[1]



(a) 6. ábra *(b)*

DELTA: Csodálom a perverz fantáziádat, de természetesen nem úgy gondoltam, hogy a sokszögek *bármely* rendszere poliéder. Poliéderen *sokszögek olyan rendszerét értettem, amelyben a sokszögek úgy rendeződnek el, hogy 1. minden élnél pontosan két sokszög találkozik, és 2. bármely sokszög belsejéből el lehet jutni bármely másik sokszög belsejébe olyan úton, amely egyetlen élt sem metsz csúcsnál.* Az első ikertestet definícióm első kritériuma, a másodikat a második kritérium zárja ki.
TANÁR: *3. definíció.*[2]

1 Lhuilier nem vette észre ezeket az ellenpéldákat, csak Hessel fedezte fel őket. (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad. 13. o.)
2 A *3. definíciót* először Möbius használta, hogy kizárja az ikertetraédereket. (*A. F. Möbius:* Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. *In:* „Berichte Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalische Classe", 1865. 32. o.) Néhány mai kézikönyv lemásolja ezt a nehézkes definíciót a szokásos, ellentmondást nem tűrő „eszi, nem eszi, nem kap mást" módon, mégpedig anélkül, hogy közölnék: ez a definíció a torzszülöttek kizárása végett jött létre, ami legalább megmagyarázná, hogyan kell érteni. (Például *D. Hilbert—S. Cohn-Vossen:* Anschauliche Geometrie. Berlin 1932. 290. o.)

ALFA: Csodálom azt a perverz leleményességet, amellyel az egyik definíciót a másik után agyalod ki, hogy aztán barrikádként használd fel őket kedvenc ötleted védelmében. Miért nem határozod meg a poliédert mindjárt úgy, hogy az a sokszögek olyan rendszere, amelyre érvényes a $c-é+l=2$ egyenlet? Ez a Tökéletes Definíció...
KAPPA: *T definíció.*[1]
ALFA: ...végleg eldöntené a vitát. Ezzel a kérdéssel soha többé nem kellene foglalkozni.
DELTA: De nincs olyan tétel a világon, amelyet torzszülöttekkel ne lehetne megcáfolni!
TANÁR: Sajnálom, hogy meg kell szakítanom a vitát. Mint láttuk, az ellenpéldákkal való cáfolat a kérdéses terminusok jelentésétől függ. Ahhoz, hogy egy ellenpéldát objektív kritikaként fogadjunk el, egyet kell értenünk az általunk használt fogalmak jelentésében. Efféle egyetértésre *esetleg* azáltal is eljuthatunk, ha meghatározzuk azt a fogalmat, amelynél megszakadt az érintkezés. Ami engem illet, én nem definiáltam a „poliédert". Feltételeztem, hogy ez a fogalom *ismert,* azaz képesek leszünk egy olyan dolgot, ami poliéder, megkülönböztetni az olyantól, ami nem poliéder; ezt egyes logikusok úgy nevezik, hogy ismerjük a poliéder fogalmának terjedelmét. Kiderült, hogy a fogalom terjedelme egyáltalán nem nyilvánvaló: *sorra javasolták a definíciókat, s amint ellenpéldák merültek fel, vitatni kezdték őket.* Azt javaslom, vegyük most szemügyre az egymással versengő definíciókat együttesen, és hagyjuk későbbre a különféle definíciók elfogadásából fakadó következményekben mutatkozó különbségek tárgyalását.

1 A *T definíciót,* amely szerint a poliéderek meghatározó sajátossága, hogy Euler-félék, Baltzer valóban felvetette: „A közönséges poliédereket (Hessel nyomán) Euler-féle poliédereknek szokták nevezni. Helyesebb lenne külön elnevezést keresni a nem igazi *(uneigentliche)* poliéderekre." (*R. Baltzer:* Die Elemente der Mathematik. Lipcse 1862. 2. k. 207. o.) Nem tisztességes Baltzertől, hogy Hesselre hivatkozik. Hessel az „Euler-féle" terminust csak rövidítésként használta azokra a poliéderekre, amelyekre érvényes az Euler-karakterisztika, szemben a nem Euler-féle poliéderekkel. (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad. 19. o.) A *T definíció*val kapcsolatban lásd még a következő lábjegyzetben szereplő Schläfli-idézetet!

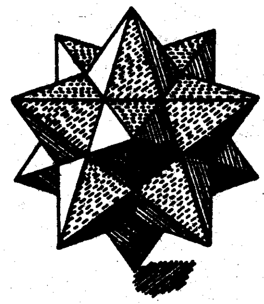
3*

Van valakinek olyan ötlete, amely még a leginkább leszűkített definícióval szemben is ellenpéldának fogható fel?

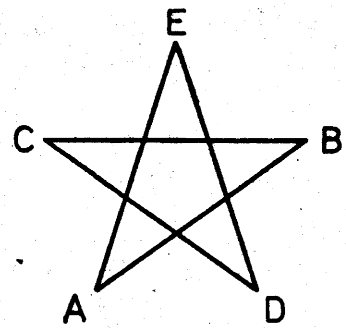
KAPPA: A *T definíciót* is beleértve?

TANÁR: A *T definíciót* kizárva.

GAMMA: Nekem van. Nézzük ezt a *3. ellenpéldát*, egy csillagpoliédert! *Tengerisün*nek fogom nevezni (7. ábra). Ez 12 csillagötszögből áll (8. ábra), 12 csúcsa, 30 éle és 12 ötszögű lapja van; aki szeret számolni,



7. ábra. Kepler csillagpoliédere. Mindegyik lap mintázata más, hogy látható legyen, mely háromszögek tartoznak ugyanahhoz az ötszögű laphoz.



8. ábra

ellenőrizheti. Vagyis a Descartes—Euler-tétel egyáltalán nem igaz, mivel erre a poliéderre $c-é+l=-6$.[1]

DELTA: Miért gondolod, hogy „tengerisünöd” poliéder?

GAMMA: Hát nem látod? Ez egy olyan poliéder, amelynek a tizenkét csillagötszög alkotja a lapjait. Kielégíti az utolsó definíciódat: „sokszögek olyan rendszere, amelyben a sokszögek úgy rendeződnek el, hogy 1. minden élnél pontosan két sokszög találkozik, és 2. mindegyik sokszögből el lehet jutni mindegyik másik sokszögbe a poliéder bármely csúcsának érintése nélkül”.

DELTA: Hiszen akkor még azt sem tudod, mi a sokszög! Egy csillagötszög biztosan nem sokszög! *Egy sokszög élek olyan rendszere, amelyben az élek úgy rendeződnek el, hogy 1. minden csúcsban pontosan két él találkozik, és 2. az éleknek — a csúcsok kivételével — nincs közös pontjuk.*

TANÁR: Nevezzük ezt *4. definíció*nak!

GAMMA: Nem értem miért veszed bele a második kikötést. A sokszög helyes definíciójának csak az első kikötést kellene tartalmaznia.

TANÁR: *4'. definíció.*

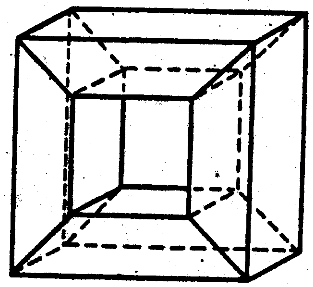
GAMMA: A második kikötésnek semmi köze a sokszög lényegéhez. Idenézz! Ha egy kicsit felemelem az egyik élt, a csillagötszög máris

1 A „tengerisünt” először Kepler tárgyalta kozmológiájában. (*J. Kepler:* Harmonices Mundi. *In:* M. Caspar és W. von Dyck (szerk.): Gesammelte Werke. 6. k. München 1940. II. könyv XIX. és XXVI. fej., V. könyv I., III., IX., XLVII. fej.) Az elnevezés is tőle származik (*„cui nomen Echino feci”*). A 7. ábrát Kepler könyvéből másoltam (79. o.), ahol egy másik kép is található erről (293. o.). Poinsot — Keplertől függetlenül — újra felfedezte, és ő mutatta ki, hogy az Euler-formula erre nem alkalmazható. (*L. Poinsot:* Mémoires sur les polygones et les polièdres. *In:* „Journal de l'École Polytechnique”, 1810. 48. o.) A manapság elfogadott terminus — „kis, csillag alakú dodekaéder” — Cayleytől származik. (*A. Cayley:* On Poinsot's Four New Regular Solids. *In:* „The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science”, 1859. 125. o.) Schäfli elfogadta a csillagpoliédereket általában, de a kis, csillag alakú dodekaédert torzszülöttként elvetette. Szerinte „ez nem igazi poliéder, mivel nem elégíti ki a $c-é+l=2$ feltételt”. (*L. Schläfli:* Theorie der vielfachen Kontinuität. 1852. Megjelent halála után a „Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die Gesamten Naturwissenschaften” 38. kötetében. Zürich 1901. 34. §.)

sokszög, még a te definíciód szerint is. Úgy képzeled el a sokszöget, mintha az krétával lenne a táblára rajzolva, holott fából készült szerkezetnek kellene felfognod. Akkor számodra is világossá válna, hogy amit közös pontnak vélsz, az valójában nem egy, hanem két különböző, egymás fölött elhelyezkedő pont. Az vezet félre, hogy síkba ágyazod a sokszöget. Hagyd, hogy kinyújtóztassa tagjait a térben![1]
DELTA: Légy szíves, mondd meg nekem, mi a csillagsokszög *területe!* Vagy netán azt állítod, hogy bizonyos sokszögeknek nincsen területe?
GAMMA: Nem éppen te voltál az, aki azt mondta, hogy a poliédernek semmi köze a szilárdság képzetéhez? Akkor most miért célozgatsz arra, hogy a sokszög képzetét a terület fogalmával kellene összekapcsolni? Megegyeztünk abban, hogy a poliéder élekkel és csúcsokkal rendelkező zárt felület, miért ne egyezhetnénk meg abban is, hogy a sokszög egyszerűen csúcsokkal rendelkező zárt görbe? De ha ragaszkodsz hozzá, szívesen meghatározom a csillagsokszög területét.[1]
TANÁR: Egyelőre hagyjuk abba ezt a vitát, és folytassuk az előbbieket! Vizsgáljuk együtt a két utolsó definíciót, a *4.* és a *4'. definíciót!* Tud valaki olyan ellenpéldát mondani sejtésünkre, amely a sokszög *mindkét* definíciójának megfelel?
ALFA: Tessék, itt van egy. Képzeljünk el egy ilyesféle *képkeretet* (9. ábra)! Ez minden eddig javasolt definíció szerint poliéder. Mégis, ha megszámoljuk a csúcsokat, az éleket és a lapokat, $c-é+l=0$ lesz.
TANÁR: *4. ellenpélda.*[2]

1 Igen régi keletű az a vita, hogy a sokszöget úgy kell-e definiálni, hogy beleértjük a csillagsokszögeket is, vagy nem (*4.* vagy *4' definíció*). Az e párbeszédben felvetett érv, amely szerint a csillagsokszögek közönséges sokszögekké válnak, ha egy többdimenziójú térbe ágyazzuk őket, a modern topológiából származik, de sok más érvet is fel lehet sorolni. Poinsot például, csillagpoliédereit védelmezvén, az analitikus geometriából vett érvekkel harcolt a csillagsokszögek elfogadtatásáért: „... mindezek a különbségek (a »közönséges« és a »csillag«-sokszögek között) inkább látszólagosak, mint valóságosak, és az analitikus tárgyalásban teljesen eltűnnek. Az analitikus geometriában teljesen elkülöníthetetlenek a sokszögek különböző fajtái. Egy szabályos sokszög élének megfelel egy valós gyökökkel rendelkező egyenlet, amely egyidejűleg megadja az összes azonos rendű szabályos sokszög élét is. Ezért lehetetlen egy szabályosan felvett hétszög éleit megkapni anélkül, hogy egyidejűleg ne találnánk rá a második és harmadik típusú szabályos hétszögek éleire. Fordítva, ha adott egy szabályos hétszög éle, meghatározható annak a körnek a sugara, amelyben ez a hétszög felvehető, ámde amikor ezt megtesszük, három különböző kört találunk, amelyek az adott éllel szerkeszthető szabályos hétszög három fajtájának felelnek meg; hasonló a helyzet más sokszögeknél is. Ez igazolja, hogy »sokszögnek« nevezzük ezeket az új csillagalakzatokat is." (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad. 26. o.) Schröder a Hankel-féle érvelést alkalmazza: „Az eredetileg csak az egész számokra értelmezett hatvány fogalmának a racionális törtekre való kiterjesztése az algebrában nagyon hasznosnak bizonyult; hasonlóképp kellene eljárnunk a geometriában is, valahányszor erre lehetőség nyílik..." (E. *Schröder:* Über die Vielecke von gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie. *In:* „Zeitschrift für Mathematik und Physik". 1862. 56. o.) Ezután bemutatja, hogy valóban lehetséges geometriailag értelmezni a p/q oldalú sokszögek fogalmát a csillagsokszögek körében.

1 Gammának az az állítása, hogy definiálni tudja a csillagsokszög területét, nem blöff. Néhányan azok közül, akik a sokszög átfogóbb elméletét vallották, úgy oldották meg a problémát, hogy kiterjesztették a sokszög területének fogalmát. A szabályos csillagsokszögek esetében van ennek egy különösen nyilvánvaló módja: a sokszög területét azonosnak vehetjük azoknak az egyenlő szárú háromszögeknek a terület-összegével, amelyeket a beírt vagy körülírt kör középpontja az oldalakkal alkot. Ebben az esetben természetesen a csillagsokszög egyes „szeletei" többször számítanak. A szabálytalan sokszögek esetében, ahol egyetlenegy kitüntetett pontunk sincs, bármely pontot kinevezhetünk kezdőpontnak, és a negatív körüljárású háromszögeket úgy kezelhetjük, mint amelyeknek negatív területük van. (*A. L. F. Meister:* Generalia de Genesi Figurarum Planarum et inde Pendentibus Earum Affectionibus. *In:* „Novi Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis", 1771. 179. o.) Kiderül — és ez egy „területtől" el is várható —, hogy az így definiált terület nem függ a kezdőpont megválasztásától. (*A. F. Möbius:* Der barycentrische Calcul. Hildesheim 1827. 218. o.) Természetesen vannak, akik szerint az előző számítás eredményeként kapott számot nem lehet „területnek" nevezni. Ugyanakkor a Meister—Möbius-definíció hívei ezt tartják „*a* helyes definíciónak", az „egyetlen tudományosan igazolt" definíciónak. (*R. Haussner* jegyzetei az általa szerkesztett Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper című kötetben. *In:* „Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften", 151. sz. Lipcse 1906. 114—115. o.) A definíciók körüli viták régi és állandó jellemzője az esszencializmus.
2 Ezt is Lhuilier klasszikus művében találjuk. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrometrie. Id. kiad. 185. o.) Gergonne megint hozzátette, hogy ő már ismerte ezt. Grunert viszont tizennégy évvel később sem ismerte (*J. A. Grunert:* Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Poly-



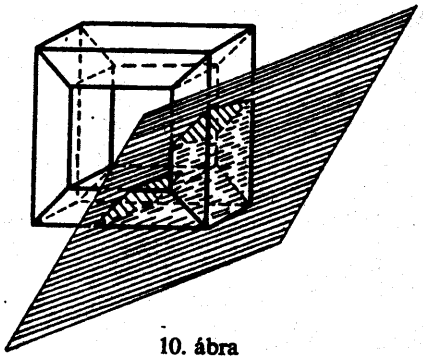
9. ábra

BÉTA: Akkor ez sejtésünk vége. Igazán kár, hiszen olyan sok esetben bizonyult helytállónak. De úgy látszik, csak az időnket vesztegettük.
ALFA: Delta, megdöbbentesz. Nem szólsz semmit? Képtelen vagy eltüntetni ezt az új ellenpéldát egy új definícióval? Azt hittem, nincs a világon olyan hipotézis, amelyet egy alkalmas nyelvi trükkel ne tudnál megóvni a cáfolattól. Feladod? Egyetértesz végre azzal, hogy vannak nem Euler-féle poliéderek is? Hihetetlen!
DELTA: Tulajdonképpen jobb lenne, ha megfelelőbb nevet találnál nem Euler-féle istencsapásaidra, és nem vezetnél félre minket azzal, hogy „poliédereknek" nevezed őket. De egyre kevésbé érdekelnek torzszülötteid. Undorral fordulok el siralmas „poliédereidtől", amelyekre Euler gyönyörű tétele nem igaz.[1] A matematikában én rendet és harmóniát keresek, te pedig csak anarchiát és káoszt hirdetsz.[2] A mi álláspontunk kibékíthetetlen.

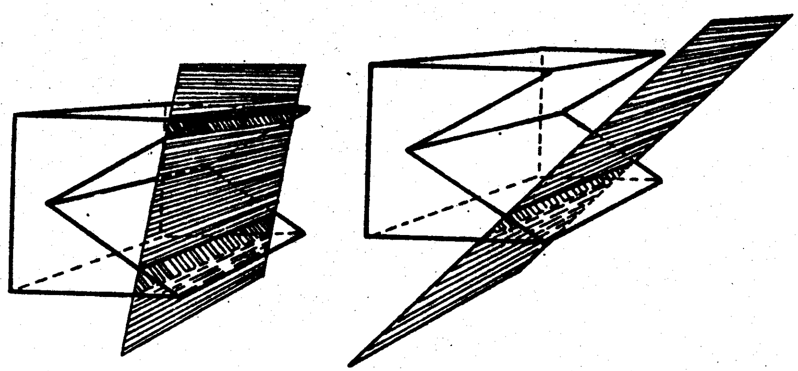
edern. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1827. 367. o.), sőt, Poinsot még negyvenöt évvel később sem (*L. Poinsot:* Note sur la théorie des polyèdres. *In:* „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences", 1858. 67. o.).
1 Ez parafrázis Hermite-nek Stieltjeshez írt leveléből: „Borzalommal fordulok el ettől a siralmas dögvésztől: függvények, amelyeknek nincsenek deriváltjaik." (*C. Hermite:* Lettre à Stieltjes, 20. Mai 1893. *In:* B. Baillaud és H. Bourget (szerk.): Correspondence d'Hermite et de Stieltjes. Párizs 1905. 2. k. 317—319. o.)
2 „Azokat a kutatásokat..., amelyek az egyetemesnek hitt törvényeket cáfoló függvényekkel foglalkoztak, szinte az anarchia és a káosz hirdetésének tekintették egy olyan területen, ahol az előző nemzedékek a rendet és a harmóniát keresték."

ALFA: Egy igazi, régi vágású tory vagy! Az anarchisták elvetemültségét okolod amiatt, hogy „rended" és „harmóniád" elromlik, a nehézségeket pedig szavakkal „oldod meg".
TANÁR: Halljuk a legújabb mentő-definíciót!
ALFA: Úgy érti, a legújabb nyelvi trükköt, a „poliéder" fogalmának legújabb szűkítését! Delta a valódi problémákat megkerüli, ahelyett, hogy megoldaná őket!
DELTA: Nem én *szűkítem* a fogalmakat, éppenséggel te *tágítod* őket. Ez a képkeret például egyáltalán nem igazi poliéder.
ALFA: Miért?
DELTA: Vegyünk fel egy tetszőleges pontot az „alagútban", abban a térben, amelyet a keret körülhatárol! Fektessünk egy síkot ezen a ponton át! Látható, hogy bármilyen síkot veszünk is fel, ennek mindig *két* különböző keresztmetszete lesz a képkerettel, azaz két eltérő, teljesen elkülönülő sokszöget kapunk (10. ábra).
ALFA: Na és?
DELTA: *Igazi poliéderek esetében a tér bármely tetszőleges pontján keresztül legalább egy olyan síkot lehet fektetni, amely a poliéderből egyetlenegy sokszöget metsz ki.* Konvex poliéderek esetében *minden* sík megfelel ennek a követelménynek, bárhol vesszük fel a pontot. *Közönséges* konkáv poliéderek esetében lesznek olyan síkok, amelyek több helyen metszik a testet, de mindig lesznek olyan síkok is, amelyek csak egy metszetet adnak (11(*a*) és 11(*b*) ábra). Ennek a képkeretnek az esetében, ha az alagútban vesszük fel a pontot, minden sík két helyen metszi a testet. Hogy nevezheted ezt poliédernek?

(*S. Saks:* Théorie de l'intégrale. Párizs 1933. Előszó.) Saks itt a torzszülött-kizárók (például Hermite!) és a cáfolók közt dúló heves csatározásokra utal, amelyek a XIX. század utolsó évtizedeiben (sőt, még a XX. század elején is) a modern valós függvénytan kialakulása körül zajlottak. A valós függvények elméletéről Munroe azt mondta, hogy az „a matematikának az ellenpéldákkal foglalkozó ága" (*M. E. Munroe:* Introduction to Measure and Integration. Cambridge, Massachusetts 1953. Előszó). Ennek közvetlen folytatása volt az a csatározás, amely a modern matematikai logika meg a halmazelmélet ellenzői és hívei között folyt. Lásd még: 44. o. 1. lábjegyzet, valamint 45. o. 1. lábjegyzet.



10. ábra



(a) 11. ábra (b)

TANÁR: Ez egy újabb definíció, úgy látszik, mégpedig ezúttal *implicit* definíció. Nevezzük *5. definíció*nak![1]

1 Az *5. definíció*t a fáradhatatlan torzszülött-kizáró, Jonquières javasolta, hogy eltávolítsa az útból Lhuilier alagutas poliéderét (a képkeretet): „Ez a poliedrikus komplexum a szó köznapi értelmében sem igazi poliéder, mert ha a testen egyenesen átmenő alagútban egy tetszőleges ponton át egy síkot fektetünk, az két eltérő, egymással semmiféle kapcsolatban nem álló sokszöget metsz ki. Ez közönséges poliédernél — például egyes konkáv poliéderek esetében — is előfordulhat a metsző sík *bizonyos* helyzeteiben, de nem minden helyzetében." (*E. de Jonquières:* Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Id. kiad. 170—171. o.) Vajon Jonquières észrevette-e, hogy az általa adott *5. definíció* néhány konkáv gömbi poliédert is kizár?

ALFA: Ellenpéldák sorozata és hozzájuk illő definíciók sorozata, olyan definícióké, amelyek állítólag semmi újat nem tartalmaznak, csupán újabb és újabb felismeréseket az egyetlen és régi fogalom gazdagságára vonatkozóan; ennek a fogalomnak, úgy látszik, ugyanannyi rejtett kikötése van, amennyi ellenpéldája. Úgy látszik, $c-é+l=2$ megdönthetetlen, régi és „örök" igazság *minden poliéderre*. Szinte elképzelhetetlen, hogy hajdan ez egy csodálatos, izgalmas és kihívó ötlet volt. Most, furcsa jelentés-elcsúsztatásaid eredményeképpen, szegényes konvencióvá, ócska dogmává silányult. *(Kimegy az osztályból.)*

DELTA: Nem értem, hogy egy ilyen tehetséges ember, mint Alfa, hogy fecsérelheti el a tehetségét merő kötözködésre. Úgy látszik, csak torzszülöttek kiagyalása köti le. A torzszülöttek azonban sohasem segítik elő a fejlődést, sem a természet, sem a gondolkodás világában. Az evolúció harmonikus és rendezett módon megy végbe.

GAMMA: Ezt a genetikusok könnyűszerrel megcáfolják. Nem hallottál még arról, hogy a torzszülötteket eredményező mutációk milyen fontos szerepet játszanak a makroevolúcióban? Ezeket a torz mutánsokat „reményteljes torzszülötteknek" nevezik. Szerintem Alfa ellenpéldái torzszülöttek ugyan, de „reményteljes torzszülöttek".[1]

DELTA: Alfa mindenesetre feladta a küzdelmet. Most már nincs több torzszülött!

GAMMA: Nekem van egy újabb torzszülöttem. Eleget tesz az 1., 2., 3., 4. és 5. definíció valamennyi kikötésének, de $c-é+l=1$. Ez az *5. ellenpélda* egy egyszerű henger. Három lapja (teteje, alapja és palástja), két éle (két kör) van, de egyetlen csúcsa sincs. A definíciód szerint ez poliéder: 1. minden élnél pontosan két sokszög találkozik, és 2. bár-

1 „Nem szabad elfelejtenünk, hogy ami ma torzszülöttnek látszik, holnap talán már egy sor különös alkalmazkodás kiindulópontja lesz... Az előbb felhívtam a figyelmet azoknak a ritka, de rendkívül fontos mutációknak a jelentőségére, amelyek befolyásolják a reményteljes torzszülöttek esetleges kialakulását eredményező, döntő embrionális folyamatok ütemét, sebességét; ezek a torzszülöttek egy új evolúciós sort indíthatnak el, ha beleillenek a környezet valamelyik hézagába." (*R. Goldschmidt:* Some Aspects of Evolution. *In:* „Science", 1933. 544. és 547. o.) Karl Popper hívta fel a figyelmemet erre a dolgozatra.

melyik sokszög belsejéből el lehet jutni bármelyik másik sokszög belsejébe olyan úton, amely egyetlen élt sem csúcsnál keresztez. A lapokat pedig kénytelen leszel igazi sokszögeknek elfogadni, hiszen eleget tesznek kikötéseidnek: 1. minden csúcsban pontosan két él találkozik, és 2. az éleknek a csúcsok kivételével nincs közös pontjuk.

DELTA: Alfa kitágította a fogalmakat, de te szétrombolod őket! A te „éleid" nem élek. *Egy élnek két csúcsa van!*

TANÁR: *6. definíció?*

GAMMA: De miért tagadod meg az „él" státusát azoktól az élektől, amelyeknek csak egy, vagy esetleg zéró csúcsa van? Korábban csak szűkítgetted a fogalmakat, de most már úgy megcsonkítod őket, hogy alig marad belőlük valami!

DELTA: Hát nem látod ezeknek az úgynevezett cáfolatoknak a haszontalanságát? „Azelőtt, ha kitaláltak egy új poliédert, ez valamilyen gyakorlati céllal történt; ma kifejezetten azért találják ki őket, hogy hibásnak találhassák atyáik érvelését, s ennél többre soha senki sem jut velük. Tárgyunk torztani múzeummá vált, ahol a tisztességes, közönséges poliéderek örülhetnek, ha egy aprócska sarkot megtarthatnak."[1]

GAMMA: Szerintem, ha valamit igazán mélyen meg akarunk ismerni,

1 Parafrázis Poincaré nyomán. (*H. Poincaré:* Science et methode. Id. kiad. 131—132. o.) Az eredeti, teljes szöveg a következő: „A logika néha torzszülötteket produkál. Fél évszázad óta bizarr függvények sokaságát látjuk feltűnni, amelyek legkevésbé sem próbálnak hasonlítani az olyan becsületes függvényekhez, amelyek valamilyen célt szolgálnak. Nincs többé folytonosság, vagy folytonosság ugyan van, de nincs többé derivált stb. Sőt mi több, logikai szempontból ezek a különös függvények a legáltalánosabbak, azok a függvények pedig, amelyekkel keresés nélkül is találkozik az ember, már csak mint különleges esetek szerepelnek. Csak egy aprócska sarok marad számukra.
Eddig, ha kitaláltak egy új függvényt, ez valamilyen gyakorlati céllal történt; ma kifejezetten azért találják ki őket, hogy hibásnak találhassák atyáik érvelését, s ennél többre soha senki sem jut velük.
Ha a tanárt egyedül a logika vezetné, a legáltalánosabb függvényekkel kellene kezdenie a tanítást, azaz a legbizarrabbakkal. A kezdőt kellene tehát nekiszabadítani ennek a torztani múzeumnak, hogy küszködjék vele..." Poincaré a problémát a valós függvénytan területén tárgyalja, de megállapításai a mi esetünkre is érvényesek.

nem „normális", szabályos, szokásos alakjában, hanem kritikus állapotában, lázasan, szenvedélyesen kell tanulmányoznunk. Ha meg akarjuk ismerni a normális, egészséges testet, akkor kell megvizsgálnunk, amikor abnormális, amikor beteg. Ha meg akarjuk ismerni a függvényeket, akkor szinguláris helyeiket kell tanulmányoznunk. Ha meg akarjuk ismerni a közönséges poliédereket, akkor a szélsőséges eseteket kell tanulmányoznunk. Így lehet matematikai elemzéssel a tárgy lényegéig hatolni.[1] De még ha alapjában véve igazad is volna, nem látod, milyen értelmetlen az az *ad hoc* módszer, amit alkalmazol? Ha meg akarod húzni az ellenpéldák és a torzszülöttek közti határvonalat, ilyen ötletszerűen, kapkodva sohasem fog sikerülni.

TANÁR: Véleményem szerint nem fogadhatjuk el azt a stratégiát, amit Delta a globális ellenpéldák esetében alkalmaz, bár el kell ismernünk ötletességét. Joggal nevezhetjük módszerét a *torzszülöttek kizárása módszeré*nek. Ezt a módszert alkalmazva, az eredeti sejtéssel szemben felhozott minden ellenpéldát ki lehet zárni úgy, hogy néha ügyesen, de mindig *ad hoc* módon újra definiáljuk a poliédert, a poliéder definíciójában használt terminusokat, vagy az e kifejezések definícióiban szereplő terminusokat. Valamivel nagyobb tisztelettel kellene bánnunk az ellenpéldákkal, nem kellene olyan makacsul üldöznünk őket, mint az ördögöt, torzszülöttnek kiáltván ki őket. Delta fő hibája valószínűleg az, hogy dogmatikus elfogultsággal értelmezi a matematikai bizonyítást: szerinte egy bizonyítás szükségképpen azt bizonyítja, amit eredetileg be akart bizonyítani. Az én értelmezésem azt is megengedi, hogy egy hamis sejtést „bebizonyítsunk", azaz további sejtésekre bontsunk. Ha a sejtés hamis, nyilvánvaló, hogy legalább az egyik további sejtés is feltétlenül hamis. A lebontás azonban mégis érdekes lehet! Engem nem zavar, ha egy „bizonyított" sejtésre ellenpéldát találok, sőt, szívesen fogok hozzá egy hamis sejtés „bizonyításához"!

THÉTA: Képtelen vagyok követni önt.

1 Parafrázis Denjoy nyomán. (*A. Denjoy:* L'orientation actuelle des mathématiques. *In:* „Revue de Mois", 1919. 21. o.)

KAPPA: A tanár úr csak az Újszövetség tanítását követi: „Mindent megpróbáljatok; a mi jó, azt megtartsátok!" (Pál Apostolnak a Thessalonikabeliekhez írott első levele. 5, 21.)

c) A sejtés helyesbítése a kivételek kizárásának módszerével. Egyenként történő kizárások. Stratégiai visszavonulás avagy biztonsági játék

BÉTA: Gondolom, tanár úr, meg akarja magyarázni rejtélyes megjegyzéseit. Nekem azonban — elnézést kérek a türelmetlenségemért — most kell kimondanom, ami a szívemet nyomja.

TANÁR: Tessék, folytassa!

(Alfa *visszatér.*)

BÉTA: Delta érvelésének egyes szempontjait ostobaságnak tartom ugyan, mégis arra a meggyőződésre jutottam, hogy van bennük egy ésszerű mag. Úgy tűnik, egyetlen sejtés sem érvényes általában, hanem csak egy meghatározott, korlátozott tartományon belül, amely kirekeszti a *kivételeket.* Nem értek egyet azzal, hogy ezeket a kivételeket „torzszülött" vagy „patologikus eset" címkével lássuk el. Ez módszertani döntés volna, s ennek értelmében nem tekinthetnénk ezeket a kivételeket önálló vizsgálatot érdemlő érdekes *példáknak.* Ugyanakkor az *„ellenpélda"* kifejezést sem tartom szerencsésnek. Ez a terminus ugyan joggal egyenrangúnak tekinti ezeket a példákat a sejtést alátámasztó példákkal, de valahogy harci színekbe öltözteti őket, úgyhogy az ember, akárcsak Gamma, pánikba esik, amikor szembetalálja magát velük, és hajlamossá válik arra, hogy mindenestül cserbenhagyjon egyébként gyönyörű és szellemes bizonyításokat. Nem, ezek egyszerűen *kivételek.*

SZIGMA: Teljesen egyetértek. Az „ellenpélda" kifejezésnek agresszív felhangja van, és sérti azokat, akik a bizonyításokat kigondolják. A „kivétel" a helyes kifejezés. „Háromféle matematikai állítás létezik:

1. Olyan állítások, amelyek mindig igazak, amelyeknek nincsenek megszorításaik, amelyek alól nincs kivétel. Például: minden síkháromszög szögeinek összege egyenlő két derékszöggel.
2. Olyan állítások, amelyek valamilyen téves elvre épülnek, és ezért semmiképp sem lehet elfogadni őket.
3. Olyan állítások, amelyek helyes elvekre épülnek ugyan, de bizonyos esetekben csak megszorításokkal és kivételekkel igazak...

EPSZILON: Micsoda?

SZIGMA: „...Ne tévesszük össze a helytelen tételeket az olyan tételekkel, amelyek csak bizonyos megszorításokkal érvényesek."[1] Ahogy a szólás mondja: *A kivétel erősíti a szabályt.*

EPSZILON: *(Kappához):* Ki ez a tökkelütött? Tanulhatna egy kis logikát.

KAPPA: *(Epszilonhoz):* No meg valamicskét a nem euklideszi síkháromszögekről.

DELTA: Bármilyen kínos, meg kell mondanom, hogy Alfa és én valószínűleg ugyanazon az oldalon állunk majd ebben a vitában. Mindkettőnk érvelése azon alapult, hogy egy állítás vagy igaz, vagy hamis, és csak abban nem értettünk egyet, hogy konkrétan az Euler-tétel igaz-e vagy hamis. Szigma azonban azt kívánja, hogy tételezzük fel az állításoknak egy harmadik osztályát is; az ide tartozó állítások „elvileg" igazak, de „bizonyos esetekben csak kivételekkel" igazak. Ha elfogadjuk a tételek és a kivételek békés egymás mellett élését, teret adunk a matematikában a zavarosságnak és káosznak.

ALFA: Egyetértek.

ÉTA: Nem akarom megzavarni Delta ragyogó érvelését, de úgy vélem, most hasznos lehet, ha röviden vázolom az *én* intellektuális fejlődésem történetét. Iskoláskoromban — a ti szavaitokkal élve — torzszülött-kizáróvá váltam, mégpedig nem az Alfa-, hanem a Szigma-félékkel szemben védekezve. Emlékszem, egy folyóiratban ezt olvastam az Euler-tételről: „Nagyszerű matematikusok hoztak nyilvánosságra bizonyításokat arra vonatkozóan, hogy a tétel általánosan érvényes. Mégis vannak alóla kivételek... fel kell hívni a figyelmet ezekre a

[1] *J. B. Bérard:* Sur le nombre des racines imaginaires des équations; en réponse aux articles de MM. Tédenat et servois. *In:* „Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées", 1918—19. 347. és 349. o.

kivételekre, mert még a mai szerzők sem mindig ismerik el nyíltan létezésüket."[1] Ez a dolgozat nem elszigetelt közvetítési kísérlet volt. „Bár a geometriai tankönyvekben és előadásokban mindig felhívják a figyelmet arra, hogy Euler gyönyörű tétele, a $c+l=é+2$ egyes esetekben »csak megszorításokkal érvényes« vagy »nem látszik érvényesnek«, nem tudjuk, mi ezeknek a kivételeknek a valódi oka."[2] Nos, én nagyon alaposan megvizsgáltam a „kivételeket", és arra a következtetésre jutottam, hogy ezek nem felelnek meg a helyes definíciónak. Vagyis a bizonyítást és a tételt vissza lehet helyezni jogaiba, s így megszűnik a tételek és a kivételek kaotikus egymás mellett élése.

ALFA: Szigma kaotikus álláspontja megmagyarázhatja ugyan a torzszülöttek kizárását, de nem teszi bocsánatossá, és még kevésbé igazolhatóvá. Miért nem számoljuk fel a káoszt úgy, hogy az ellenpéldát fogadjuk el hitelesnek, s a „tételt" és a „bizonyítást" vetjük el?

ÉTA: Miért vetném el a bizonyítást? Semmi kivetnivalót nem találok benne. Te talán igen? Az én módszerem, a torzszülöttek kizárása, nekem ésszerűbbnek tűnik, mint a tiéd, a bizonyítás kizárása.

TANÁR: Ez a vita megmutatta, hogy a torzszülöttek kizárása fogékonyabb közönségre számíthat, amikor Éta dilemmájából ered. De térjünk vissza Bétára és Szigmára! Béta volt az, aki az ellenpéldákat kivételeknek keresztelte át. Szigma egyetértett Bétával...

BÉTA: Örülök, hogy Szigma egyetértett velem, én viszont sajnos nem érthetek egyet vele. Az biztos, hogy háromféle állítás létezik: igaz, reménytelenül hamis és reményteljesen hamis állítás. Az utoljára említett igaz állítássá alakítható át, ha olyan korlátozó kikötéssel egészítjük ki, amely megjelöli a kivételeket. Én sohasem „tulajdonítok a képleteknek korlátlan érvényességi tartományt. Valójában a legtöbb képlet csak akkor igaz, ha bizonyos feltételek teljesülnek. E feltételek meghatározásával és az általam használt terminusok jelentésének pontos rögzítésével minden bizonytalanságot eltüntetek."[1] Nyilvánvaló tehát, hogy nem helyeslek semmiféle békés egymás mellett élést a még tökéletlen képletek és a kivételek között. Helyesbítem formuláimat, és olyan *tökéletessé* teszem őket, mint amilyenek Szigma első állítás-osztályában szerepelnek. Ez azt jelenti, hogy elfogadom a torzszülöttek kizárásának módszerét, ha azt a célt szolgálja, hogy megtaláljuk *az eredeti sejtés érvényességi tartományát*, de *elvetem* ezt a módszert, ha nyelvi trükként csak arra szolgál, hogy korlátozó fogalmak segítségével megmentse a „rokonszenves" tételeket. Delta módszerének ezt a két funkcióját el kellene különíteni egymástól. Az *én* módszeremet, amelyre e két funkció közül csak az első jellemző, a „kivételek kizárása módszerének" szeretném nevezni. Ezt a módszert arra fogom használni, hogy pontosan meghatározzam az Euler-sejtés érvényességi tartományát.

TANÁR: Mi az Euler-féle poliédereknek az a „pontosan meghatározott tartománya", amit ígérget? Mi az a „tökéletes formula"?

BÉTA: *Minden olyan poliéder esetében, amelyben nincs üreg (mint a két egymásba illesztett kockánál) vagy alagút (mint a képkeretnél),* $c-é+l=2$.

TANÁR: Biztos ebben?

BÉTA: Igen, biztos vagyok.

1 *J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad. 13. o. Hessel 1832-ben újra felfedezte Lhuilier „kivételeit". Rögtön azután, hogy kéziratát közzétette, ráakadt Lhuilier művére (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad.). Ennek ellenére úgy döntött, hogy nem vonja vissza a dolgozatot — bár legtöbb eredményéről kiderült, hogy már régebben publikálták mások —, mivel úgy gondolta, hogy el kell fogadtatni az elképzelést azokkal a „mai szerzőkkel", akik nem vesznek tudomást ezekről a kivételekről. Egyébként annak a folyóiratnak a szerkesztője, amelyhez Hessel a dolgozatát beküldte, éppen e szerzők egyike, Crelle volt. Tankönyvében Crelle „bebizonyította", hogy Euler tétele *minden* poliéderre igaz. (*A. L. Crelle:* Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Id. kiad. 2. k. 668—671. o.)

2 *L. Matthiessen:* Über die scheinbaren Einschränkungen der Euler'schen Satzes von der Polyedern. Id. kiad. 449. o. Matthiessen itt Heis és Eschweiler „Lehrbuch der Geometrie"-ére és Grunert „Lehrbuch der Stereometrie"-ére utal. Ő azonban a problémát nem a torzszülöttek kizárásával oldja meg, mint Éta, hanem a torzszülöttek kiigazításával, mint majd Rhó. (Vö.: 66. o. 1. lj.)

1 Cauchy nevezetes könyvének bevezetőjéből. (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Párizs 1821.)

TANÁR: Mi a helyzet az ikertetraéderrel?

BÉTA: Bocsánat. *Minden olyan poliéder esetében, amelyben nincs üreg vagy alagút, vagy „többszörös struktúra", c – é + l = 2.*[1]

TANÁR: Értem. Egyetértek azzal az eljárással, hogy inkább helyesbíti a sejtést, ahelyett, hogy egyszerűen elfogadná vagy elvetné. Ezt jobban kedvelem mind a torzszülöttek kizárása, mind a megadás módszerénél. Mégis van két ellenvetésem. *Először*, tarthatatlan az az állítása, hogy módszere nemcsak helyesbíti, hanem „tökéletesíti" is a sejtést, hogy „szigorúan pontossá teszi", hogy „minden bizonytalanságot eltüntet".

BÉTA: Valóban?

TANÁR: El kell ismernie, hogy sejtésének minden egyes új változata csak *ad hoc* tünteti el az éppen felmerült ellenpéldát. Ha egymásba illesztett kockákkal találkozik, kizárja az üreges poliédereket. Ha történetesen egy képkeretet vesz észre, kizárja az *alagutas* poliédereket. Nagyra becsülöm elfogulatlanságát és jó megfigyelőképességét, nagyon helyes, hogy felfigyel ezekre a kivételekre, de szerintem érdemes volna némi rendszerességet vinni a „kivételek" utáni vak tapogatózásba. Helyes, ha elismeri, hogy a „Minden poliéder Euler-féle" kijelentés csak sejtés. De miért adjuk meg a tétel státust annak az állításnak, hogy „Minden üregektől, alagutaktól és micsodáktól mentes poliéder Euler-féle"? Ez már nem sejtés? Hogy lehet biztos abban, hogy *minden* kivételt felsorolt?

BÉTA: Tud olyant, amit nem vettem számításba?

ALFA: Mit szólsz a tengerisünömhöz?

GAMMA: És a hengeremhez?

TANÁR: Nekem még újabb konkrét „kivételre" sincs szükségem érvelésemhez. Azt állítottam, hogy *lehetnek* további kivételek.

BÉTA: Lehet, hogy igaza van. Az embernek nem kell megváltoztatni az álláspontját, valahányszor új ellenpélda kerül elő. Nem kell azt mondani: „Ha a jelenségek között nem fordul elő kivétel, a következtetés általánosnak nyilvánítható. Ha azonban később mégis előfordulna valamilyen kivétel, a következtetés megfogalmazása a fölmerülő kivételekkel kezdődhet."[1]

Lássuk csak! Először úgy véltük, hogy $c - é + l = 2$ minden poliéder esetében, mert igaznak találtuk ezt a kockáknál, oktaédereknél, gúláknál és hasáboknál. Semmi esetre sem fogadhatjuk el „ezt a nyomorúságos módszert, hogy a különösből következtessünk az általánosra".[2] Nem csoda, hogy kivételek bukkantak föl; inkább az a meglepő, hogy nem találtunk sokkal több kivételt sokkal előbb. Szerintem ez azért történt így, mert főként *konvex* poliéderekkel foglalkoztunk. Mihelyt másféle poliéderek merültek föl, általánosításaink működésképtelenné váltak.[3] Így a kivételek egyenként történő kizárása helyett

1 Úgy látszik, Lhuilier és Gergonne biztos volt abban, hogy Lhuilier felsorolta az összes kivételt. A dolgozatnak ehhez a részéhez írt bevezetőben olvasható: „Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az Euler-tétel a felsorolásra kerülő esetek kivételével általánosan igaz minden poliéderre, akár konvex, akár nem..." (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 177. o.) Gergonne magyarázatában is ezt találjuk: „...úgy látszik, csak a felsorolt kivételek fordulhatnak elő..." (Uo. 188. o.) *Valójában azonban Lhuilier kihagyta az ikertetraédert, amelyet csak húsz évvel később említett Hessel.* (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad.) Érdekes, hogy több olyan kitűnő matematikus is, aki élénken érdeklődött a módszertan iránt — mint Gergonne —, képes volt azt hinni, hogy megbízhatunk a kivételek kizárásának módszerében. Ez a hit analóg az induktív logikában használatos „felosztás módszerével", amely szerint egy jelenség összes lehetséges értelmezése számba vehető, s így, ha az *experimentum crucis* módszerével egy kivételével az összes értelmezést kizárhatjuk, akkor az utolsó megmaradt magyarázat bizonyított.

1 *I. Newton:* Optics. London 1952. 380. o.

2 *N. H. Abel:* Letter to Hansteen. *In:* S. Lie és L. Sylow (szerk.): Oeuvres complètes. II. k. Christiania 1881. 263—265. o. Abel bírálata az Euler-féle induktivizmus ellen irányul.

3 Ez is az idézett levél parafrázisa. Ebben a levélben Abel a függvényekre vonatkozó általános „tételek" alóli kivételek kirekesztésére törekedett és arra, hogy ezáltal abszolút szigorúságot érjen el. Az előző idézetet is tartalmazó eredeti szöveg a következő: „A magasabb analízisben nagyon kevés állítást bizonyítanak végleges szigorúsággal. *Az ember mindenütt azzal a nyomorúságos módszerrel találkozik, hogy a különösből következtetnek az általánosra,* és csoda, hogy ez az eljárás ritkán vezet úgynevezett paradoxonokra. Tényleg nagyon érdekes kinyomozni ennek az okát. Szerintem ez az ok abban a tényben rejlik, hogy az *analitikusok elsősorban olyan függvényekkel foglalkoztak, amelyeket hatványsor összegeként lehet felírni.*

4*

egyszerű, de biztonságos határvonalat húzok: *Minden konvex poliéder Euler-féle.*[1] És remélem, elismeritek, hogy ebben aztán igazán nincs semmi sejtésszerűség; ez egy tétel.

GAMMA: Mi van az én hengeremmel? Az konvex!

BÉTA: Az egy vicc!

TANÁR: Felejtsük el egyelőre a hengert! Még a henger nélkül is megkísérelhetjük a bírálatot. A kivételek kizárása módszerének ebben az új, módosított változatában, amelyet bírálatomra válaszolva oly fürgén eszelt ki Béta, a pontról pontra történő visszavonulást olyan területre való stratégiai visszavonulással cserélte fel, amelyről azt reméli, hogy a sejtés erődítményének bizonyul majd. Biztonsági játékra törekszik. De tényleg olyan biztonságos, mint állítja? Továbbra sincs semmi biztosítéka arra, hogy erődítményén belül nem lesznek ellenpéldák. Ráadásul az ellentétes veszély is fennáll. Talán túl radikálisan vonultunk vissza, sok Euler-féle poliédert is kizárván a falak közül? Eredeti sejtésünkben lehetett némi túlzás, de a maga „tökéletesített" tétele nekem nagyon is szerénynek tűnik, és még abban sem lehet biztos, hogy nem túlzás is egyben.

De szeretném előterjeszteni *második* ellenvetésemet is: a maga érvelése elfeledkezik a bizonyításról, mintha egyáltalán nem volna rá szüksége, mikor felbecsüli a sejtés érvényességi tartományát. Csak nem tartja fölöslegesnek a bizonyításokat?

BÉTA: Én ezt sohasem mondtam!

TANÁR: Nem, nem mondta. Viszont felfedezte, hogy bizonyításunk nem bizonyítja eredeti sejtésünket. A maga helyesbített sejtését bizonyítja? Válaszoljon!

BÉTA: Nos...[1]

ÉTA: Köszönöm ezt az érvet, tanár úr. Béta zavara ékesen igazolja a torzszülöttek kizárása megrágalmazott módszerének felsőbbrendűsé-

Amint más függvények kerülnek szóba — ami ugyan eléggé ritkán fordul elő — az ember már nem képes elboldogulni velük, s amint elkezd helytelen következtetéseket levonni, ezekből a hibák végtelen sokasága ered, ahol az egyik hiba a másikat támasztja alá..." (Kiemelés tőlem! — *L. I.*) Poinsot észrevette, hogy a poliéderek esetében — éppúgy mint a számelméletben — gyakran összeomlanak az induktív általánosítások: „A legtöbb tulajdonság egyedi, és semmiféle általános törvénynek nem engedelmeskedik. (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad. 45. §.) Érdekes sajátossága ennek az indukcióval szembeni óvatosságnak, hogy az esetleges sikertelenségeket annak a ténynek tulajdonítja, hogy a (tények, számok, poliéderek) világ(a) természetesen csodálatos kivételeket tartalmaz.

1 Ez ismét teljes összhangban van Abel módszerével. A függvényekkel kapcsolatos gyanús tételek érvényességi körét Abel ugyanígy szűkítette le a hatványsorba fejthető függvényekre. Az Euler-sejtés történetében elég gyakori volt ez a korlátozás konvex poliéderekre. Legendre például, miután megadja meglehetősen általános poliéder-definícióját (vö.: 33. o. 1. lj.), olyan bizonyítást alkalmaz, amely egyrészt, semmi esetre sem érvényes az ő általános poliéderei mindegyikére, másrészt, nemcsak konvex poliéderekre érvényes. Egy kiegészítő jegyzetben azonban (talán azért, mert azelőtt soha nem említett kivételekre bukkant?) visszavonul a konvex poliéderek egyszerű, de biztonságos területére. (*A. M. Legendre:* Éléments de géométrie. Id. kiad. 161., 164., 228. o.)

1 Sok gyakorló matematikus töpreng, hogy mire valók a bizonyítások, ha nem bizonyítanak. Egyrészt tapasztalatból tudják, hogy a bizonyítások nem csalhatatlanok, másrészt dogmatikus neveltetésük beléjük véste, hogy az *igazi* bizonyításoknak csalhatatlanoknak kell lenniük. Az *alkalmazott matematikával* foglalkozó matematikusok — szégyenlős, de szilárd meggyőződéssel — feloldják ezt a dilemmát: szerintük a *tiszta matematika* bizonyításai „teljesek", és ezért *valóban* bizonyítanak. A tiszta matematikával foglalkozó matematikusok azonban ezt jobban tudják, ők csak a *logikusok* „teljes bizonyításai" iránt éreznek ilyen tiszteletet. Ha megkérdezik tőlük, hogy mi a haszna, funkciója „nem teljes bizonyításaiknak" legtöbbjük zavarba jön. Hardy például nagyon tisztelte a logikusok igényét a formális bizonyításokra, de amikor jellemezni akarta a matematikai bizonyítást, ahogy „mi, gyakorló matematikusok ismerjük", ezt így végezte el: „Tulajdonképpen olyan, hogy matematikai bizonyítás, nem létezik; végül is nem tehetünk mást, csak kiemelünk; ... a bizonyítások, amelyeket Littlewood és én *gáznak* nevezünk, dagályos szóvirágok, céljuk a lélektani hatás, szemléltető ábrák az oktatásban, eszközök a diákok képzeletének serkentésére." (*G. H. Hardy:* Mathematical Proof. *In:* „Mind", 1928. 18. o.) Wilder szerint a bizonyítás „csak intuitív sugallataink ellenőrzésére használt eljárás" (*R. L. Wilder:* The Nature of Mathematical Proof. *In:* „The American Mathematical Monthly", 1944. 318. o.). Pólya hangsúlyozza, hogy a bizonyítások, még ha nem is teljesek, kapcsolatokat létesítenek a matematikai tények között, s ez elősegíti, hogy emlékezetünkben megőrizzük őket; a bizonyítások mnemotechnikai rendszert eredményeznek. (*Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 172—173. o.)

get. Mivel azt mondjuk, hogy a bizonyítás azt bizonyítja, amit be akartunk bizonyítani, válaszunk egyértelmű. Nem engedjük, hogy szeszélyes — vagy akár jámbor „kivételnek" álcázott — ellenpéldák kényükkedvük szerint tegyenek tönkre tiszteletreméltó bizonyításokat.
BÉTA: Egyáltalán nem ejt zavarba, hogy a bírálat ösztönzésére finomítanom, javítanom és — bocsánat uram — *tökéletesítenem* kell módszeremet. Válaszom a következő. Az eredeti sejtést hamisnak tartom és elvetem, mert akadnak alóla kivételek. A bizonyítást is elvetem, mert ugyanezek a kivételek legalább az egyik lemmát is érintik. (Az ön terminológiájával: a globális ellenpélda szükségképpen helyi ellenpélda is.) Alfa ezen a ponton megállna, mivel, úgy látszik, a cáfolatok teljes mértékben kielégítik intellektuális szükségleteit. Én viszont továbbmegyek. Azzal, hogy *mind* a sejtést, *mind* a bizonyítást a megfelelő tartományra korlátozom, tökéletesítem a *sejtést*, amely most már *igaz* lesz, és tökéletesítem az alapjában véve értelmes *bizonyítást*, amely most már szigorú lesz, és nyilvánvalóan nem tartalmaz hamis lemmát. Láttuk például, hogy nem minden poliéder teríthető ki egy síkra az egyik lap eltávolítása után. De minden *konvex* poliéder kiteríthető. Joggal nevezhetem tökéletesített és szigorúan bizonyított sejtésemet tételnek. Ismét leszögezem: *„Minden konvex poliéder Euler-féle."* A konvex poliéderek esetében valamennyi lemma kétségtelenül igaz, és a bizonyítás, amely hamis általánosságában nem volt szigorú, a konvex poliéderek leszűkített tartományában szigorú lesz. Válaszoltam tehát a kérdésére, tanár úr.
TANÁR: Vagyis, azok a lemmák, amelyek egyszer már — a kivételek felfedezése előtt — kétségtelenül igaznak látszottak, most ismét kétségtelenül igaznak látszanak... egészen a következő kivétel felfedezéséig. Elismeri, hogy a „Minden poliéder Euler-féle" állítás feltevés volt; az imént ismerte el, hogy a „Minden üregektől és alagutaktól mentes poliéder Euler-féle" állítás ugyancsak feltevés. Miért nem ismeri el, hogy a „Minden konvex poliéder Euler-féle" tétel szintén feltevés?
BÉTA: Most már nem *„feltevés"*, hanem *intuíció.*
TANÁR: Utálom a maga kérkedő „intuíció"-ját. A tudatos *találgatást*

becsülöm, mert a legjobb emberi tulajdonságokból ered, a bátorságból és a szerénységből.
BÉTA: Én egy tételt fogalmaztam meg: „Minden konvex poliéder Euler-féle." Ön csak prédikált ellene. Ellenpéldát is tudna mondani?
TANÁR: Nem tudhatja, hogy nem mondok-e! *Helyesbítette* ugyan az eredeti sejtést, de nem állíthatja, hogy *tökéletessé* tette, hogy tökéletes szigorúságot ért el a bizonyításában.
BÉTA: Ön állíthatja?
TANÁR: Én sem. De azt hiszem, az a módszer, amellyel én helyesbítem a sejtéseket, a maga módszerét is javítani fogja, mivel egységet, valódi kölcsönhatást állapítok meg a bizonyítások és ellenpéldák között.
BÉTA: Szívesen tanulok.

d) A torzszülöttek kiigazításának módszere

RHÓ: Tanár úr, szólhatok néhány szót közbevetőleg?
TANÁR: Természetesen.
RHÓ: Egyetértek azzal, hogy Delta módszerét, a torzszülöttek kizárását mint általános metodológiai szemléletet el kell utasítanunk, mivel valójában nem veszi komolyan a „torzszülötteket". Béta sem veszi komolyan a „kivételeit", hiszen csupán felsorolja őket, és aztán biztonságos területre vonul vissza. Mindkét módszer csak egy korlátozott, kitüntetett mező iránt érdeklődik tehát. Az *én* módszerem nem alkalmaz diszkriminációt. Be tudom bizonyítani, hogy „ha közelebbről megvizsgáljuk a kivételeket, kiderül, hogy csak látszólag azok, es az Euler-tétel még az állítólagos kivételekre is érvényes marad".[1]
TANÁR: Valóban?
ALFA: Hogy lesz az én *3. ellenpéldám*, a „tengerisün" (7. ábra), közönséges Euler-féle poliéder? 12 csillagötszög alakú lapja van...
RHÓ: Nem látok semmiféle „csillagötszögeket". Hát nem látod, hogy ennek a poliédernek a lapjai valójában közönséges *háromszögek?*

1 *L. Matthiessen:* Über die scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Id. kiad.

A „tengerisünnek" 60 ilyen lapja, 90 éle és 32 csúcsa van, „Euler-karakterisztikája" 2.[1] A 12 „csillagötszög", 30 „él" és 12 „csúcs", amely —6 karakterisztikus értéket eredményezne, csak a te agyszüleményed. Torzszülöttek nincsenek, csak torzértelmezések. Az embernek meg kell szabadulnia a perverz képzelgésektől, meg kell tanulnia, hogyan lásson és hogyan határozza meg helyesen azt, amit lát. Az én módszerem gyógyító hatású: megtanítlak benneteket arra, hogy amiben — tévesen — ellenpéldát „láttok", ismerjétek fel — helyesen — a példát. Torz látásotokat helyreigazítom...[2]

ALFA: Tanár úr, legyen szíves fejtse ki az *ön* módszerét, mielőtt Rhó agymosásban részesít minket![3]

1 Azt az érvet, hogy a „tengerisün" „valójában" egy közönséges, prózai Euler-féle poliéder, amely 60 háromszögű lapból, 90 élből és 32 csúcsból áll — *„un hexacontaèdre sans épithète"* —, az Euler-tétel rendíthetetlen bajnoka, Jonquières fogalmazta meg. (*E. de Jonquières:* Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. Id. kiad. 115. o.) Az az elképzelés viszont, hogy a nem Euler-féle csillagpoliéderek háromszöglapú Euler-féle poliéderekként értelmezhetők, nem Jonquières-től származik. Ennek az elképzelésnek drámai története van. (Vö.: 56. o. 3. lj.)

2 Semmi sem jellemzőbb a dogmatikus ismeretelméletre, mint a tévedés magyarázata. Ha bizonyos igazságok „nyilvánvalók", meg kell magyarázni, hogyan tévedhet bárki velük kapcsolatban, más szóval, miért nem nyilvánvalók mindenki számára ezek az igazságok. Mindegyik dogmatikus ismeretelmélet — a tévedésről szóló sajátos tanításának megfelelően — sajátos gyógymódot ajánl a tévedésektől való megszabadulásra. (Vö.: *K. R. Popper:* Conjectures and Refutations. London 1963. Bevezetés.)

3 Poinsot bizonyára valamikor 1809 és 1858 között esett át agymosáson. Poinsot volt az, aki újra felfedezte a csillagpoliédereket, aki először elemezte őket az Euler-féleség szempontjából, és aki kijelentette, hogy egyesek közülük, mint a mi kis, csillag alakú dodekaéderünk, nem felelnek meg az Euler-formulának. (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad.) Nos, 1858-ban megjelent művében ugyanez a Poinsot kategorikusan kijelenti, hogy az Euler-formula „nemcsak a konvex poliéderekre igaz, hanem mindenféle poliéderre, beleértve a csillagpoliédereket is". (*L. Poinsot:* Note sur la théorie des Polyèdres. Id. kiad. 67. o. — Poinsot a csillagpoliéderekre a *polyèdres d'espèce supérieure* kifejezést használja.) Az ellentmondás nyilvánvaló. Mi ennek a magyarázata? Mi történt a csillagpoliedrikus *ellenpéldákkal?* A rejtély kulcsa a dolgozat első, odavetettnek látszó mondatában található: „A poliéderek elmélete teljes egészében leszűkíthető a *háromszög alakú* lapokból álló poliéderek elméletére." Azaz Poinsot—Alfa agymosáson esett át és Poinsot—Rhóvá változott: már csak háromszögeket lát ott, ahol korábban csillagsokszögeket látott, csak példákat ott, ahol korábban ellenpéldákat. Az önkritika feltétlenül titkos, rejtélyes volt, mert a tudomány történetében nem találunk más példát ilyen pálfordulásra. Arra is kíváncsiak vagyunk, találkozott-e Poinsot gyűrű alakú lapokkal, és ha igen, háromszögű látásával tudatosan átértékelte-e ezeket.

A látásmód nem mindig ebben az irányban változik. Becker például — az egyszeresen és többszörösen összefüggő tartományok új fogalmi keretétől elbűvölten (L.: *B. Riemann:* Grundlagen der eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen Complexen Grösse. *In:* M. Weber—R. Dedekind (szerk.): Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Lipcse 1892. 3—48. o.) — figyelembe vette a gyűrű alakú sokszögeket, de vak maradt a csillagsokszögekkel szemben. (*J. C. Becker:* Über Polyeder. *In:* „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 1869. 66. o.) Öt évvel e dolgozat után — amelyben azt állította, hogy a problémát „véglegesen" megoldotta — élesebbé vált Becker látása, s felismerte a csillagsokszögű és csillagpoliedrikus alakzatokat ott is, hol korábban csak háromszögeket és háromszögű poliédereket látott. (*J. C. Becker:* Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen. *In:* „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 1874. 459—460. o.)

TANÁR: Hadd folytassa!

RHÓ: Már kifejtettem az álláspontomat.

GAMMA: Nem fejthetnéd ki bővebben Delta módszerét illető kritikádat? Mindketten üldöztétek a „torzszülötteket"...

RHÓ: Delta hallucinációinak áldozata. Egyetértett azzal, hogy a ti „tengerisünötöknek" 12 lapja, 30 éle, 12 csúcsa van és nem Euler-féle. Állítása szerint ez nem is poliéder. Mindkét pontban tévedett azonban. „Tengerisünötök" igenis poliéder és igenis Euler-féle. Csillagpoliéderként való értelmezése viszont *félre*értés volt. Bocsássatok meg, de ez nem a tengerisün képe egy egészséges, tiszta agyban, hanem annak torzképe egy beteg, fájdalmasan vonagló agyban.[1]

1 Ez része a Khrüszipposznak tulajdonított sztoikus tévedéselméletnek. A sztoikusok elmélete szerint a „tengerisün" a külső valóság része volna, s ennek lenyomata jelenik meg a lélekben: *phantaszia* vagy *visum.* Bölcs ember nem fogad el kritikátlanul *(szünkatatheszisz* vagy *adsensus)* egy *phantasziát*, ha az nem válik világos és határozott ideává *(phantaszia kataléptiké* vagy *comprehensio)*, ilyenné viszont nem válhat, ha hamis. A világos és körülhatárolt ideák rendszere alkotja a

KAPPA: De hogy tudod egymástól megkülönböztetni az egészséges és a beteg agyat, a racionális és a torz értelmezést?[1]
RHÓ: *Számomra* az rejtélyes, hogy tévesztheted össze őket!
SZIGMA: Rhó, te tényleg azt hiszed, hogy Alfa soha nem vette észre, hogy „tengerisünje" háromszög lapú poliéderként is értelmezhető? Természetesen értelmezhető. De ha alaposabban szemügyre vesszük, kiderül, „hogy ezek a háromszögek mindig ötösével helyezkednek el egy síkban, és egy szabályos ötszöget vesznek körül, amely — a háromszögek magjaként — egy testszöglet mögött bújik meg. Mármost az öt szabályos háromszög a belső maggal — a szabályos ötszöggel — együtt egy úgynevezett »pentagrammát« alkot, amely Theophrastus Paracelsus szerint az egészség jele..."[2]
RHÓ: Babona!
SZIGMA: Így az *egészséges* agy előtt feltárul a tengerisün titka: a tengerisün egy minden eddigi képzeletet felülmúló szabályos test, szabályos lapokkal és egyenlő testszögletekkel, amelynek gyönyörű szimmetriája talán az egyetemes harmónia titkait tárja fel előttünk...[3]
ALFA: Köszönöm, hogy megvédtél, Szigma. Ez ismét meggyőz arról, hogy az ellenfelek kevésbé kényelmetlenek, mint a szövetségesek. Az én poliedrikus alakzatom természetesen értelmezhető akár háromszög lapú poliéderként, akár csillagpoliéderként. Hajlandó vagyok elfogadni mindkét — egyenértékű — értelmezést...
KAPPA: Csakugyan?
DELTA: De az biztos, hogy csak az egyik értelmezés *helyes!*

tudományt *(episztémé)*. Esetünkben a „tengerisün" lenyomata Alfa agyában kis, csillag alakú dodekaéder, míg Rhó agyában háromszög lapú hexakontaéder. Rhó azt állítja, hogy Alfa csillagpoliedrikus látomása nem érhet világos és határozott ideává, nyilván azért, mert megdöntené a „bizonyított" Euler-formulát. A csillagpoliedrikus értelmezés ilyenformán kudarcba fullad, s „egyetlen" alternatívája — a háromszögként való értelmezés — világossá és határozottá válik.

1 Ez a szokásos szkeptikus kritika a sztoikusoknak arra az állítására, hogy meg tudják különböztetni a *phantasziát* a *phantaszia kataléptikétől*.

2 *J. Kepler:* Harmonices Mundi. Id. kiad. II. könyv. XXVI. tétel.

3 Kepler véleményének tárgyilagos ismertetése.

ALFA: Hajlandó vagyok elfogadni mindkét — egyenértékű — értelmezést, de az egyik mindenképpen az Euler-sejtés globális ellenpéldája lesz. Miért csak a Rhó előítéleteihez „illő" értelmezést fogadjuk el? Mindenesetre, legyen szíves kifejteni az *ön* módszerét, tanár úr.

e) A sejtés helyesbítése a lemmák beépítésének módszerével. A bizonyításból származó tétel szemben a naiv sejtéssel

TANÁR: Térjünk vissza a képkerethez! Ami engem illet, elismerem, hogy ez igazi globális ellenpéldája az Euler-sejtésnek, s igazi helyi ellenpéldája bizonyításom első lemmájának.
GAMMA: Elnézést, uram, de hogyan cáfolja a képkeret az első lemmát?
TANÁR: Távolítsa el először az egyik lapját, azután próbálja kiteríteni a táblára! *Nem* fog sikerülni.
ALFA: Hogy egy kicsit megmozgassam a képzelőerődet, elárulom, hogy azok és csakis azok a poliéderek rendelkeznek azzal a sajátossággal, hogy egy lapjuk eltávolítása után a megmaradó rész kiteríthető egy síkban, amelyek gömb alakúra fújhatók fel.

Nyilvánvaló, hogy egy ilyen „gömbi" poliéder kiteríthető egy síkban egyik lapjának kivágása után, és fordítva, ugyanilyen nyilvánvaló, hogy ha egy egyik lapjától megfosztott poliéder kiteríthető egy síkban, akkor kerek edénnyé hajlítható, amely leborítható a hiányzó lappal, s így gömbi poliédert kapunk. A képkeret azonban sohasem fújható fel gömbbé, hanem csak tórusszá.
TANÁR: Jó. Nos, én — nem úgy, mint Delta — elfogadom ezt a képkeretet a sejtés kritikájaként. Ezért a sejtést eredeti formájában elvetem, mert hamis, de menten javaslatot teszek egy módosított, leszűkített változatra: A Descartes—Euler-sejtés érvényes az „egyszerű" poliéderekre, azaz az olyan poliéderekre, amelyek — egy lap eltávolítása után — kiteríthetők egy síkban. Így megmentjük az eredeti hipotézis egy részét: *az egyszerű poliéderek Euler-karakterisztikája 2.* Ezt a tézist sem az egymásba illesztett kockák, sem az ikertetraéder, sem a csillagpoliéder nem cáfolja meg, mivel egyikük sem „egyszerű".

A kivételek kizárásának módszere tehát a fő sejtés és a bűnös lemma tartományát egy közös, biztonságos tartományra szűkítette le, s így az ellenpéldát elfogadta mind a fő sejtés, mind a bizonyítás kritikájaként. Az én módszerem — a lemmák beépítése — ezzel szemben megőrzi a bizonyítást, a fő sejtés tartományát viszont éppen a bűnös lemma tartományára redukálja. Más szóval, míg az egyszerre globális és helyi ellenpélda a kivételek kizárásának módszerét követőket arra késztette, hogy módosítsák a lemmákat is, az eredeti sejtést is, engem arra késztet, hogy módosítsam az eredeti sejtést, de a lemmákat nem. Értik?

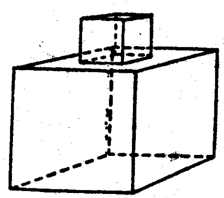
ALFA: Azt hiszem, értem. Hogy bizonyítsam ezt, meg fogom cáfolni önt.

TANÁR: A módszeremet vagy a helyesbített sejtést?

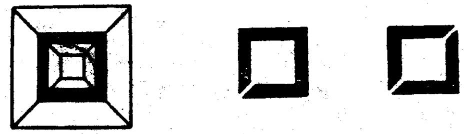
ALFA: A helyesbített sejtést.

TANÁR: Akkor valószínűleg még mindig nem érti a módszeremet. De lássuk az ellenpéldát!

ALFA: Vegyünk egy olyan kockát, amelynek a tetején egy kisebb kocka helyezkedik el (12. ábra). Ez megfelel minden definíciónknak — az *1.*, a *2.*, a *3.*, a *4.*, a *4'.* és az *5. definíció*nak is —, tehát igazi poliéder. És „egyszerű" is, mivel síkba lehet teríteni. Vagyis az ön által módosított sejtés szerint e test Euler-karakterisztikájának 2-nek kellene lennie. De 16 csúcsa, 24 éle és 11 lapja van, Euler-karakterisztikája $16-24+11=3$. Ez globális ellenpéldája az ön helyesbített sejtésének, és mellesleg Béta első „kivételeket kizáró" tételének is. Annak ellenére, hogy sem ürege, sem alagútja, sem „többszörös struktúrája" nincs, ez a poliéder *nem* Euler-féle.



12. ábra



(*a*) (*b*) (*c*)

13. ábra

DELTA: Nevezzük ezt a búbos kockát *6. ellenpéldá*nak.[1]

TANÁR: A helyesbített sejtést megcáfolta, de *nem* pusztította el helyesbítési módszeremet. Ismét meg fogom vizsgálni a bizonyítást, és megnézem, miért omlott össze a maga poliédere miatt. Még egy hamis lemmának kell lenni benne.

BÉTA: Hát persze, hogy van. Nekem mindig is gyanús volt a második lemma. Ez feltételezi, hogy a háromszögekre osztás során egy új átló meghúzásával az élek és lapok számát mindig eggyel növeljük. Ez nem igaz. Ha megnézzük búbos poliéderünk síkba terített hálórácsát, egy gyűrű alakú lapot találunk (13(*a*) ábra). Ebben az esetben egyetlen átló nem növeli a lapok számát (13(*b*) ábra), két élre van szükségünk ahhoz, hogy a lapok számát eggyel megnöveljük (13(*c*) ábra).

1 A *6. ellenpéldát* Lhuilier fedezte fel. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 186. o.) Gergonne ez egyszer elismeri a felfedezés újszerűségét. Csaknem ötven évvel később viszont Poinsot még nem is hallott róla (*L. Poinsot:* Note sur la théorie des polièdres. Id. kiad.), míg Matthiessen (*L. Matthiessen:* Über die scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Id. kiad.) és nyolcvan évvel később Jonquières (*E. de Jonquières* Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Id. kiad.) torzszülöttként kezelte. (Vö.: 56. o. 3. lj. és 66. o. 1. lj.) A XIX. század primitív kivétel-kizárói más kivételekkel együtt kuriózumnak tekintették: „Példaként rendszerint egy olyan háromoldalú gúlát mutatnak, amely úgy illeszkedik egy tetraéder egyik lapjához, hogy az előbbi egyetlen éle sem esik egybe az utóbbi egyetlen élével sem. »Elég furcsa, de ebben az esetben $c-é+l=3$« — írtam egyetemi jegyzetfüzetembe. És ezzel az ügy véget ért." (*L. Matthiessen:* i. m. 449. o.) A mai matematikusok hajlamosak elfeledkezni a gyűrű alakú lapokról, amelyek lényegtelenek lehetnek a felületek osztályozása szempontjából, de más kontextusban fontossá válhatnak. Steinhaus a következőket írja: „Osszuk fel a földgömböt l országra (a *tengereket* és *óceánokat* szárazföldnek tekintjük)! Ekkor $c+l=é+2$, bármi legyen is a politikai helyzet."

TANÁR: Gratulálok. Kétségtelenül tovább kell szűkítenem sejtésünket...

BÉTA: Tudom, mit fog tenni. Azt mondja majd: *„A háromszög alakú lapokból álló egyszerű poliéderek Euler-félék.”* Adottnak veszi a háromszögekből álló hálót, és ezt a lemmát megint csak feltétellé alakítja át.

TANÁR: Téved. Mielőtt konkrétan rámutatnék, hol téved, hadd kommentáljam egy kicsit bővebben a maga kivételeket kizáró módszerét! Amikor a sejtést egy „biztonságos” tartományra korlátozza, tulajdonképpen meg sem vizsgálja a bizonyítást. A maga céljához valóban nincs erre szükség. Céljának eléréséhez elegendő az az esetleges állítás, hogy a maga leszűkített tartományában minden lemma igaz, bármilyen legyen is. Az én célomhoz viszont ez nem elég. Én éppen az ellenpélda által megcáfolt lemmát építem be a sejtésbe, ezért — a bizonyítás gondos elemzése alapján — a lehető legpontosabban kell megfogalmaznom és megtalálnom a helyét. A megcáfolt lemmák így beépülnek helyesbített sejtésembe. Módszere nem kényszeríti magát arra, hogy gondosan *kidolgozza a bizonyítást*, mivel a bizonyítás nem úgy szerepel helyesbített sejtésében, ahogy az enyémben. Most visszatérek legutóbbi ötletére. A gyűrű alakú lap által megcáfolt lemma nem az — mint maga gondolja —, hogy *„minden lap háromszögű”*, hanem az, hogy *„minden lap két részre oszlik, ha egy átlóval szétvágjuk”*. *Ez* a lemma az, amit feltétellé alakítok. Az ezt kielégítő lapokat „egyszeresen összefüggő” lapoknak nevezem, és eredeti sejtésemen egy második helyesbítést hajthatok végre: *„Egy olyan egyszerű poliéderre, amelynek valamennyi lapja egyszeresen összefüggő,* $c-é+l=2$.” A maga elhamarkodott és téves állítása abból eredt, hogy módszere nem tanította meg a gondos bizonyításelemzésre. A bizonyításelemzés néha triviális, néha azonban valóban nehéz.

(*H. Steinhaus:* Mathematical Snapshots. New York 1960. 273. o.) De vajon Steinhaus eltüntetheti Nyugat-Berlint vagy San Marinót, csupán azért, mert létezésük cáfolja Euler tételét? (Bár természetesen elháríthatja, hogy a Bajkálhoz hasonló tengerek teljes egészében egy országhoz tartozzanak, ha *tó*ként definiálja őket, mivel azt mondta, hogy csak a tengerek és az óceánok tekintendők szárazföldnek.)

BÉTA: Értem, mire gondol. Magyarázatát még megtoldanám egy önkritikus megjegyzéssel, mert azt hiszem, ez a kivétel-kizáró magatartásformák egész sorát tárja fel. Ezek közül a legrosszabb egyszerűen úgy zár ki egyes kivételeket, hogy egyáltalán nem vizsgálja meg a bizonyítást. Ebből származik az a misztifikáció, hogy egyrészt, van bizonyításunk, másrészt, vannak kivételek. Az ilyen primitív kivétel-kizárók elméjében a bizonyítás és a kivételek két teljesen különálló rekeszben találhatók. Egyesek most talán azt mondják, hogy a bizonyítás csak a leszűkített tartományban érvényes, és ez eloszlatja a rejtélyt. De az ő „feltételeik” még mindig idegenek a bizonyítás gondolatmenetétől.[1] A kivétel-kizárók jobbik fajtája egy gyors pillantást vet a bizonyításra, és ebből — ahogy az imént én is tettem — ösztönzést merít ahhoz, hogy megállapítsa a biztonságos tartományt kijelölő feltételeket. A kivétel-kizárók legjobbjai gondosan elemzik a bizonyítást, és ennek alapján igen aprólékosan körülírják a tiltott területet. Az ön módszere tulajdonképpen a kivételek kizárása módszerének határesete...

IÓTA: ... és a bizonyítás és a cáfolatok alapvető dialektikus egységét mutatja be.

TANÁR: Remélem, most már valamennyien belátják, hogy a bizonyítások, még ha esetleg nem is *bizonyítanak*, mindenesetre komoly segít-

1 „... Lhuilier értekezése két *igen különböző* részből áll. Az elsőben a szerző az Euler-tétel eredeti bizonyítását adja. A másodikban az a célja, hogy rámutasson azokra a kivételekre, amelyekre a tétel nem érvényes.” (*J. D. Gergonne* szerkesztői megjegyzése Lhuilier művéhez. *In: S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 172. o. Kiemelés tőlem! — *L. I.*)
Zacharias kritikátlan, de megbízható leírását adja ennek a rekeszekre bontásnak: „A XIX. században a geométerek, amellett, hogy új bizonyításokat kerestek az Euler-tételre, azzal foglalkoztak, hogy megállapítsák, bizonyos körülmények között milyen kivételekre nem igaz a tétel. Ilyen kivételeket fogalmazott meg pl. Poinsot, Lhuilier és Hessel, akik megpróbálták osztályozni a kivételeket...” [*M. Zacharias:* Elementargeometrie. In: W. F. Meyer és H. Mohrmann (szerk.): Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Lipcse 1914—21. 3. k. I. r. 1052. o.]

séget adnak sejtésünk *helyesbítéséhez.*[1] *A kivétel-kizárók is helyesbítették a sejtést, de a helyesbítés független volt a bizonyítástól. A mi módszerünk a bizonyítás segítségével helyesbít. A „felfedezés logikájának" és az „igazolás logikájának" ez a belső egysége a lemma-beépítés módszerének legfontosabb aspektusa.*

BÉTA: Így már persze értem azt a korábbi rejtélyes megjegyzését, hogy az sem zavarja, ha egy sejtést „bebizonyítanak", az sem, ha megcáfolják, és még egy hamis sejtést is hajlandó „bizonyítani".

KAPPA *(félre)*: De miért nevezzük „bizonyításnak" azt, ami valójában *„nem-bizonyítás"?*

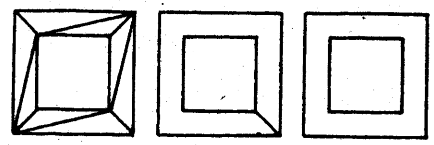
TANÁR: Meg kell jegyeznem, kevés ember hajlandó erre. A mélyen gyökerező heurisztikus dogmák miatt a matematikusok többsége képtelen egy sejtés bizonyítását *és* cáfolását egyidejűleg elhatározni. *Vagy* bizonyítanak, *vagy* cáfolnak. Különösen akkor képtelenek a sejtéseket cáfolással helyesbíteni, ha történetesen saját sejtéseikről van szó. *Sejtéseiket cáfolatok nélkül, sohasem a hamisság mérsékelésével, hanem az igazság monoton fokozásával akarják helyesbíteni, és ezzel a tudás fejlődését megtisztítják az ellenpéldák borzalmától.* Talán ez a háttere a kivétel-kizárók legjobbjai által alkalmazott eljárásnak: „biztonsági játékkal" *kezdik*, a „biztonságos" tartományra érvényes bizonyítást konstruálva, majd *folytatásként* alapos kritikai vizsgálatnak vetik alá ezt a bizonyítást, azaz ellenőrzik, hogy az előírt feltételek mindegyikét felhasználták-e. Ha nem, „élesítik" vagy „általánosítják" tételük első, egyszerű változatát, a bizonyítás sarokpontjait képező, most már pontosan meghatározott lemmákat beépítik a tételbe. Egy-két ellenpélda után például talán már megfogalmazzák az *ideiglenes kivétel-kizáró tételt* — „Minden konvex poliéder Euler-féle" —, a nem konvex eseteket pedig *cura posterior*ként félreteszik; ezt követően megkonstruálják a Cauchy-féle bizonyítást, majd, miután észreveszik, hogy a konvexitást valójában nem „használták" a bizonyításban, felállítják a lemmákat egyesítő tételt.[1] Heurisztikailag semmi hiba nincs ebben az eljárásban, amely az *ideiglenes* kivétel-kizárást összekapcsolja az egymást követő bizonyításelemzéssel és lemma-beépítéssel.

1 Úgy látszik, Hardy, Littlewood, Wilder és Pólya elsiklott e fölött a szempont fölött. (Lásd: 53. o. 1. lj.)

BÉTA: Ez az eljárás természetesen nem vet véget a bírálatnak, csak háttérbe szorítja: egy túlzás helyett egy túlságosan is mérsékelt állítást bírálnak.

TANÁR: Örülök, Béta, hogy meggyőztem. Rhó és Delta, maguk hogy vélekednek erről?

RHÓ: Ami engem illet, én mindenesetre úgy gondolom, hogy a „gyűrű alakú lapok" problémája álprobléma. Abból ered, hogy torzan értelmezik ennek a két összeforrasztott kockának, amit „búbos kockának" neveztek el, a lapjait és éleit.



(a) *(b)* *(c)*

14. ábra. A gyűrű alakú lap három változata: *(a)* Jonquières-nél, *(b)* Matthiessen-nél, *(c)* ahogy a „képzetlen szem" látja.

TANÁR: Fejtse ki!

RHÓ: A „búbos kocka" két egymáshoz forrasztott kockából álló poliéder. Egyetért?

TANÁR: Nem bánom.

RHÓ: Rosszul értelmezték a „forrasztást". A „forrasztás" olyan élekből áll, amelyek a kis kocka alsó négyzetének csúcsait a nagy kocka felső négyzetének megfelelő csúcsaival kötik össze. „Gyűrű alakú lap" tehát egyáltalán nincs.

1 Lényegében ezt a szabályos sémát írják le Pólya és Szegő klasszikus művükben: „Minden bizonyítékot tüzetesen meg kell vizsgálni, ha tudni akarjuk, hogy valóban minden feltevést felhasználtunk-e; meg kell próbálni, hogy kevesebb feltevésből jussunk ugyanarra a következtetésre..., és nem szabad megelégedni mindaddig, amíg az ellenpéldák nem jelzik, hogy eljutottunk a lehetőségek határáig." *(G. Pólya—G. Szegő:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. k. Berlin 1927. VII. o.)

BÉTA: A gyűrű alakú lap pedig ott van! Azok az élek nincsenek ott, amikről beszélsz!

RHÓ: Csupán a te képzetlen szemed elől rejtőznek el.[1]

BÉTA: Azt várod, hogy komolyan vegyük ezt az érvelést? Amit *én* látok, az babona, a *te* „rejtett" éleid viszont valóságosak?

RHÓ: Nézd meg ezt a sókristályt! Ezt kockának neveznéd?

BÉTA: Persze.

RHÓ: A kockának ugyebár 12 éle van?

BÉTA: Igen.

RHÓ: Csakhogy ezen a kockán egyáltalán nincsenek élek. Rejtettek.

1 Azt, hogy e két poliédert rejtett élek „forrasztják össze", Jonquières veti fel (*E. de Jonquières:* Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Id. kiad. 171—172. o.), aki az üregek és az alagutak ellen a torzszülöttek kizárását, a búbos kockák és a csillagpoliéderek ellen viszont a torzszülöttek kiigazítását használja. A torzszülöttek kiigazításának alkalmazását az Euler-tétel védelmében először Matthiessen javasolta. (*L. Matthiesen:* Über die scheinbaren Einschränkungen des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Id. kiad.) Matthiessen következetesen használja a torzszülöttek kiigazításának módszerét: sikerül olyan rejtett éleket és lapokat kimutatnia, amelyekkel minden nem Euler-féle poliéder helyesbíthető, még az üreges és az alagutas poliéderek is. Míg Jonquières forrasztása a gyűrű alakú lap teljes háromszögelése, Matthiessen gazdaságosan forraszt, csak azokat a minimálisan szükséges éleket húzván meg, amelyek egyszeresen összefüggő rész-lapokra osztják a lapot (14. ábra).
Matthiessen szerfölött biztos abban, hogy módszerével a forradalmi ellenpéldákat jól alkalmazkodó, nyárspolgári, Euler-féle példákká alakíthatja át. Azt állítja, hogy „bármilyen poliédert lehet úgy elemezni, hogy igazolja Euler tételét. . .". Felsorolja a felületes szemlélő által megfigyelt állítólagos kivételeket, majd kijelenti: „Minden ilyen esetben be tudjuk bizonyítani, hogy a poliédernek rejtett lapjai és élei vannak, amelyeket összeszámolva a $c-é+l=2$ tétel még ezekben a látszólag rebellis esetekben is érintetlen marad."
Az az elképzelés azonban, hogy kiegészítő élek vagy oldalak megrajzolásával egyes nem Euler-féle poliéderek átalakíthatók Euler-féle poliéderekké, nem Matthiessentől, hanem Hesseltől ered. Hessel ezt három példával, tetszetős ábrákat használva szemlélteti. (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad. 14—15. o.) Ő viszont nem arra használta ezt a módszert, hogy a kivételeket a szabályhoz „igazítsa", hanem éppen ellenkezőleg, arra, hogy „megszüntesse a kivételeket", olyan, hozzájuk „meglehetősen hasonló poliédereket" mutatván be, „amelyekre érvényes Euler törvénye".

Az élek csak a te racionális átalakításodban léteznek.

BÉTA: Ezen gondolkodni fogok. Egy dolog világos. A tanár úr megbírált azért az öntelt kijelentésemért, hogy módszerem bizonyosságra vezet, és azért is, hogy megfeledkeztem a bizonyításról. Ez a bírálat a te „torzszülött-kiigazításodra" éppúgy érvényes, mint az én „kivételkizárásomra".

TANÁR: Delta, maga mit szól ehhez? *Maga* hogy űzné el az ördögként kísértő gyűrű alakú lapot?

DELTA: Sehogy. Áttérített az ön módszerére. Csak arra vagyok kíváncsi, miért nem építi be az eddig elhanyagolt *harmadik* lemmát is? Egy negyedik — remélem, végső — megfogalmazást ajánlok: „Mindazok a poliéderek Euler-félék, amelyek *a)* egyszerűek, *b)* mindegyik lapjuk egyszeresen összefüggő, *c)* olyanok, hogy a kiterítésből és háromszögelésből eredő háromszögekből álló hálóban a háromszögeket úgy lehet megszámozni, hogy megfelelő sorrendben való eltávolításuk során $c-é+l$ nem változik, amíg el nem jutunk az utolsó háromszöghöz."[1] Kíváncsi vagyok, miért nem javasolta azonnal ezt. Ha valóban komolyan venné a módszerét, az *összes* lemmát azonnal *feltétel*lé alakította volna át. Mire való ez az „aprólékos mérnöki munka"?[2]

ALFA: A *tory* forradalmár lett! Javaslatod megdöbbent, hiszen teljesen utópikus. Ugyanis nemcsak *három* lemma van. Sok mással együtt miért ne tehetnénk hozzá ilyesféle feltételeket: „4. ha $1+1=2$", „5. ha minden háromszögnek három csúcsa és három éle van", mivel minden kétséget kizáróan használjuk ezeket a lemmákat is? Szerintem csak azokat a lemmákat alakítsuk át feltétellé, amelyekre ellenpéldát találtunk!

GAMMA: Ez túlságosan esetlegesnek látszik ahhoz, hogy elfogadjam

1 Ez az utolsó lemma szükségtelenül erős. A bizonyítás céljára elég volna azzal a lemmával helyettesíteni, hogy „a kiterítésből és háromszögelésből eredő háromszögekből álló háló esetében $c-é+l=1$". Úgy látszik, Cauchy nem vette észre a különbséget.

2 A hallgatók nyilván meglehetősen tájékozottak a legújabb társadalomfilozófiában. Ezt a terminust Popper alkotta. (*K. R. Popper:* The Poverty of Historicism. Id. kiad. 64. o.)

5*

módszertani szabályként. Építsük be mindazokat a lemmákat, amelyekkel szemben ellenpéldákra *számíthatunk*, azaz mindazokat, amelyek nem nyilvánvalóan, vitathatatlanul igazak!

DELTA: Nos, nyilvánvalónak találja-e valaki harmadik lemmánkat? Alakítsuk át egy harmadik feltétellé!

GAMMA: Mi van akkor, ha a bizonyításunk lemmái által kifejezett műveletek nem teljesen függetlenek egymástól? Ha egyes műveletek elvégezhetők, akkor a fennmaradó műveletek *szükségképpen* elvégezhetők. Ami engem illet, én azt gyanítom, hogy *ha egy poliéder egyszerű, akkor mindig létezik a kialakított síkhálóban a háromszögek elvételének olyan sorrendje, amelyben* $c-é+l$ *nem változik*. Ha van ilyen sorrend, az első lemma beépítése a sejtésbe felment minket a harmadik lemma beépítésétől.

DELTA: Azt állítod, hogy az első feltétel magában foglalja a harmadikat. Be tudod bizonyítani?

EPSZILON: Én igen.[1]

ALFA: Bármilyen érdekes a szóban forgó bizonyítás, nem segít problémánk megoldásában: meddig kell elmennünk sejtésünk helyesbítésében? Talán tényleg megvan az a bizonyításod, amit emlegetsz, de ez csak új allemmákra bontja fel a harmadik lemmát. Most már ezeket is feltételekké alakítsuk át? Hol álljunk meg?

KAPPA: A bizonyításokban végtelen leszálló lánc van; ezért a bizonyítások nem bizonyítanak. Észre kellene már venned, hogy a bizonyítás játék; addig szabad játszani, amíg élvezed, és abba kell hagyni, ha megunod.

EPSZILON: Nem, ez nem játék, ez komoly dolog. A végtelen leszálló

1 Tulajdonképpen először Reichardt javasolt egy ilyen bizonyítást. (*H. Reichardt:* Losung der Aufgabe 274. *In:* „Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 1941. 23. o.) Vö. még: *B. L. van der Waerden:* Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flachen. *In:* „Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig", 1941. 147—160. o. Hilbert és Cohn-Vossen megelégedett azzal, hogy Gamma állításának igazságát „könnyű belátni". (*D. Hilbert—S. Cohn-Vossen:* Anschauliche Geometrie. Id. kiad. 292. o.)

láncot olyan triviálisan igaz lemmákkal lehet megállítani, amelyeket nem kell átalakítani feltétellé.

GAMMA: Pontosan erre gondoltam. Nem alakítjuk át feltétellé azokat a lemmákat, amelyek triviálisan igaz elvekből bizonyíthatók. Azokat a lemmákat sem építjük be, amelyek — esetleg ilyen triviálisan igaz elvek segítségével — korábban megfogalmazott lemmákból bizonyíthatók.

ALFA: Helyes. Abbahagyhatjuk tehát sejtésünk helyesbítését, miután a két nem triviális lemmát feltétellé alakítottuk át. Tényleg azt hiszem, hogy a helyesbítésnek ez a módszere — a lemmák beépítése — hibátlan. Úgy tűnik, ez nemcsak helyesbíti, hanem *tökéletesíti* is a sejtést. És közben valami fontos dolgot tanultam: hibás az az állítás, hogy „egy »bizonyítási feladat« célja meggyőzően bebizonyítani, hogy egy bizonyos világosan megfogalmazott állítás igaz, vagy igazolni, hogy hamis".[1] Egy „bizonyítási feladat" *igazi* célja az, hogy az eredeti, *„naiv" sejtést* valódi *„tétellé" helyesbítse*, sőt, tökéletesítse.

Naiv sejtésünk ez volt: „Minden poliéder Euler-féle."

A torzszülöttek kizárásának módszere ezt a naiv sejtést a benne használt terminusok átértékelésével védi meg, mégpedig oly módon, hogy végül egy *torzszülötteket kizáró tételt* kapjunk: „Minden poliéder Euler-féle." De a naiv sejtés és a torzszülötteket kizáró tétel nyelvi kifejezésének azonossága — a terminusok jelentésének rejtett változásai mögött — elfed egy lényeges helyesbítést.

A kivételek kizárásának módszere az érveléstől valójában idegen elemet vezetett be: a konvexitást. A *kivételeket kizáró tétel* a következő volt: „Minden konvex poliéder Euler-féle."

A lemmák beépítésének módszere az érvelésre — azaz a bizonyításra — támaszkodott, és semmi másra. Tulajdonképpen *összefoglalta a bizonyítást a lemmákat egyesítő tételben:* „Minden egyszerű, egyszeresen összefüggő lapokból álló poliéder Euler-féle."

Ez azt mutatja, hogy (most a „bizonyítás" terminust a hagyományos értelemben használom) *az ember nem azt bizonyítja be, amit be akart*

1 *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 167. o.

bizonyítani. Ezért egyetlen bizonyítás sem fejeződhet be e szavakkal: „*Quod erat demonstrandum.*"[1]

BÉTA: Egyesek szerint a felfedezés során a tételek megelőzik a bizonyításokat: „A matematikai tételre először rá kell jönni, mielőtt bizonyítaná az ember." Mások tagadják ezt, és azt állítják, hogy a felfedezés úgy zajlik le, hogy egy meghatározott premissza-halmazból következtetéseket vonunk le, és felfigyelünk az érdekesekre — ha elég szerencsések vagyunk, és egyáltalán találunk ilyeneket. Vagy — egy barátom elbűvölő metaforáját használva — egyesek szerint a heurisztikus „cipzár" egy deduktív struktúrában alulról — a konklúziótól — halad felfelé a premisszákig,[2] míg mások szerint felülről lefelé zárul. Mi a véleményetek?

ALFA: Az, hogy metaforád nem alkalmazható a heurisztikára. A felfedezés nem felfelé vagy lefelé halad, hanem cikcakkban: ellenpéldáktól sarkallva vándorol a naiv sejtéstől a premisszákig, aztán ismét visszafordul, hogy törölje a naiv sejtést, és a tétellel helyettesítse. A naiv sejtés és az ellenpéldák a kész deduktív struktúrában nem szerepelnek: a végtermékben felismerhetetlen a felfedezés cikcakkja.

TANÁR: Nagyon jó, de tegyünk hozzá egy óvatosságra intő megjegyzést! A tétel nem *mindig* különbözik a naiv sejtéstől. A bizonyítás nem jelent szükségképpen helyesbítést. A bizonyítások csak akkor helyesbítenek, ha a bizonyítás gondolata a naiv sejtés olyan váratlan vetületeinek felfedezésére vezet, amelyek azután a tételben is megjelennek. Lehetséges azonban, hogy az *érett* elméletekben nem ez a helyzet. A fiatal, *fejlődő* elméletek bizonyosan ilyenek. A felfedezésnek és igazolásnak, a helyesbítésnek és bizonyításnak ilyen összefonódása elsősorban az utóbbiakra jellemző.

KAPPA *(félre)*: Az érett elméletek megfiatalíthatók. A felfedezés mindig feleslegessé teszi az igazolást.

1 Ez az utolsó mondat *Alice Ambrose* érdekes dolgozatából való (Proof and the Theorem Proved. *In:* „Mind", 1959. 438. o.).

2 Vö.: 25. o. 2. lj. A „cipzár" metaforát Braithwaite találta ki, ő azonban csak „logikai" és „episztemológiai" cipzárakról beszél, „heurisztikusról" nem. (*R. B. Braithwaite:* Scientific Explanation. Cambridge 1953. 352. o.)

SZIGMA: Ez az osztályozás megfelel az enyémnek! Az én első állítástípusom az érett típus volt, a harmadik a fejlődő...

GAMMA *(félbeszakítja)*: A tétel hamis! Találtam rá egy ellenpéldát.

5. A bizonyításelemzés kritikája globális, de nem helyi ellenpéldákkal. A szigorúság problémája

a) A torzszülöttek kizárása a tétel védelmében

GAMMA: Most jöttem rá, hogy *5. ellenpéldám*, a henger, nemcsak a naiv sejtést cáfolja, hanem a tételt is. Noha mindkét lemmát kielégíti, mégsem Euler-féle.

ALFA: Kedves Gamma, ne bolondozz! A henger vicc volt, nem ellenpélda. Egyetlen komoly matematikus sem tekinti a hengert poliédernek.

GAMMA: Miért nem tiltakoztál *3. ellenpéldám*, a tengerisün ellen? Az kevésbé volt „bolondos", mint a henger?[1] *Akkor* persze *bíráltad* a naiv sejtést, és örültél a cáfolatoknak. *Most véded* a tételt, és irtózol a cáfolatoktól! *Akkor*, ha ellenpélda került elő, azt kérdezted: *Mi a hiba a sejtésben? Most* azt kérdezed: *Mi a hiba az ellenpéldában?*

DELTA: Alfa, torzszülött-kizáróvá váltál! Nem zavar?[2]

1 A tengerisünről és a hengerről a 36—58. oldalon volt szó.

2 Az informális matematikában a tétel védelmének fontos módszere a torzszülöttek kizárása: „Mi a hiba azokban az ellenpéldákban, amelyekben az Euler-formula kudarcot vall? Milyen geometriai feltételek biztosítanák az Euler-formula érvényességét, pontosabbá téve *l*, *c* és *é* jelentését?" (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 29. feladat. — A henger a 24. feladatban szerepel.) A válasz: „... egy élnek ... csúcsokban kell végződnie..." (uo. 225. o.). Pólya ezt általánosan is megfogalmazza: „A matematikai kutatásban gyakran előforduló helyzet: Már megfogalmaztunk egy tételt, de meg kell adni azoknak a terminusoknak a pontosabb jelentését, amelyeket a megfogalmazásban használtunk, hogy a tételt teljesen szabatossá tegyük." (Uo. 55. o.)

b) Rejtett lemmák

ALFA: De igen. Lehet, hogy egy kicsit meggondolatlan voltam. Hadd gondolkozzam! *Az ellenpéldák háromfélék lehetnek.* Az *első* típust, a helyi, de nem globális ellenpéldák esetét, már tárgyaltuk — ez biztos nem cáfolja meg a tételt.[1] A *második* fajtája az ellenpéldáknak, amely egyszerre globális és helyi, nem igényel semmiféle magyarázatot: nemhogy megcáfolná, hanem éppenséggel megerősíti a tételt. Lehet, hogy van egy *harmadik* típus is, amelyik globális, de nem helyi. Ez megcáfolná a tételt. Nem hittem, hogy ez lehetséges. Gamma most azt állítja, hogy a henger ilyen. Ha nem akarjuk torzszülöttként elvetni, el kell ismernünk, hogy globális ellenpélda: $c-é+l=1$. De nem a második, ártalmatlan típusba tartozik? Fogadok, hogy legalább az egyik lemmát nem elégíti ki.

GAMMA: Ellenőrizzük! Az biztos, hogy az első lemmát kielégíti: ha eltávolítom az alsó lapot, a megmaradó felületet könnyen kiteríthetem a táblára.

ALFA: De ha történetesen a palástot távolítod el, a tárgy szétesik két darabra.

GAMMA: És akkor mi van? Az első lemma kikötése az volt, hogy a poliéder „egyszerű", azaz „egy lap eltávolítása után egy síkban kiteríthető" legyen. A henger akkor is megfelel ennek a kikötésnek, ha először a palástot távolítod el. Azt állítod, hogy a hengernek ki kell elégítenie egy *kiegészítő* lemmát is, nevezetesen azt, hogy az eltávolítás után *megmaradó hálónak is összefüggőnek kell lennie*. De ki állapította meg *ezt* a lemmát?

ALFA: Mindenki úgy értelmezte a „kiterítést", mint „*egy darabban* való, *szakítás nélküli* kiterítést..." Azért döntöttünk úgy, hogy nem építjük be a harmadik lemmát, mert Epszilon bebizonyította, hogy az elsőből következik.[2] De vess csak egy pillantást erre a bizonyításra: a sarkpontja az a feltevés, hogy a kiterítés eredménye egy *összefüggő* háló! Másként a háromszögekre bontott háló esetében $c-é+l$ nem 1 lenne.

GAMMA: Akkor miért nem ragaszkodtál ahhoz, hogy *explicit* módon állítsad ezt?

ALFA: Mert úgy vettük, hogy *implicit* módon már megállapítottuk.

GAMMA: Ami téged illet, te bizonyosan nem tetted. Te ugyanis azt javasoltad, hogy az „egyszerű" azt jelentse: „gömbbé felfújható".[1] A henger felfú*jható* gömbbé, tehát a *te* értelmezésed szerint *igenis* kielégíti az első lemmát.

ALFA: Hm... De azzal biztosan egyetértesz, hogy *nem* elégíti ki a második lemmát, amely szerint „*minden lap két részre oszlik, ha egy átlóval szétvágjuk*". Hogyan tudod háromszögekre bontani a kört vagy a palástot? Ezek a lapok egyszeresen összefüggők?

GAMMA: Természetesen.

ALFA: De a hengerre egyáltalán nem lehet átlókat húzni! Az átló olyan él, amely két szomszédos csúcsot köt össze. A te hengerednek viszont egyáltalán nincsenek csúcsai!

GAMMA: Ne izgasd fel magad! Ha be akarod bizonyítani, hogy a kör nem egyszeresen összefüggő, akkor húzz egy olyan átlót, amely *nem* hoz létre új lapot!

ALFA: Ne bolondozz! Nagyon jól tudod, hogy nem húzhatok ilyen átlót.

GAMMA: Akkor ismerd el, hogy „a körnek van olyan átlója, amely nem hoz létre új lapot" állítás *hamis!*

ALFA: Elismerem. Most miben sántikálsz?

GAMMA: Akkor azt is kénytelen vagy elismerni, hogy igaz a tagadása: „a kör minden átlója egy új lapot hoz létre", vagy „a kör egyszeresen összefüggő".

ALFA: Nem tudsz egyetlen *példát* sem mondani arra a lemmádra, hogy „a kör minden átlója új lapot hoz létre" — ezért ez nem *igaz*, hanem *értelmetlen*. Igazságfogalmad hamis.

1 A helyi, de nem globális ellenpéldákról a 27—30. oldalon volt szó.
2 L.: 68. o.

1 L.: 59. o.

KAPPA *(félre)*: Először arról vitatkoztak, hogy mi a poliéder, most meg már arról, mi az igazság.[1]

GAMMA: De azt már elismerted, hogy a lemma tagadása *hamis*. Lehet egy *A* tétel *értelmetlen*, ha *nem-A értelmes és igaz?* Az értelmességről alkotott fogalmad értelmetlen!

Értem a problémádat, de ezen egy jelentéktelen átfogalmazással segíthetünk. Akkor nevezzünk egy lapot egyszeresen összefüggőnek, ha *„minden x-re igaz, hogy ha x egy átló, x kettévágja a lapot"*. Sem a körnek, sem a palástnak nem lehetnek átlói, ezért esetünkben, bármi legyen is *x*, az előtag mindig hamis. Ezért bármely objektum szemlélteti is a feltételt, az állítás értelmes is, igaz is. Tehát, mind a kör, mind a palást egyszeresen összefüggő, a henger kielégíti a második lemmát.

ALFA: Nem. Ha nem tudsz átlókat húzni, s ily módon háromszögekre osztani a lapokat, sohasem kapsz háromszögekből álló hálót, és sohasem leszel képes lezárni a bizonyítást. Hogy állíthatod, akkor, hogy a henger kielégíti a második lemmát? Nem látod, hogy *kell lenni egy egzisztenciális kikötésnek* a lemmában? Annak, hogy egy lap egyszeresen összefüggő, bizonyára ez a helyes értelmezése: *„minden x-re igaz, hogy ha x egy átló, x kettévágja a lapot, és van legalább egy olyan x, ami átló"*. Lehet, hogy eredeti megfogalmazásunk ezt nem mondta ki, de benne volt mint nem tudatos, *„rejtett feltevés"*.[2] A henger egyetlen lapja sem felel meg ennek a lemmának, ezért a henger olyan ellenpélda, amely *egyszerre* globális és helyi, tehát nem cáfolja a tételt.

GAMMA: Először a kiterítéssel kapcsolatos lemmát módosítottad úgy, hogy bevezetted az „összefüggőség" fogalmát, most pedig a háromszögekre osztás lemmáját változtatod meg, bevezetvén egzisztenciális

1 Gamma *üres terjedelmű igaz állításai* a tizenkilencedik század fontos újításai voltak. Ezek probléma-hátterét még nem tárták fel.

2 „Eukleidész... alkalmaz egy olyan axiómát, amelyről fogalma sincs." (*B. Russell:* Principles of Mathematics. London 1903. 407. o.) „Rejtett feltevést csinálni" *(sic!)* — ez a matematikusok és természettudósok körében mindennapi kifejezés. Lásd még Gamow értekezését Cauchy bizonyításáról (*G. Gamow:* One, Two, Three ... Infinity. New York 1953. 56. o.), vagy Eves és Newsom véleményét Eukleidészről (*H. Eves—C. V. Newsom:* An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics. New York 1958. 84. o.)

kikötésedet! És ez az egész zavaros fecsegés a „rejtett feltevésekről" csak azt a tényt rejtegeti, hogy a hengerem késztetett ezeknek a módosításoknak a kiagyalására.

ALFA: Miféle zavaros fecsegés? Már megegyeztünk abban, hogy elhagyjuk, azaz „elrejtjük" a triviálisan igaz lemmákat.[1] Akkor miért kellene kijelenteni és beépíteni a triviálisan *hamis* lemmákat, hiszen ezek éppoly triviálisak és éppoly unalmasak! Vedd figyelembe *(en thyme)*, de ne mondd ki őket! A rejtett lemma nem hiba, hanem háttérismeretre utaló értelmes „gyorsírás".

KAPPA *(félre)*: Háttérismeret ott van, ahol feltételezzük, hogy mindent tudunk, holott semmit sem tudunk.[2]

1 L.: 68—69. o.

2 Az informális matematikával foglalkozó jó kézikönyvek rendszerint pontosan meghatározzák „gyorsírásukat", vagyis azokat az akár igaz, akár hamis lemmákat, amelyekről úgy vélik, annyira triviálisak, hogy említésre sem méltók. Erre azt a kifejezést szokták használni, hogy „feltételezzük az *x* típusú lemmák *ismeretét*". Az ismertnek tételezett dolgok mennyisége egyre csökken, ahogy a kritika a háttérismeretet ismeretté alakítja át. Cauchy például még azt sem vette észre, hogy nevezetes műve (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad.) feltételezte a *valós számok elméletének* „ismeretét". Torzszülöttként vetett volna el minden olyan ellenpéldát, amely az irracionális számok természetére vonatkozó lemmákat explicitté tette. Nem így Weierstrass és iskolája: az informális matematika kézikönyvei ma már tartalmaznak egy új fejezetet a valós számok elméletéről, ahol összegyűjtve közlik ezeket a lemmákat. Bevezetésükben viszont általában feltételezik a *„racionális számok elméletének* ismeretét". (Lásd például *G. H. Hardy* Pure Mathematics című művének 1914-es, második, majd további kiadásait, ugyanis az első kiadás a valós számok elméletét még háttérismeretnek tekintette; vagy *W. Rudin:* Principles of Mathematical Analysis. New York 1953.) A szigorúbb kézikönyvek még inkább korlátozzák a háttérismeretet: Landau híres könyvének (*E. Landau:* Grundlagen der Analysis. Lipcse 1930.) bevezetőjében kizárólag a *„logikus okfejtés és a német nyelv"* ismeretét feltételezi. A sors iróniája, hogy éppen ugyanakkor bizonyította be Tarski, hogy az így kihagyott teljesen triviális lemmák nemcsak hamisak lehetnek, hanem még ellentmondásosak is, lévén a német szemantikailag zárt nyelv. Az ember ugyancsak kíváncsi, hogy „a szerző beismeri *x* területet illető tudatlanságát" vallomás mikor fogja átvenni „a szerző feltételezi *x* terület ismeretét" eufemizmus helyét; bizonyára csak akkor, ha kiderül, hogy az ismeretnek nincs alapja.

GAMMA: Ha voltak tudatos előfeltevéseid, ezek a következők voltak: *a)* egy lap eltávolítása mindig összefüggő hálót eredményez, és *b)* bármely nem háromszög alakú lap átlókkal háromszögekre osztható. Amíg a *tudatalattidban* voltak, *triviálisan igaznak* tekintetted őket — a henger azonban belebukfenceztette őket a *triviálisan hamis lemmák tudatos* jegyzékébe. Mielőtt a hengerrel szembekerültél, el sem tudtad képzelni, hogy ez a két lemma hamis lehet. Ha most azt mondod, hogy igen, akkor meghamisítod a történelmet, hogy megtisztítsd a tévedésektől.[1]

THÉTA: Alfa, nemrég még kigúnyoltad a Delta definícióiban minden egyes cáfolat után föl-fölbukkanó „rejtett" kikötéseket. Most pedig te egészíted ki „rejtett" kikötésekkel a lemmákat minden cáfolat után, te változtatgatod az álláspontodat, és a látszat megőrzése érdekében megpróbálod leplezni ezt. Nem érzed kínosan magad?

1 Amikor először veszik észre a rejtett lemmát, tévedésnek tekintik. Amikor Becker először mutatott ki egy „rejtett" *(stillschweigend)* előfeltevést Cauchy bizonyításában — bár ezt csak Baltzer nyomán idézte (*R. Baltzer:* Die Elemente der Mathematik. Id. kiad.) — *„tévedésnek"* nevezte. (*J. C. Becker:* Über Polyeder. Id. kiad. 67—68. o.) Felhívta a figyelmet arra a tényre, hogy Cauchy szerint *minden* poliéder egyszerű; ez a lemma nemcsak rejtett, hanem hamis is. A történészek azonban nem tudják elképzelni, hogy nagy matematikusok is követhetnek el ilyen tévedéseket. Valóságos történelemhamisítási program található Poincarénál: „Egy olyan bizonyítás, amelyik nem szigorú, semmi. Azt hiszem, senki nem tagadja ezt az igazságot. De ha a szó szoros értelmében fognánk fel, arra a következtetésre jutnánk, hogy 1820 előtt például nem létezett matematika; ez nyilvánvaló túlzás volna: az akkori geométerek magától értetődőnek tekintették azt, amit mi terjengős értekezésben fejtünk ki. Nem arról van szó, hogy ezt egyáltalán nem értették, csak túl gyorsan átugrották, pedig a teljes megértéshez nem lett volna szabad sajnálni a fáradságot, és ki is kellett volna mondani." (*H. Poincaré:* Science et méthode. Id. kiad. 374. o.) Becker beszámolóját Cauchy „tévedéséről" 1984-es stílusban kellett átírni: „duplaplusznemjó von. nemtévedések átír teljesen". Az átírás Steinitztől származik, aki azt bizonygatta, hogy „nem maradhatott észrevétlen az a tény, hogy a tétel nem általánosan érvényes" [*E. Steinitz:* Polyeder und Raumeinteilungen. *In:* W. F. Meyer és H. Mohrmann (szerk.): Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Id. kiad. 3. k. 20. o.]. Maga Poincaré alkalmazta programját az Euler-tételre: „Közismert, hogy Euler bebizonyította, hogy konvex poliéderek esetében $c-é+l=2$." (*H. Poincaré:* Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *In:* „Comptes Rendus de Séances de l'Académie des Sciences", 1893. 144. o.) Euler persze *minden* poliéderre érvényesként fogalmazta meg tételét.

KAPPA: Semmi sem szórakoztat annyira, mint a sarokba szorított dogmatikus. Miután a harcos szkeptikus palástját öltötte magára, hogy szétzúzza a dogmatizmus egyik kevésbé veszélyes válfaját, Alfa dühöngeni kezd, amikor ugyanolyan szkeptikus érvekkel *őt* szorítják sarokba. Gyorsan és kapkodva játszik: Gamma ellenpéldáját először azzal a védekező mechanizmussal próbálja leküzdeni, amelyet korábban ő maga leplezett le és tiltott meg (a torzszülöttek kizárása), majd pedig úgy, hogy a bizonyításba „rejtett lemmák" sorát csempészi be, a tételbe meg az ezeknek megfelelő „rejtett feltételeket". Mi a különbség?

TANÁR: Alfa biztos akkor került bajba, amikor dogmatikus fordulatot tett a lemma-beépítés értelmezése folyamán. Azt gondolta, hogy a bizonyítás gondos felülvizsgálata olyan tökéletes bizonyításelemzést eredményez, amely *valamennyi* hamis lemmát tartalmazza (pontosan úgy, ahogy Béta azt hitte, hogy képes felsorolni *valamennyi* kivételt). Azt gondolta, hogy beépítésükkel nemcsak helyesbített tételhez juthat, hanem *ellenpéldáktól nem háborgatott, tökéletesített* tételhez.[1] A henger megmutatta, hogy tévedett; ahelyett azonban, hogy ezt elismerné, most csak az olyan bizonyításelemzést akarja teljesnek nevezni, amely valamennyi *releváns* hamis lemmát tartalmazza.

c) A bizonyítás és cáfolatok módszere

GAMMA: Azt javaslom, fogadjuk el a hengert a tétel igazi ellenpéldájának. Új lemmát (vagy lemmákat) találok ki, amelye(ke)t a henger majd megcáfol, és a lemmá(ka)t hozzáteszem az eredetiekhez. Ez persze ugyanaz, mint amit Alfa csinált. De ahelyett, hogy úgy „elrejteném", hogy rejtetté *váljanak*, nyíltan bejelentem őket.

A henger, amely a régi bizonyításelemzést és az ennek megfelelő régi

1 L.: 54. o.

tételt illetően rejtélyes, veszélyes, globális, de nem helyi (tehát harmadik típusú) ellenpélda volt, az új bizonyításelemzést és az ennek megfelelő tételt illetően most ártalmatlan, globális *és* helyi (azaz második típusú) ellenpélda lesz.

Alfa azt hitte, hogy az ellenpéldák általa adott osztályozása abszolút, valójában pedig csak az ő bizonyításelemzésére vonatkozik. Ahogy fejlődik a bizonyításelemzés, a harmadik típusú ellenpéldák második típusú ellenpéldákká válnak.

LAMBDA: Így van. Egy bizonyításelemzés akkor „szigorú" vagy „érvényes", és a megfelelő matematikai tétel akkor és csak akkor igaz, ha nincs „harmadik típusú" ellenpéldája. Ezt a kritériumot a *hamisság visszaemelése elvének* nevezem, mert előírja, hogy a globális ellenpéldák egyben helyiek is legyenek: a hamisságnak a naiv sejtésből a lemmákba, a tétel következményéből előtételébe kell visszaemelődnie. Ha egy globális, de nem helyi ellenpélda megsérti ezt az elvet, úgy segítünk ezen, hogy a bizonyításelemzést kiegészítjük egy megfelelő lemmával. A hamisság visszaemelésének elve ezért a bizonyításelemzés *in statu nascendi szabályozó elve*, és a globális, de nem helyi ellenpélda a bizonyítás előrehaladásának serkentője.

GAMMA: Emlékezzetek vissza, már azelőtt sikerült felismerni három gyanús lemmát, hogy egyetlen cáfolatot is találtunk volna, és nekiláttunk a bizonyításelemzésnek.

LAMBDA: Igaz. A bizonyításelemzés nemcsak globális ellenpéldák kényszerítő hatására kezdődhet el, hanem akkor is, ha az emberek már megtanulták, hogy résen kell lenniük a „meggyőző" bizonyításokkal szemben.[1]

Először minden globális ellenpélda harmadik típusú ellenpéldának

1 Tanulócsoportunk ugyancsak fejlett: Alfa, Béta és Gamma már akkor gyanakodott három lemmára, amikor még egyetlen ellenpélda sem merült fel. A bizonyításelemzés történetileg valójában évtizedekkel később született meg: hosszú ideig vagy elhallgatták, vagy torzszülöttként üldözték, vagy kivételként sorolták fel az ellenpéldákat. A heurisztikus átlépés a globális ellenpéldáról a bizonyításelemzésre — a hamisság visszaemelésének elve — a tizenkilencedik század elejének informális matematikájában gyakorlatilag ismeretlen volt.

látszik, és minden lemma „rejtett lemmaként" kezdi pályafutását. Ezek a bizonyításelemzés fokozatos felépítésére ösztönöznek, és így egyenként második típusú ellenpéldává válnak.

A *második esetben* — amikor már gyanakvóak vagyunk és keressük a cáfolatokat — ellenpélda nélkül is a bizonyításelemzés magas szintjére juthatunk. Ekkor két lehetőség van. Az *első* az, hogy helyi ellenpéldákkal *sikerül* megcáfolni a bizonyításelemzésben felsorolt lemmákat. Könnyen lehet, hogy ezeket globális ellenpéldáknak is találjuk.

ALFA: Így fedeztem fel a képkeretet: olyan poliédert kerestem, amely egy lap eltávolítása után nem teríthető ki egy síkba.

SZIGMA: Akkor nemcsak a cáfolatok hatnak serkentőként a bizonyításelemzésben, hanem a bizonyításelemzés is lehet serkentő hatással a cáfolatokra! Micsoda gonosz szövetség két állítólagos ellenség között!

LAMBDA: Így van. Ha egy sejtés nagyon plauzibilisnak vagy egyenesen magától értetődőnek tűnik, bizonyítani kell: kiderülhet, hogy nagyon mesterkélt és bizonytalan lemmákon alapul. A lemmák cáfolata pedig az eredeti sejtés némiképp váratlan cáfolatát is eredményezheti.

SZIGMA: Bizonyításból származó cáfolatokat!

GAMMA: Akkor „a logikai bizonyítás értéke nem az, hogy hitre késztet, hanem az, hogy kételyeket ébreszt".[1]

LAMBDA: De hadd térjek vissza a *második lehetőségre*, amikor egyáltalán *nem* találunk helyi ellenpéldákat a gyanús lemmákra!

SZIGMA: Vagyis amikor a cáfolatok nem segítik elő a bizonyításelemzést. Akkor mi történne?

LAMBDA: Különcnek bélyegeznének minket. A bizonyítás teljes tiszteletet vívna ki, és a lemmák tisztáznák magukat a gyanú alól. Bizonyításelemzésünket csakhamar elfelejtenék.[2]

1 *H. G. Forder:* The Foundations of Euclidean Geometry. New York 1958. VIII. o. Vagy: „A bizonyítások egyik fő érdeme az, hogy némi szkepticizmusra nevelnek a bebizonyított eredménnyel szemben." (*B. Russell:* Principles of Mathematics. Id. kiad. 360. o. Kitűnő példát is hoz.)

2 Köztudott, hogy a *kritika* kétségbe vonhat — sőt, végül meg is cáfolhat — „*a priori* igazságokat", s így *bizonyításokat* puszta *magyarázattá* változtathat. Nem ilyen közismert, de legalább ilyen fontos, hogy ha *hiányzik a kritika vagy cáfolat*, való-

színűtlen sejtések „*a priori* igazsággá", kísérleti magyarázatok bizonyítássá válhatnak. E séma két nagy példája Eukleidész és Newton érvényesülése és hanyatlása. Hanyatlásuk története jól ismert, érvényesülésük történetét viszont rendszerint meghamisítják.

Úgy látszik, az *euklideszi geometria* kozmológiai elméletként vetődött fel. (Vö.: *K. R. Popper:* The Nature of Philosophical Problems and Their Roots in Science. *In:* Conjectures and Refutations. Id. kiad. 187—189. o.) Mind „posztulátumai", mind „axiómái" (vagy „közönséges fogalmai") olyan merész, provokatív állítások voltak, amelyek kihívást jelentettek Parmenidésszel és Zénonnal szemben, akiknek tanai szerint ezek a „posztulátumok" nemcsak hamisak, hanem logikailag is hibásak, felfoghatatlanok lettek volna. Csak később kezdték a „posztulátumokat" vitathatatlanul igaznak, a merész Parmenidész-ellenes „axiómákat" (például:„ az egész nagyobb, mint a rész") annyira triviálisnak tartani, hogy a későbbi bizonyításelemzésekből kihagyták őket, és „rejtett lemmákká" váltak. Ez a folyamat Arisztotelésszel kezdődött: ő Zénont házsártos különcnek, érvelését „szofisztikának" minősítette. Ezt a történetet a közelmúltban megragadó részletességgel magyarázta Szabó Árpád. (*Szabó Á.:* Anfänge des Euklidischen Axiomensystems. *In:* „Archive for the History of Exact Sciences", 1960. 1. sz. 65—84. o.) Szabó felhívta a figyelmet arra, hogy Eukleidész idejében az „axióma" — a „posztulátumhoz" hasonlóan — olyan, a kritikus dialógusban (dialektikában) felvetett állítást jelentett, amelynek következményeit *anélkül* kellett ellenőrizni, hogy az állítást a vitapartner igaznak fogadta volna el. A történelem iróniája, hogy jelentését a feje tetejére állították. Eukleidész tekintélye a felvilágosodás korában érte el csúcspontját. Clairaut arra ösztönzi kollégáit, hogy ne „homályosítsák el a bizonyításokat, és ne keltsenek ellenszenvet az olvasókban" evidens igazságok kijelentésével; Eukleidész is csak azért tette ezt, hogy meggyőzze a „makacs szofistákat". (*A. C. Clairaut:* Éléments de geométrie. Párizs 1741. X. és XI. o.)

Newton mechanikája és gravitációelmélete ugyancsak vakmerő feltevésként vetődött fel, amelyet Leibniz kigúnyolt és „okkultnak" nevezett, s amelyre maga Newton is gyanakodott. De néhány évtizeddel később — cáfolatok híján — axiómáit kezdték kétségtelenül igaznak tartani. A gyanakvásokat elfelejtették, a kritikusokat „hóbortosnak", ha nem „maradinak" minősítették; a legbizonytalanabb feltételezések némelyikét kezdték olyan triviálisnak tartani, hogy a kézikönyvek soha nem is említették őket. A vita — Kanttól Poincaréig — többé nem Newton elméletének igazságáról, hanem bizonyosságának fokáról folyt. A newtoni elmélet értékelésében bekövetkezett hirtelen fordulatra először Karl Popper mutatott rá. (L.: *K. R. Popper:* Conjectures and Refutations. Id. kiad. Több helyen is.)

A politikai ideológiák és a tudományos elméletek közti hasonlóság eszerint sokkal szélesebb körű, mint általában gondolják: azok a politikai ideológiák, amelyek eleinte vitathatók (és amelyeket esetleg csak kényszer hatására fogadnak el), akár

Cáfolatok nélkül nem tartható fenn a gyanú: a gyanú fénysugara hamar elhalványul, ha a cáfolat reflektorfényét nem támasztja alá a bizonyításnak a „triviális igazság" félhomályában alig észlelt, elhanyagolt pontjára irányító ellenpélda.

Mindez azt mutatja, hogy a bizonyítás és a cáfolatok nem választhatók el élesen egymástól. Ezért azt javaslom, hogy kereszteljük át a „*lemmák beépítésének módszerét*" a „*bizonyítás és cáfolatok módszeréve*". Hadd szögezzem le három heurisztikus szabályban e módszer fő jellemzőit:

1. szabály: Ha van egy sejtésed, kezdd el bizonyítani és cáfolni! Gondosan vizsgáld meg a bizonyítást, hogy felsorolhasd a nem triviális lemmákat (bizonyításelemzés); keress ellenpéldákat mind a sejtésre (globális ellenpéldákat), mind a gyanús lemmákra (helyi ellenpéldákat)!

2. szabály: Ha van egy globális ellenpéldád, mondj le a sejtésről, a bizonyításelemzést egészítsd ki egy megfelelő lemmával, amit az ellenpélda majd megcáfol, az elvetett sejtést pedig helyettesítsd egy olyan helyesbített sejtéssel, amely az illető lemmát feltételként tartalmazza![1] *Egy cáfolatot se engedj torzszülöttként visszautasítani!*[2] *Igyekezz minden „rejtett lemmát" explicitté tenni!*[3]

egyetlen nemzedék életében kétségbevonhatatlan háttérismeretté változhatnak, a bírálókat pedig elfelejtik (esetleg kivégzik), amíg egy forradalom magáévá nem teszi ellenvetéseiket.

1 Ezt a szabályt valószínűleg Seidel fogalmazta meg először. (L.: *P. L. Seidel:* Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen Darstellen. *In:* „Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften", 1847. 5. sz. 383. o.) Vö.: 199. o.

2 „Jogom van az ön érvelésének feltételeit kielégítő bármely példát felvetni, és határozottan gyanakszom, hogy az ön által bizarrnak, abszurdnak nevezett példák valójában csak kényelmetlenek, mert hátrányosak a tételére." (*G. Darboux:* Lettre à Houel, 19 Février 1874. Idézi *F. Rostand:* Souci d'exactitude et scrupules des mathématiciens. Párizs 1960. 194. o.)

3 „Borzadok a töméntelen implicit lemmától. Rengeteget kell majd dolgoznom ahhoz, hogy megszabaduljak tőlük." (*G. Darboux:* Lettre à Houel, 2 Septembre 1883. Idézi *F. Rostand* az előbbi lábjegyzetben említett munkájában. 261. o.)

6

3. szabály: Ha van egy helyi ellenpéldád, ellenőrizd, vajon nem globális ellenpélda-e egyben! Ha igen, könnyen alkalmazhatod a 2. szabályt.

d) Bizonyítás és a bizonyításelemzés. A tétel fogalmainak relativizálása és a bizonyításelemzés szigorúsága

ALFA: Hogy értetted a *2. szabály*ban a „megfelelő" szót?

GAMMA: Teljesen mindegy. A kérdéses ellenpéldával megcáfolt *bármely* lemmával kiegészíthető, mert *bármely* ilyen lemma helyreállítja a bizonyításelemzés érvényességét.

LAMBDA: Micsoda? Ezek szerint egy olyasféle lemma, hogy „Minden poliédernek legalább 17 éle van", a hengert is elintézné! És bármely egyéb esetleges, *ad hoc* sejtés éppen így megfelelne, ha történetesen az ellenpélda megcáfolja.

GAMMA: Miért ne?

LAMBDA: Már bíráltuk a torzszülött-kizárókat és a kivétel-kizárókat azért, mert figyelmen kívül hagyják a bizonyításokat.[1] Most ugyanezt teszed, kiagyalván egy igazi torzszülöttet: *bizonyításelemzés bizonyítás nélkül!* Közted és a torzszülött-kizárók között csak az a különbség, hogy te arra kényszerítenéd Deltát, hogy tegye explicitté önkényes definícióit, és lemmaként építse be őket a tételbe. A kivételek kizárása és a te bizonyításelemzésed között pedig nincs *semmi* különbség. Az efféle *ad hoc* módszerek ellen az egyetlen biztosíték *megfelelő*, azaz a gondolatkísérlet szellemével összeegyeztethető lemmák alkalmazása! Vagy inkább lemondanál a matematikai bizonyítások szépségéről, és ostoba formális játékkal helyettesítenéd?

GAMMA: Még mindig inkább, mint a „gondolatkísérlet szelleme"! Én a matematika objektivitását védem a te pszichologizmusod ellen.

ALFA: Köszönöm, Lambda, hogy újra megfogalmaztad az én álláspontomat: az ember nem *talál ki* hirtelen egy új lemmát, hogy megbirkózzon egy globális, de nem helyi ellenpéldával; inkább fokozott gondossággal vizsgálja meg a bizonyítást, és ott *felfedezi* a lemmát.

1 L.: 53. és 63. o.

Eszerint én nem „találtam ki" rejtett lemmákat, kedves Théta, és nem „csempésztem be" ezeket a bizonyításba, kedves Kappa. Mindezt tartalmazza már a bizonyítás is, de érett matematikus egy tömör összefoglalásból megérti az egész bizonyítást. Ne cseréljük össze a *hibátlan bizonyítást* a *pontatlan bizonyításelemzéssel!* Még megvan a cáfolhatatlan alaptétel: *„Minden olyan poliéder, amelyre alkalmazható a gondolatkísérlet*, vagy röviden, *minden Cauchy-féle poliéder Euler-féle.*" Elismerem, hogy az én elnagyolt bizonyításelemzésem a Cauchy-féle poliéderek osztályának határvonalát nem nagyon hegyes ceruzával húzta meg. A furcsa ellenpéldák most arra tanítanak, hogy hegyezzük ki a ceruzánkat. De először is, *egyetlen ceruza sem tökéletesen hegyes* (és ha túlzásba visszük a hegyezést, eltörik), másodszor pedig, *a ceruzahegyezés nem alkotó matematika.*

GAMMA: Nem ismerem ki magam. Mi a *te* álláspontod? Eleinte a cáfolatok bajnoka voltál.

ALFA: Óh, az én kamaszkori tévelygéseim! Az érett intuíció félresöpri a vitát.

GAMMA: Első érett intuíciód eredménye volt „tökéletes bizonyításelemzésed". Azt gondoltad, hogy a ceruzád tökéletesen hegyes.

ALFA: Megfeledkeztem a nyelvi kommunikáció, különösen a betűrágókkal és szkeptikusokkal való kommunikáció nehézségeiről. De a matematika veleje a gondolatkísérlet, a bizonyítás. Ennek nyelvi megjelenítése — a bizonyításelemzés — szükséges a kommunikációhoz, de nem tartozik a tárgyhoz. Engem a poliéderek érdekelnek, téged pedig a nyelv. Nem látod milyen nyomorultak az ellenpéldáid? Ezek nyelvi és nem poliedrikus ellenpéldák.

GAMMA: Eszerint egy tétel megcáfolása csak azt tanúsítja, hogy képtelenek vagyunk tetten érni benne a rejtett lemmákat? Egy „tétel" tehát mindaddig értelmetlen, amíg nem értjük meg a bizonyítását?

ALFA: Mivel a nyelv bizonytalansága meggátolja a *bizonyításelemzés szigorúságát*, és a tételalkotást soha véget nem érő folyamattá változtatja, miért törődjünk a tétellel? A gyakorló matematikusok semmi esetre sem teszik. Ha mégis előkerül holmi jelentéktelen „ellenpélda", nem ismerik el, hogy tételüket megcáfolták, legfeljebb csak azt, hogy a

6*

tétel „érvényességi tartományát" alkalmas módon szűkíteni kell.

LAMBDA: Téged tehát sem az ellenpéldák, sem a lemmák beépítése nem érdekel?

ALFA: Így van. Összes szabályaitokat elvetem. Helyettük egyetlen szabályt javasolok: *Alkossunk szigorú (kristálytiszta) bizonyításokat!*

LAMBDA: Azt állítod, hogy *a bizonyításelemzés szigorúsága* elérhetetlen. *A bizonyítás szigorúsága* elérhető? Nem vezethetnek a „kristálytiszta" gondolatkísérletek paradox vagy egyenesen ellentmondásos eredményekre?

ALFA: A nyelv bizonytalan, de a gondolkodás abszolút szigorúságot érhet el.

LAMBDA: De bizonyára „elődeink is azt hitték a fejlődés minden egyes szakaszában, hogy elérték ezt, nem? Ha ők csak ámították magukat, nem csapjuk be magunkat ugyanúgy mi is?"[1]

ALFA: „Napjainkban abszolút szigorúságot értünk el."[2]

(Kuncogás a tanteremben.)[3]

GAMMA: Ez az elmélet a „kristálytiszta" bizonyításról merő pszichologizmus![4]

1 *H. Poincaré:* La valeur de la science. Párizs 1905. 214. o.

2 Uo. 216. o. A „bizonyítás szigorúsága" kritériumának változásai a matematikában nagy forradalmakat idéznek elő. A püthagoreusok szerint a szigorú bizonyításnak aritmetikainak kell lennie, azonban felfedeztek egy szigorú bizonyítást arra, hogy $\sqrt{2}$ „irracionális". Amikor ez a botrány végül nyilvánosságra került, megváltoztatták a kritériumot: diszkreditálták az aritmetikai „intuíciót", és a geometriai intuíció foglalta el a helyét. Ez a matematikai ismeretek (pl. az arányok elmélete) jelentős és bonyolult átszervezését jelentette. A XVIII. században „csalóka" számok rossz hírét költötték a geometriai bizonyításoknak, és a XIX. században a valós számok nehézkes elméletének segítségével ismét trónra emelték az aritmetikai intuíciót. Ma a legfőbb vita arról folyik, hogy mi szigorú és mi nem a halmazelméleti és metamatematikai bizonyításokban. Ezt mutatja az a közismert vita, amely arról folyik, hogy elfogadható-e Zermelo és Gentzen gondolatkísérlete.

3 Mint már említettük, a csoport rendkívül fejlett.

4 A „pszichologizmus" terminus Husserl alkotása. (*E. Husserl:* Logische Untersuchungen. I. k. Tübingen 1968. 1900-ban jelent meg először.) A pszichologizmus korábbi „kritikáját" Frege adta 1893-ban. (*G. Frege:* Grundgesetze der Arithmetik. I. k. Hildesheim 1962. XV—XVI. o.) A modern intuicionisták (nem úgy, mint Alfa) nyíltan magukévá teszik a pszichologizmust: „Egy matematikai tétel egy tisztán empirikus tényt fejez ki, nevezetesen, egy bizonyos konstrukció sikerét... a matematika... az emberi agy bizonyos funkcióinak vizsgálata." (*A. Heyting:* Intuitionism: An Introduction. Amszterdam 1956. 8. és 10. o.) Az ő féltve őrzött titkuk, hogy miképp egyeztetik össze a pszichologizmust a bizonyossággal.

ALFA: Jobb, mint a te bizonyításelemzésed logikai-lingvisztikai pedantériája![1]

LAMBDA: A gúnyolódást félretéve, én is szkeptikus vagyok azzal az elképzeléseddel szemben, hogy a matematika „az értelem lényegében nyelv nélküli működése".[2] Hogy lehet egy működés igaz vagy hamis? Csak a *tagolt* gondolkodás keresheti az igazságot. A bizonyítás nem lehet elegendő: azt is meg kell állapítani, mit bizonyított a bizonyítás. A bizonyítás a matematikus munkájának csak egy szakasza, amelyet bizonyításelemzésnek és cáfolatoknak kell követni, és a szigorú tétellel kell lezárni. A „bizonyítás szigorúságát" a „bizonyításelemzés szigorúságával" kell *összekapcsolni.*

ALFA: Még mindig azt reméled, hogy végül tökéletesen szigorú bizonyításelemzést érsz el? Ha igen, mondd meg, miért nem a henger által „stimulált" új tételed megfogalmazásával kezdted! Ezt csak jelezted. Keservesen mulatságos lett volna a tétel terjedelmessége és esetlensége. És rögtön *első* új ellenpéldád után! Eredeti tételünket egyre pontosabb

1 Az ókori szkeptikusok körében közhelynek számított, hogy még akkor sem tudnánk tökéletesen kifejezni ismereteinket, ha volnának tökéletes ismereteink, de a felvilágosodás korában ez a közhely feledésbe merült. Az intuicionisták fedezték fel újra: elfogadták Kant matematikai filozófiáját, de rámutattak arra, hogy „a tulajdonképpeni matematika tökéletessége és a matematikai nyelv tökéletessége között semmiféle világos kapcsolat nem fedezhető fel" (*L. E. J. Brouwer:* Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism. *In:* „South African Journal of Science", 1952. 140. o.). „A kimondott vagy leírt szóval történő kifejtés — bár a kommunikációhoz szükséges — sohasem adekvát... A tudomány feladata nem nyelvek tanulmányozása, hanem gondolatok alkotása." (*A. Heyting:* Les fondements des mathématiques du point de vue intuitionniste. *In:* F. Gonseth (szerk.): Philosophie mathématique. Párizs 1939. 74—75. o.)

2 *L. E. J. Brouwer:* Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism. Id. kiad. 141. o.

tételek sorozatával helyettesítetted — de csak *elméletben.* Mi a helyzet ennek a relativizálásnak a *gyakorlatával?* Az egyre excentrikusabb ellenpéldákkal egyre triviálisabb lemmák kerülnek szembe, egyre hosszabb és esetlenebb tételek[1] „rossz végtelenjét" [„*vicious infinity*"][2] eredményezve. A kritika addig volt hasznos, míg úgy tűnt, hogy elvezet az igazsághoz, viszont bizonyosan zavaró, ha minden igazságot lerombol, és céltalanul hajszol minket a végtelenbe. Én *gondolatban* megszüntetem ezt a rossz végtelent — te *nyelvi eszközökkel* sohasem tartóztatod fel.

GAMMA: Hiszen én sohasem állítottam, hogy *végtelenül sok* ellenpéldának kell lennie. Egy bizonyos ponton elérhetjük az igazságot, és akkor véget ér a cáfolatok áradata. Persze, nem fogjuk tudni, mikor. Csak a cáfolatok meggyőzőek — a bizonyítások a pszichológiára tartoznak.[3]

1 A matematikusok általában úgy kerülik el a hosszú tételeket, hogy alternatív eszközként hosszú definíciókat alkalmaznak. Így a tételekben csak definiált terminusok (például „közönséges poliéderek") szerepelnek, s ez gazdaságosabb, mivel egy definíció sok tételt rövidít le. Még így is rengeteg helyet foglalnak el a definíciók a „szigorú" magyarázatokban, bár ritkán említik azokat a torzszülötteket, amelyek ezekre a definíciókra késztetnek. Az „*Euler-féle poliéder*" definíciója (a definiáló terminusok némelyikének definíciójával együtt) Fordernél körülbelül 25 sort tesz ki (*H. G. Forder:* The Foundations of Euclidean Geometry. Id. kiad. 67. és 29. o.); a „*közönséges poliéder*" definíciója az *Encyclopaedia Britannica* 1962-es kiadásában 45 sor.

2 Az angol nyelvben a „végtelen visszatérés" [„*infinite regress*"] terminus használatos, de ez csak egyik speciális esete a „rossz végtelennek" *(schlechte Unendlichkeit)*, és itt nem lenne helyénvaló. Alfa ezt a kifejezést nyilvánvalóan a „hibás kör" [„*vicious circle*"] mintájára alkotta.

3 „A logika bizonyos érvek elvetésére késztet bennünket, de semmilyen érvet nem hitethet el velünk." (*H. Lebesgue:* Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Párizs 1928. 328. o.) — **A szerkesztők megjegyzése:* Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy Lebesgue állítása — szó szerinti értelmében — hamis. A modern logika az érvényesség olyan pontos jellemzését adja, amelyet bizonyos érvek — bizonyíthatóan — igenis kielégítenek. Vagyis a logika bizonyára elhitethet velünk egy *érvet*, bár arra valóban nem kényszeríthet, hogy higgyünk egy érvényes érv *következményében*, hiszen lehet, hogy egy vagy több premisszát nem hiszünk el.

LAMBDA: Én még mindig bízom abban, hogy kigyúl a teljes bizonyosság fénye, ha a cáfolatok lassan elfogynak!

KAPPA: De vajon elfogynak-e? Mi van akkor, ha Isten olyannak teremtette a poliédereket, hogy minden rájuk vonatkozó igaz, egyetemes — emberi nyelven megfogalmazott — állítás végtelenül hosszú? Nem istenkáromló antropomorfizmus azt feltételezni, hogy (isteni) igaz tételek véges hosszúságúak?

Légy őszinte! Ezért vagy azért unod a cáfolatokat és az aprólékos tételalkotást. Miért nem teszed le a lantot, és miért nem szállsz ki a játékból? Már lemondtál a „*Quod erat demonstrandum*"-ról. Miért nem mondsz le a „*Quod erat demonstratum*"-ról is? Csak Isten számára van igazság.

THÉTA *(félre):* A vallásos szkeptikus a tudomány legádázabb ellensége!

SZIGMA: Ne dramatizáljuk túlságosan a helyzetet! Végül is csak a bizonytalanságnak egy keskeny félárnyéka forog kockán. Egyszerűen az a helyzet, hogy — mint már mondtam — *nem minden állítás igaz vagy hamis.* Van egy harmadik osztály, amit most „*többé-kevésbé szigorúnak*" neveznék...

THÉTA *(félre):* Háromértékű logika — az ésszerű kritika halála!

SZIGMA: ...és ezek érvényességi tartományát többé-kevésbé megfelelő szigorúsággal állapítjuk meg.

ALFA: Mihez megfelelő?

SZIGMA: Annak a problémának a megoldásához, amelyet meg akarunk oldani.

THÉTA *(félre):* Pragmatizmus! Senkit sem érdekel már az *igazság?*

KAPPA: Vagy a *Zeitgeist*nek megfelelő! „Mind a mai napig elegendő ennyi szigorúság."[1]

THÉTA: Historizmus! *(Elájul.)*

ALFA: Lambdának a „*szigorú bizonyításelemzésre*" vonatkozó szabályai a szépségétől fosztják meg a matematikát, s olyan hosszú, nehézkes tételek szőrszálhasogató tudálékosságával ajándékoznak meg ben-

1 *E. H. Moore:* On the Foundations of Mathematics. *In:* „Science", 1902. 411. o.

nünket, amelyek unalmas, vaskos könyveket töltenek meg, és végül a rossz végtelenbe visznek. Kappa kibúvója konvenció, Szigmáé matematikai pragmatizmus. Micsoda választás egy racionalista számára!

GAMMA: Egy racionalistának tehát élveznie kéne Alfa „szigorú bizonyításait", kifejezhetetlen intuícióját, „rejtett lemmáit", a hamisság visszaemelése elvének kigúnyolását, a cáfolatok kiküszöbölését? A matematikának nem volna semmi köze a kritikához és a logikához?

BÉTA: Bármi is a helyzet, elegem van ezekből a következetlen szójátékokból. Én matematikával akarok foglalkozni, és nem érdekelnek azok a filozófiai nehézségek, amelyek a matematika alapjainak igazolása kapcsán merülnek fel. Ha az értelem nem is szolgáltat ilyen igazolást, természetes ösztönöm megnyugtat.[1]

Ha jól értettem, Ómegának van egy érdekes gyűjteménye alternatív bizonyításokból. Szívesebben hallgatnám meg őt.

ÓMEGA: De „filozófiai" keretbe helyezem őket!

BÉTA: A csomagolás nem érdekel, ha van valami más is a csomagban.

Megjegyzés: Ebben a részben azt próbáltam bemutatni, hogyan vált a matematikai kritika a matematika „alapjai" kutatásának hajtóerejévé.

Döntő fontosságúnak tűnik az a különbség, amelyet *a bizonyítás* és *a bizonyításelemzés*, s ennek megfelelően *a bizonyítás szigorúsága* és *a bizo-*

1 „A természet megcáfolja a szkeptikusokat, az értelem megcáfolja a dogmatikusokat." (*B. Pascal:* Les réflexions sur la géometrie en général. Id. kiad. 1206—1207. o.) Kevés matematikus vallaná be — mint Béta —, hogy az értelem túl gyenge önmaga igazolására. Legtöbbjük a dogmatizmus valamelyik válfaját, a historizmust vagy a zavaros pragmatizmust teszi magáévá, és furcsa módon vak marad ennek tarthatatlansága iránt. Például: „A matematikai igazságok valóban *a teljesen vitathatatlan* [állítások] *prototípusai*... De a matematika nem abszolút merev, folytonosan fejlődik; *a matematika elvei nincsenek egyszer s mindenkorra befagyasztva*, hanem saját életüket élik, és még tudományos viták tárgyát is képezhetik." (*А. Д. Александров:* Общий взгляд на математику. *In:* А. Д. Александров—А. Н. Колмогоров—М. А. Лаврентев (szerk.): Математика, её содержание, методы и значение. Moszkva 1956. 1. k. 12. o.) (Ez emlékezetünkbe idézi, hogy a dialektika a változást a kritika alkalmazása nélkül próbálja megmagyarázni: az igazságok „folytonosan fejlődnek", de mindig „teljesen vitathatatlanok".)

nyításelemzés szigorúsága között tettünk. 1800 táján a bizonyítás szigorúságát (a kristálytiszta gondolatkísérletet vagy konstrukciót) szembeállították a zavaros érveléssel és az induktív általánosítással. Ez volt az, amit Euler a „*rigida demonstratio*" alatt értett, és Kant felfogása a csalhatatlan matematikáról szintén erre a koncepcióra épült [lásd egy matematikai bizonyítás paradigmatikus esetét a *A tiszta ész kritikája* (Bp. 1913.) 228. oldalán]. Sőt, úgy vélték, hogy az ember azt bizonyítja, aminek a bizonyítását elhatározza. Senkinek sem jutott eszébe, hogy a gondolatkísérlet szóbeli megfogalmazása igazi nehézségeket rejt magában. Az arisztotelészi formális logika és a matematika két teljesen különálló tudomány volt, és a matematikusok az előbbit végképp fölöslegesnek tartották. A bizonyítás vagy a gondolatkísérlet teljesen meggyőző volt, mindenféle deduktív séma vagy „logikai" struktúra nélkül is.

A XIX. század elején zavart keltett az ellenpéldák áradata. Mivel a bizonyítások kristálytiszták voltak, a cáfolatoknak csodálatos csínyeknek kellett lenniük, amelyeket teljesen el kell különíteni a vitathatatlan bizonyításoktól. A *szigorúság forradalma,* amely Cauchy nevéhez fűződik, azon a heurisztikus újításon alapult, hogy a matematikusnak nem szabad megállnia a bizonyításnál: tovább kell lépnie, és fel kell ismernie, mit bizonyít azáltal, hogy felsorolja a kivételeket, vagy inkább azáltal, hogy megállapítja azt a biztos tartományt, amelyben a bizonyítás érvényes. *De sem Cauchy — sem Abel — nem látott semmiféle kapcsolatot a két probléma között. Sohasem jutott eszükbe, hogy ha felfedeznek egy kivételt, még egyszer meg kellene vizsgálniuk a bizonyítást.* (Mások a torzszülöttek kizárását, a torzszülöttek kiigazítását alkalmazták, esetleg éppen csak „elnézve" ezeket, de mindannyian egyetértettek abban, hogy a bizonyítás tabu, és nincs semmi tennivalójuk a „kivételekkel".)

A matematika és a logika XIX. századi egyesülésének két fő forrása volt: a nem euklideszi geometria és *a szigorúság Weierstrass-féle forradalma.* Ezek hozták létre a bizonyítás (a gondolatkísérlet) és a cáfolatok integrációját, és kezdték kifejleszteni a *bizonyításelemzést*, fokozatosan deduktív sémákat vezettek be a bizonyításba (a gondolatkísérletbe). Amit mi a „bizonyítás és cáfolatok módszerének" neveztünk, az az ő heurisztikus újításuk volt: *ez egyesítette először a logikát és a matematikát.* A Weierstrass-féle szigorúság diadalmaskodott reakciós torzszülött-kizáró és lemma-rejtegető ellenfelei fölött, akik olyan jelszavakat használtak, mint a „szigorúság unalma", „mesterkéltség vagy szépség" stb. A *bizonyításelemzés szigorúsága fölébe* *kerekedett a bizonyítás szigorúságának*, de a legtöbb matematikus csak addig viselte el az előbbi pedantériáját, amíg tökéletes bizonyosságot ígért nekik.

Cantor halmazelmélete – ennek egyik terméke még további „szigorú" tételek váratlan cáfolata volt – a Weierstrass-féle régi gárda sok tagját olyan dogmatikussá változtatta, aki mindig kész volt szembeszállni az „anarchistákkal". Az anarchizmus elleni harc címén kizárták az új torzszülötteket, vagy olyan „rejtett lemmákra" utaltak tételeikben, amelyek a „szigorúság végső szavát" képviselték. Eközben a régi típusú „reakciósokat" hasonló bűneik miatt továbbra is üldözték.

Aztán néhány matematikus rájött arra, hogy a bizonyítások és cáfolatok módszerében a bizonyításelemzés szigorúságára irányuló törekvés rossz végtelent eredményez. „Intuicionista" ellenforradalom kezdődött: elítélték a *bizonyításelemzés* zavaró nyelvi-logikai pedantériáját, és a *bizonyításokra* új szélsőséges szigorúsági követelményeket találtak ki; ismét különvált a matematika és a logika.

A logikusok megpróbálták megmenteni a házasságot, és megrekedtek a paradoxonoknál. A hilberti szigorúság a matematikát a *bizonyításelemzések* pókhálójává változtatta. Ugyanakkor azt állította, hogy intucionista metaelméletének kristálytiszta, következetes bizonyításaival megállítja a bizonyításelemzések végtelen visszatérését. Az „alapréteg", a kritizálhatatlan megszokottság tartománya a metamatematika gondolatkísérletei felé tolódott el. (Vö.: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. Id. kiad. 179–184. o.)

A bizonyításelemzés „a szigorúság minden egyes forradalmával" mélyebben hatolt be a bizonyításokba, végül egészen „az ismerős háttérismeretek" *alaprétegéig* (vö.: 75. o. 2. lj), ahol már a kristálytiszta intuíció és a bizonyítás szigorúsága volt a legfőbb úr, a kritika pedig tilos volt. Vagyis *a szigorúság különböző szintjei csak abban különböznek, hogy hol húzzák meg a határvonalat a bizonyításelemzés szigorúsága és a bizonyítás szigorúsága között*, azaz *hol kell abbahagyni a kritikát és elkezdeni az igazolást*. „A bizonyosságot sohasem érjük el", „alapokat" sohasem találunk – de az „ész csele" a *szigorúságban* jelentkező minden gyarapodást a matematika *tartalmának* gyarapodásává változtat. Ez azonban már meghaladja mostani vizsgálódásaink kereteit.*

* *A szerkesztők megjegyzése:* Ez a történeti megjegyzés — úgy hisszük — kissé túlságosan lebecsüli a matematikai „szigorúság" híveinek eredményeit. A ma-

6. Visszatérés a bizonyítás helyi, de nem globális ellenpéldákkal való kritikájára. A tartalom problémája

a) A tartalom növelése mélyebb bizonyításokkal

ÓMEGA: Nekem tetszik a bizonyítás és cáfolatok Lambda-féle módszere, és osztozom vele abban a hitben, hogy valahogy végül szigorú bizonyításelemzéshez, s ennélfogva egy biztosan igaz tételhez jutunk

tematikai „szigorúságra" irányuló törekvésnek — ez végül is kiderült — két, egymástól független célja volt, s közülük csak az egyik érhető el. E két cél: egyrészt, szigorúan helyes érvek vagy bizonyítások (amelyekben az igazság hibátlanul átkerül a premisszákból a következményekbe), másrészt, szigorúan igaz axiómák vagy végső alapelvek (amelyek azt a célt szolgálják, hogy az igazságot sajátos módon befecskendezzék a rendszerbe, s így az igazság szigorú bizonyításokon *keresztül* kerülne át a matematika egészébe). Az első cél elérhetőnek bizonyult (bizonyos feltevéseket természetesen adottnak véve), míg a második nem.
Frege és Russell olyan rendszereket alkotott, amelyekre a matematika (nem hibátlanul) lefordítható (lásd 177–178. o.). Ezekben a rendszerekben véges számú, előre meghatározott bizonyítási szabály van. Igazolható az is (itt lépnek be az előbb jelzett feltevések), hogy bármely olyan állítás, amely ezeknek a szabályoknak a segítségével bizonyítható, a rendszer axiómáinak érvényes következménye (azaz, ha ezek az axiómák igazak, akkor a bizonyított állítás *szükségképpen* igaz). Ezekben a rendszerekben nincsenek feltétlenül „rések" a bizonyításokban, és véges számú lépéssel ellenőrizhető, hogy egy állítássorozat bizonyítás-e vagy nem. (Ha ebben az ellenőrzési folyamatban az derül ki, hogy a formulák sorozata nem bizonyítás a vizsgált rendszerben, ez természetesen még nem jelenti azt, hogy a rendszeren belül nincs az utolsó formulának jó bizonyítása. Vagyis a bizonyítás ellenőrzésében érvényesül egy olyan aszimmetria, amely a verifikációnak kedvez a cáfolattal szemben.) Ezek a bizonyítások semmilyen szigorú felfogás alapján sem hibásak. (Igaz, lehetséges, hogy mindazok, akik egy ilyen bizonyítást valaha is ellenőriztek, valami érthetetlen hibát követtek el, de ez a kétely nem komoly. Az az informális (meta)tétel, hogy az ilyen érvényes bizonyítások továbbítják az igazságot, hamis is lehet, de nincs komoly okunk rá, hogy ezt higgyük). Az ilyen rendszerek *axiómái* azonban nem triviális értelemben hibásak. Az a próbálkozás, amely „magától értetődő" [„*self-evident*"], „logikai" igazságokból akarta levezetni az egész matematikát, mint közismert, kudarcot vallott.

majd el. De ha így is van, éppen ez a módszer szül egy újabb problémát: *a bizonyításelemzés a bizonyosság növelésével csökkenti a tartalmat.* A bizonyításelemzés minden egyes új lemmája, minden egyes ennek megfelelő új feltétel a tételben szűkíti a tétel érvényességi tartományát. Az egyre növekvő szigorúság egyre kevesebb poliéderre alkalmazható. Vajon a lemma-beépítés nem ismétli-e meg azt a hibát, amelyet Béta követett el a biztonsági játékban? Talán mi is „túl radikálisan vonultunk vissza, sok Euler-féle poliédert is kizárván a falak közül?"[1] Mindkét esetben előfordulhat, hogy a fürdővízzel együtt a gyereket is kiöntjük. *Szükségünk volna valami ellensúlyra a szigorúság tartalmat szűkítő kényszerével szemben.*

Tettünk már néhány lépést ebben az irányban. Hadd emlékeztessek két esetre, és vizsgáljuk meg ezeket újra!

Az egyik az volt, amikor először akadtunk helyi, de nem globális ellenpéldákra.[2] Gamma megcáfolta első bizonyításelemzésünk harmadik lemmáját („amikor a háromszögre osztott síkhálóból háromszögeket távolítunk el, csak két lehetőségünk van: vagy egy élt, vagy két élt és egy csúcsot távolítunk el"). A háló közepéből úgy távolított el egy háromszöget, hogy egyetlen élt és csúcsot sem vett el vele.

Ekkor két lehetőségünk volt.[3] Az első: a hamis lemmát beépítjük a tételbe. A bizonyosság szempontjából ez teljesen megfelelő eljárás lett volna, de olyan drasztikusan szűkítette volna a tétel érvényességének körét, hogy csak tetraéderre lehetett volna alkalmazni. Az ellenpéldákkal együtt — egy kivételével — valamennyi példát elvetettük volna.

Ezért fogadtuk el az alternatív megoldást: a tétel érvényességi körének a lemmák beépítésével történő *szűkítése* helyett *bővítettük* ezt a tartományt, mégpedig úgy, hogy a megcáfolt lemmát egy meg nem cáfolt lemmával helyettesítettük. A tételalkotásnak ez a hatékony módja azonban hamar feledésbe merült, és Lambda sem vesződött

1 L.: 52. o.

2 Az első eset tárgyalása a 27—30. oldalon található.

3 Úgy látszik, Ómega nem vesz figyelembe egy harmadik lehetőséget: Gamma teljes joggal állíthatná, hogy mivel a helyi, de nem globális ellenpéldák nem szegik meg a hamisság visszaemelése elvét, nincs szükség semmiféle lépésre.

azzal, hogy heurisztikus szabályként megfogalmazza. Pedig szükség van erre:

4. szabály: Ha van egy helyi, de nem globális ellenpéldád, kiséreld meg a bizonyításelemzést úgy helyesbíteni, hogy a megcáfolt lemmát helyettesíted egy meg nem cáfolt lemmával.

Az első típushoz tartozó (helyi, de nem globális) ellenpéldák lehetőséget adnak tételünk tartalmának növelésére, amely egyébként állandóan *csökken* a harmadik típushoz tartozó (globális, de nem helyi) ellenpéldák hatására.

GAMMA: A *4. szabály* ismét leleplezi Alfa imént elvetett „tökéletes bizonyításelemző intuíciójának" gyengeségét.[1] Alfa felsorolta volna a gyanús lemmákat, azon nyomban beépítette volna őket, és — nem törődve az ellenpéldákkal — csaknem üres tételeket alkotott volna.

TANÁR: Hadd halljuk, Ómega, az ígért második példát!

ÓMEGA: Béta bizonyításelemzésében a második lemma így hangzott: „minden lap háromszög alakú".[2] Ez sok helyi, de nem globális ellenpéldával cáfolható, például a kockával vagy a dodekaéderrel. Ezért ön, tanár úr, egy olyan lemmával helyettesítette, amelyet ezek az ellenpéldák nem cáfolnak (*„minden lap két részre oszlik, ha egy átlóval szétvágjuk"*). De ahelyett, hogy segítségül hívta volna a *4. szabályt*, szemrehányást tett Bétának a „gondatlan bizonyításelemzésért". Bizonyára ön is elismeri, hogy a *4. szabály* jobb tanács, mint az, hogy „légy gondosabb".

BÉTA: Igazad van, Gamma, és egyben „a kivétel-kizárók legjobbjainak módszerét"[3] is jobban megértetted velem. Ők egy óvatos, „biztonságos" bizonyításelemzésből indulnak ki, majd a *4. szabály* módszeres alkalmazásával fokozatosan, minden hamisítás nélkül építik fel a tételt. Végül is alkati kérdés, hogy az ember hamis túlzások vagy igaz eufemizmusok sorozata révén jut el az igazsághoz.

1 Vö.: 77. o.

2 A második eset tárgyalása a 61—62, oldalon található.

3 L.: 63—65. o.

Ómega: Ez igaz lehet. De a *4. szabály* kétféleképpen értelmezhető. Mindeddig csak az első, gyengébb értelmezést vettük figyelembe: „*könnyű* finomítani és helyesbíteni a bizonyítást úgy, hogy a hamis lemmát egy *némileg módosított* lemmával cseréljük fel, amelyet majd az ellenpélda sem cáfol meg";[1] csupán a bizonyítás kicsit „gondosabb" vizsgálatára és egy „jelentéktelen módosításra" van szükség.[2] Ebben az értelmezésben a *4. szabály* csak helyi barkácsolás *az eredeti bizonyítás keretein belül.*

Én a másik — radikális — értelmezéssel értek egyet: a lemmát — vagy esetleg valamennyi lemmát — nem úgy próbáljuk kicserélni, hogy az adott bizonyításból a tartalom utolsó cseppjét is kifacsarjuk, hanem lehetőleg egy egészen más, átfogóbb, *mélyebb* bizonyítás kigondolásával.

Tanár: Például?

Ómega: Egyszer egy barátommal beszélgettem a Descartes—Euler-sejtésről, aki azonnal a következő bizonyítással próbálkozott: képzeljük a poliédert belül üresnek, valamilyen kemény anyagból, mondjuk kartonból készült felülettel. Belső felületére pontosan rá kell festeni az éleket. A belső rész legyen jól megvilágítva, s az egyik lapot tekintsük egy közönséges fényképezőgép lencséjének, mégpedig azt a lapot, amelyen át az összes élt és csúcsot szemléltető kép készíthető.

Szigma *(félre)*: Fényképezőgép egy matematikai bizonyításban?

Ómega: Így egy síkbeli háló képét kapjuk, ez ugyanúgy kezelhető, mint a tanár úr bizonyításában alkalmazott hálórács. Az ott használt módszerrel be tudom bizonyítani, hogy ha a lapok *egyszeresen összefüggők*, akkor $c-é+l=1$, s a fényképen nem látható lencse-lapot még hozzávéve megkapom az Euler-formulát. A fő lemma itt az, hogy a poliédernek van egy olyan lapja, amely — átalakítva egy fényképezőgép lencséjévé — úgy fényképezi le a poliéder belsejét, hogy valamennyi él és csúcs rákerül a képre. Most a következő rövidítést vezetem be: ahelyett, hogy „egy poliéder, amelynek legalább egy olyan lapja van,

1 L.: 28. o.
2 L.: 29. o.

amelyen át az *egész* belső rész lefényképezhető", azt mondom, „egy kvázikonvex poliéder".

Béta: A tételed tehát így hangzik: Minden olyan kvázikonvex poliéder, amelynek lapjai egyszeresen összefüggők, Euler-féle.

Ómega: A rövidség kedvéért és e rendkívüli bizonyítás kitalálója iránti tiszteletből inkább így mondanám: „*Minden Gergonne-féle poliéder Euler-féle*".[1]

Gamma: De van sok egyszerű poliéder, amelyik — bár teljesen Euler-féle — olyan csúnyán horpadt, hogy egyetlen lapján át sem lehet a belső részét lefényképezni. Gergonne bizonyítása nem mélyebb Cauchyénál, ellenkezőleg, Cauchy bizonyítása a mélyebb!

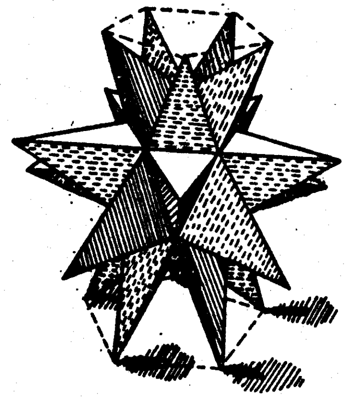
Ómega: Hát persze! Szerintem a tanár úr ismerte Gergonne bizonyítását, néhány helyi, de nem globális ellenpélda segítségével rájött, hogy nem kielégítő, és ezért az optikai — fényképészeti — lemmát a gyengébb topológiai — kinyújtást alkalmazó — lemmával helyettesítette. Így a *mélyebb*, Cauchy-féle bizonyításhoz nem „gondos bizonyításelemzést" követő csekély módosítással, hanem egy radikális, képzeletdús újítás segítségével jutott el.

1 Gergonne bizonyítása Lhuilier egyik idézett művében található. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 177—179. o.) Az eredeti elgondolásban természetesen nem szerepelhettek fényképészeti eszközök. Ez így hangzik: „Vegyünk egy olyan poliédert, amelynek egyik lapja átlátszó, és képzeljük el, hogy szemünkkel olyan szorosan megközelítjük ezt a lapot, hogy valamennyi többi lap belső felülete észlelhető legyen..." Gergonne szerényen megjegyzi, hogy Cauchy bizonyítása mélyebb, mivel „megvan az az értékes előnye, hogy egyáltalán nem feltételezi a konvexitást". (Az viszont nem jut eszébe Gergonne-nak, hogy megkérdezze, *mit* feltételez.) Később Jacob Steiner lényegében ugyanezt a bizonyítást fedezte fel újra. (*J. Steiner:* Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1826. 364—367. o.) Azután felhívták a figyelmét arra, hogy Gergonne-é az elsőbbség, mire elolvasta Lhuilier dolgozatát a kivételek felsorolásával együtt, de ez sem tartotta vissza attól, hogy bizonyítását a következő „tétellel" zárja: „*Minden poliéder Euler-féle.*" Steiner dolgozata tüzelte fel Hesselt — a németek Lhuilier-jét —, hogy megírja a maga tanulmányát. (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad.)

TANÁR: Elfogadom a példáját — csakhogy én nem ismertem Gergonne bizonyítását. Viszont ha maga ismerte, miért nem beszélt róla?
ÓMEGA: Azért, mert azonnal megcáfoltam nem Gergonne-féle poliéderekkel, amelyek viszont Euler-félék.
GAMMA: Mint az imént említettem, én is találtam ilyen poliédereket. De ok ez arra, hogy végképp sutba dobjuk a bizonyítást?
ÓMEGA: Szerintem igen.
TANÁR: Hallott már Legendre bizonyításáról? Azt is sutba dobná?
ÓMEGA: Minden bizonnyal. Az még kevésbé kielégítő: tartalma még Gergonne bizonyításánál is szegényesebb. Legendre gondolatkísérlete centrális vetítéssel kezdődött: a poliédert leképezte egy a poliédert tartalmazó gömbre. A gömb sugarát 1-nek tekintette. A vetítés középpontját úgy választotta meg, hogy a gömbi sokszögek hálója egyszeresen, de csak egyszeresen, teljesen befedje a gömböt. Első lemmája tehát az volt, hogy létezik ilyen pont. Második lemmája az volt, hogy a gömb felületén kialakuló poliedrikus háló esetében $c-é+l=2$, ezt viszont sikerült lebontania a gömbi trigonometria triviálisan igaz lemmáira. Csakhogy kizárólag a konvex és néhány tisztességes „majdnem konvex" poliéder esetében létezik olyan pont, amelyből ez a centrális vetítés elvégezhető, ez az osztály pedig még a „kvázikonvex" poliéderek osztályánál is szűkebb. De a *„Minden Legendre-féle poliéder Euler-féle"* tétel[1] nemcsak *egészen* más, mint Cauchyé, hanem még rosszabb is. Ez a tétel „...sajnálatosan hiányos".[1] „... hiábavaló erőlködés, olyan feltételeket ír elő, amelyektől az Euler-tétel egyáltalán nem függ. Sutba kell dobni, és általánosabb elveket kell keresni."[2]
BÉTA: Igaza van Ómegának. „A konvexitás bizonyos mértékig véletlenszerű az euleri jelleg szempontjából. Egy konvex poliéder horpasztással vagy egy-két csúcs benyomásával nem konvex poliéderré alakítható, de a jellemző számadatai nem változnak. Az Euler által megállapított összefüggés valami sokkal alapvetőbb dologra vonatkozik, mint a konvexitás."[3] És erre sohasem fogtok rájönni „majdnem" és „kvázi" sallangjaitok segítségével.
ÓMEGA: Azt hittem, a tanár úr ezt érte tetten a Cauchy-féle bizonyítás topológiai elveiben, amelyben Legendre bizonyításának *valamennyi* lemmáját teljesen új lemmák helyettesítik. De azután rábukkantam egy olyan poliéderre, amely még ezt a mind ez ideig bizonyosan legmélyebb bizonyítást is megcáfolta.
TANÁR: Hadd halljuk, mi volt az!
ÓMEGA: Mindnyájan emlékeztek Gamma „tengerisünjére" (7. ábra). Ez persze nem volt Euler-féle. De az nem igaz, hogy egyetlen csillagpoliéder sem Euler-féle! Vegyük például a „nagy, csillag alakú dodekaédert" (15. ábra)! A „kis, csillag alakú dodekaéderhez" hasonlóan

1 *Legendre bizonyítása Éléments de géométrie* című idézett művében megtalálható, a bizonyításból származó tétel azonban nem, mivel a bizonyításelemzés és a tételátalakítás a XVIII. században gyakorlatilag ismeretlen volt. Legendre először is definiálja a poliédereket mint olyan testeket, amelyeknek a felülete sokszögekből áll (i. m. 161. o.). Ezt követően *általánosan* bizonyítja, hogy $c-é+l=2$ (uo. 228. o.). A 164. oldalon azonban van egy apróbetűs kivétel-kizáró jegyzet, amely szerint csakis *konvex* poliéderekkel foglalkozik. Legendre figyelmen kívül hagyta a majdnem konvex határeseteket. Poinsot volt az első, aki Legendre bizonyítását kommentálva észrevette, hogy az Euler-formula „nemcsak a közönséges konvex testekre érvényes — nevezetesen azokra a testekre, amelyek felületét egy egyenes legfeljebb két pontban metszi —, hanem beugró szögleteket tartalmazó poliéderekre is, feltéve, hogy a test belsejében található egy olyan gömb középpontjául szolgáló pont, amelyre a középpontból vezető vonalakkal úgy vetíthetők a poliéder lapjai, hogy a kivetített lapok nem fedik át egymást. Ez érvényes a beugró szögletekkel rendelkező poliéderek végtelen sokaságára. Tulajdonképpen Legendre bizonyítása minden változtatás nélkül alkalmazható valamennyi ilyen poliéderre." (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad. 46. o.)

1 Jonquières — ismét Poinsot egyik érvét (*L. Poinsot:* Note sur la théorie des polyèdres. Id. kiad.) kiollózva — továbblép: „Amikor Legendre-t és hasonló nagyságokat idéznek, csupán azt a széles körben elterjedt előítéletet táplálják, hogy az Euler-tétel érvényességi tartománya csak a konvex poliéderekből áll. Ez az előítélet még a legnagyobb elméket is foglyul ejtette." (*E. de Jonquières:* Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres. Id. kiad. 111. o.)
2 *L. Poinsot:* Note sur la théorie des polyèdres. Id. kiad. 70. o.
3 *D. M. Y. Sommerville:* An Introduction to the Geometry of *N* Dimensions. London 1958. 143—144. o.



15. ábra

ez is ötszögekből áll, csak más elrendezésben. 12 lapja, 30 éle és 20 csúcsa van, tehát $c-é+l=2$.[1]

TANÁR: A mi bizonyításunkat tehát elveti?

ÓMEGA: Igen. A kielégítő bizonyításnak a „nagy, csillag alakú dodekaéder" euleri jellegét is meg kell magyaráznia.

RHÓ: Miért nem törődsz bele, hogy „nagy, csillag alakú dodekaédered" háromszögekből áll? Nehézségeid képzeletbeliek.

DELTA: Ezzel egyetértek, csakhogy más okból képzeletbeliek. Mostanában megkedveltem a csillagpoliédereket: egyszerűen elragadók. De attól tartok, lényegesen különböznek a közönséges poliéderektől, s ezért valószínűleg el sem képzelhető olyan bizonyítás, amely egyetlen ötlettel magyarázná például a kocka *és* a „nagy, csillag alakú dodekaéder" euleri jellegét.

ÓMEGA: Miért nem? Nincs fantáziád. Állítottad volna Gergonne bizonyítása után és Cauchy bizonyítása előtt, hogy a konkáv és a konvex poliéderek lényegesen különbözők, s ezért valószínűleg el sem

1 A „nagy, csillag alakú dodekaédert" már Kepler megkonstruálta (*J. Kepler:* Harmonices Mundi. Id. kiad. 53. o.), majd tőle függetlenül Poinsot ismét ráakadt (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad.), s ő vizsgálta meg először, hogy Euler-féle poliéder-e. A 15. ábrát Kepler könyvéből másoltuk.

képzelhető olyan bizonyítás, amely egyetlen ötlettel magyarázná a konkáv és a konvex poliéderek euleri jellegét? Hadd idézzek Galilei *Dialógusai*ból:

„SAGREDO: Amint látod tehát, minden bolygó és hold — nevezzük mindet »bolygónak« — elliptikus pályán mozog.

SALVIATI: Attól tartok, vannak parabolikus pályán mozgó bolygók is. Nézd ezt a követ! Elhajítom: egy parabola mentén mozog.

SIMPLICIO: De ez a kő nem bolygó! Ez két teljesen eltérő jelenség!

SALVIATI: Dehogynem bolygó, csak kevésbé hatalmas kéz hajította el, mint amelyik a Holdat pályájára bocsátotta.

SIMPLICIO: Badarság! Hogy merészelsz egy kalap alá venni égi és földi jelenségeket? Az egyiknek semmi köze a másikhoz! Természetesen mindkét jelenség megmagyarázható bizonyításokkal, de biztos vagyok benne, hogy a két magyarázat teljes egészében különböző lesz! Nem tudok elképzelni olyan bizonyítást, amely egyetlen ötlettel magyarázná egy égi bolygó és egy földi lövedék pályáját!

SALVIATI: Te nem tudod elképzelni, de én meg tudom konstruálni..."

TANÁR: A bolygóktól és lövedékektől eltekintve, sikerült-e olyan bizonyítást találnia, Ómega, amely mind a közönséges Euler-féle poliédereket, mind az Euler-féle csillagpoliédereket magában foglalja?

ÓMEGA: Még nem. De sikerülni fog.[1]

LAMBDA: Mondjuk, sikerül. Mi bajod Cauchy bizonyításával? Magyarázd meg, miért veted el egyik bizonyítást a másik után!

b) Törekvés végleges bizonyításokra és ezeknek megfelelő elégséges és szükséges feltételekre

ÓMEGA: Te azért bíráltad a bizonyításelemzéseket, mert a *harmadik* típushoz tartozó ellenpéldák[2] lehetetlenné tették *a hamisság visszaemelését*. Én most azért bírálom őket, mert a *második* típushoz tartozó

1 Vö.: 102. o. 1. lj.
2 Globális, de nem helyi ellenpéldák.

7*

ellenpéldák[1] lehetetlenné teszik a hamisság *átemelését* (vagy ami ugyanaz, *az igazság visszaemelését*). Egy bizonyításnak az euleri jelleg egész tartományára kell magyarázatot adnia.

Én nemcsak *bizonyosságot*, hanem *véglegességet* is keresek. A tételnek *bizonyosnak* kell lennie — tartományán *belül* nem lehetnek ellenpéldák —, de egyben *véglegesnek* is: tartományán *kívül* sem lehetnek ellenpéldák. A példák és ellenpéldák között akarom meghúzni a választóvonalat, s nem csupán néhány példa biztos tartományát teszem az egyik oldalra, a másikra meg a példák és ellenpéldák vegyes zsákját.

LAMBDA: Vagyis azt akarod, hogy a tétel feltételei ne csak elégségesek, hanem szükségesek is legyenek!

KAPPA: A vita kedvéért akkor képzeljük el, hogy sikerült egy ilyen tökéletes tételt találnod: „*Minden tökéletes poliéder Euler-féle.*" Tisztában vagy azzal, hogy ez a tétel csak akkor lesz „végleges", ha a fordítottja — „*Minden Euler-féle poliéder tökéletes*" — bizonyos?

ÓMEGA: Természetesen.

KAPPA: Azaz, ha a bizonyosság elvész a rossz végtelenben, elvész a véglegesség is? Egyre mélyebb bizonyításaid mindegyikének érvényességi körén kívül találsz legalább egy Euler-féle poliédert.

ÓMEGA: Természetesen tudom, hogy nem vagyok képes a véglegesség problémájának megoldására a bizonyosság problémájának megoldása nélkül. Biztos vagyok benne, hogy mindkettőt meg fogjuk oldani. Mind az első, mind a harmadik típushoz tartozó ellenpéldák végtelen áradatát megállítjuk.

TANÁR: Nagyon fontos a tartalom növelésének lehetőségeire irányuló kutatása. De az elégségességre vonatkozó második kritériumát — a véglegességet — miért ne tekintsük egyszerűen kellemes, de nem kötelező jutalomnak? Miért vessünk el érdekes bizonyításokat azért, mert nem tartalmazzák az elégséges és szükséges feltételeket egyaránt? Miért tekintsük ezeket megcáfoltaknak?

1 Globális és egyben helyi ellenpéldák.

ÓMEGA: Nos ...[1]

LAMBDA: Bárhogy is van, arról mindenesetre meggyőzött Ómega, hogy egyetlen bizonyítás valószínűleg nem elég egy naiv sejtés kritikus helyesbítéséhez. Módszerünkbe be kellene vennünk Ómega *4. szabály*ának radikális változatát, és ezután a „*bizonyítások és cáfolatok*" módszerének kellene neveznünk a „*bizonyítás és cáfolatok*" elnevezés helyett.

MÜ: Bocsánat, hogy közbevágok, de épp most fordítottam le vitátok eredményét kvázitopológiai kifejezésekre: A lemma-beépítés módszere a *folytonosan helyesbített tételek egymásba illeszkedő tartományainak* szűkülő sorozatát eredményezte; ezek a tartományok — a globális ellenpéldák ismétlődő támadásaitól a rejtett lemmák felbukkanása során — egyre kisebbre zsugorodtak, és egy *határértékhez* konvergáltak: nevezzük ezt a határértéket „*a bizonyításelemzés tartományának*". Ha a *4. szabály* gyengébbik változatát alkalmazzuk, akkor ez a tartomány bővíthető a helyi ellenpéldák állandó kényszerítő hatására. Ennek a bővülő sorozatnak szintén lesz egy határértéke; ezt „*a bizonyítás tartományának*" nevezem. A vita azután bebizonyította, hogy még ez a határtartomány is lehet túlságosan szűk (még üres is). Talán *mélyebb* bizonyításokat kell konstruálnunk, amelyeknek a tartományai *bővülő* sorozatot képeznek majd. E sorozatok egyre több olyan rebellis Euler-féle poliédert tartalmaznak, amelyek a korábbi bizonyítá-

1 A választ az ókor híres pappuszi heurisztikájában találjuk meg, amely csak a „végleges", „utolsó" igazságok felfedezésére, azaz a szükséges és elégséges feltételeket egyaránt tartalmazó tételekre vonatkozott. A „bizonyítás problémájával" kapcsolatban a következő volt ennek a heurisztikának a fő szabálya: „Ha van egy sejtésed, vonj le belőle következtetéseket! Ha olyan következtetésre jutsz, amiről tudod, hogy hamis, akkor hamis volt a sejtés is. Ha olyan következtetésre jutsz, amiről tudod, hogy igaz, akkor fordítsd meg a sorrendet, és ha a sejtés levezethető ebből az igaz következményből, akkor a sejtés igaz volt." (Vö.: *T. L. Heath:* The Thirteen Books of Euclid's Elements. I. k. Id. kiad. 138—139. o.) Ezt a hagyományt követte mind a „*causa aequat effectu*" elve, mind a szükséges és elégséges feltételeket tartalmazó tételek keresése. Csak a XVII. században vált uralkodóvá az a nézet, hogy a bizonyosság kutatása megelőzi a véglegesség kutatását. Ekkorra már kudarcot vallott minden olyan törekvés, amely a pappuszi heurisztikát akarta alkalmazni a modern tudományban.

sokra helyi ellenpéldát jelentettek. Ezek a tartományok, amelyek maguk is határátmenettel keletkeznek, a vizsgálat tulajdonképpeni célját alkotó tartományhoz, a „naiv sejtés tartományához" kettős határátmenettel konvergálnak.

Ennek a heurisztikai térnek a topológiája matematikai filozófiai probléma: végtelenek lesznek-e a sorozatok, konvergálnak-e egyáltalán, azaz van-e határértékük, lehet-e, hogy ez a határérték üres halmaz?

EPSZILON: Találtam egy olyan bizonyítást, amely mélyebb, mint Cauchyé, és Ómega „nagy, csillag alakú dodekaéderének" euleri jellegét is megmagyarázza! *(Egy cédulát csúsztat a tanár kezébe.)*

ÓMEGA: A végső bizonyítás! Feltárul az Euler-szerűség igazi lényege!

TANÁR: Sajnálom, de kifutunk az időből. Epszilon igen ravasz bizonyítására majd egy másik alkalommal kerítünk sort.* Mindössze annyit látok most, hogy Ómega értelmezése szerint ez a bizonyítás sem lesz végleges. Tessék, Béta!

c) Különböző bizonyítások különböző tételeket eredményeznek

BÉTA: A legérdekesebb, amit ebből a vitából tanultam, az, hogy ugyanannak a naiv sejtésnek a különböző bizonyításai egészen különböző tételekre vezetnek. *Az egyetlen Descartes—Euler-sejtést minden egyes bizonyítás más tétellé helyesbíti.* Eredeti bizonyításunk terméke: „*Minden Cauchy-féle poliéder Euler-féle*". Mostanra már két egészen más tételt is megismertünk: „*Minden Gergonne-féle poliéder Euler-féle*", valamint: „*Minden Legendre-féle poliéder Euler-féle*". Egy közös őstől származó három bizonyítás, három tétel.[1] Megtévesztő tehát az a szokásos kifejezés, hogy „*az Euler-tétel különböző bizonyításai*", mivel elfedi a bizonyításoknak a tételalkotásban játszott alapvető szerepét.[1]

* *A szerkesztők megjegyzése:* Epszilon cédulájának tartalma e könyv második fejezetében tárul fel.

1 Az Euler-sejtésnek sok más bizonyítása is van. Euler, Jordan és Poincaré bizonyításainak részletes heurisztikai elemzését lásd: *I. Lakatos:* Essays in the Logic of Mathematical Discovery. Kézirat (doktori disszertáció). Cambridge 1961.

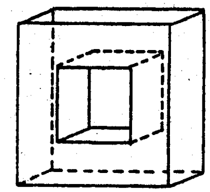
1 Poinsot, Lhuilier, Cauchy, Steiner és Crelle egyaránt azt gondolták, hogy a különböző bizonyítások ugyanazt a tételt, az „*Euler-tételt*" bizonyítják. Egy általánosan használt kézikönyvből idézünk egy jellemző mondatot: „A tétel Eulertől, az első bizonyítás Legendre-től, a második Cauchytól származik." (*A. L. Crelle:* Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Id. kiad. 2. k. 671. o.)
Poinsot nagyon közel került ahhoz, hogy észrevegye a különbséget, amikor rájött, hogy Legendre bizonyítása nemcsak közönséges konvex poliéderekre vonatkozik. (L.: 96. o. 1. lj.) Amikor azután Legendre bizonyítását összehasonlította Euleréval (azzal, amely a poliéderek gúla alakú sarkainak levágásán alapul, és amely végül az Euler-karakterisztika megváltoztatása nélkül egy tetraéderhez jut el), Legendre bizonyítását részesítette előnyben „egyszerűsége" miatt. (*L. Poinsot:* Note sur la théorie des polyèdres. Id. kiad.) Az „egyszerűség" itt a szigorúság XVIII. századi fogalma helyett áll, a gondolatkísérlet világos kifejtését jelenti. Nem jutott eszébe, hogy a két bizonyítást a *tartalom* szempontjából hasonlítsa össze: úgy Euler bizonyítása bizonyult volna magasabb rendűnek. (Tulajdonképpen nincs semmi baj Euler bizonyításával. Legendre a szigorúság korabeli, szubjektív követelményét alkalmazta, és figyelmen kívül hagyta a tartalom objektív követelményét.)
Lhuilier — e részlet burkolt bírálatában (nem említi Poinsot-t) — rámutat, hogy Legendre egyszerűsége csak „látszólagos", mert komoly gömbháromszögtani ismereteket feltételez. (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 171. o.) De Lhuilier is azt hiszi, hogy Legendre „*ugyanazt a tételt bizonyította be*", mint Euler. (Uo. 170. o.)
Jacob Steiner egyetért Lhuilier-vel Legendre bizonyításának értékelésében és abban a feltevésben, hogy minden bizonyítás ugyanazt a tételt bizonyítja. (*J. Steiner:* Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler. Id. kiad.) Az az egyetlen különbség, hogy míg Steiner szerint valamennyi különböző bizonyítás azt bizonyítja, hogy „*minden poliéder Euler-féle*", Lhuilier szerint valamennyi különböző bizonyítás azt bizonyítja, hogy „*minden olyan poliéder, amelyben nincs alagút és üreg, s amelynek nincs gyűrű alakú lapja, Euler-féle*".
„Recherches sur les polyèdres" című munkáját húszas éveinek elején írta *Cauchy*, évekkel a szigorúság általa elindított forradalma előtt. Ezért nem vehető rossz néven, hogy értekezése második részének bevezetésében megismétli Euler és Legendre bizonyításának Poinsot-féle összevetését. Kortársai többségéhez hasonlóan ő sem ragadta meg a különböző bizonyítások mélyén rejlő különbséget, így bizonyítása valódi súlyát sem tudta felmérni. Azt hitte, csupán *újabb bizonyítását adta ugyanannak a tételnek*, de sietett hangsúlyozni, hogy az Euler-formulának bizonyos poliéderhalmazokra vonatkozó, meglehetősen triviális általánosításához jutott el.
Gergonne volt az első, aki felismerte Cauchy bizonyításának páratlan mélységét. (*In: S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 179. o.)

Pi: A különböző bizonyítások között sokkal mélyebb a különbség. Csak a naiv sejtés szól a poliéderekről. A tételek a Cauchy-féle, Gergonne-féle, Legendre-féle testekről szólnak, de már nem poliéderekről.
Béta: Szellemeskedsz?
Pi: Egyáltalán nem, mindjárt megmagyarázom, mire gondolok. De szeretném szélesebb kontextusba helyezni a kérdést: általában a *fogalomalkotásról* akarok beszélni.
Dzéta: Először inkább a *tartalom* problémáját kellene megvitatnunk. Ómega *4. szabályát* — még radikális értelmezésében is — nagyon gyengének találtam.[1]
Tanár: Jól van. Akkor először hallgassuk meg Dzéta felfogását a tartalom problémájáról, majd a fogalomalkotás tárgyalásával fejezzük be a vitát!

7. Visszatérés a tartalom problémájára

a) A naiv sejtés naivitása

Dzéta: Ómegához hasonlóan én sem helyeslem a torzszülött-kizárók, a kivétel-kizárók és a lemma-beépítők módszerét, akik mindnyájan a tartalom rovására iparkodtak eljutni valamilyen igazsághoz. De Ómega *4. szabálya*[2], amely ugyanannak a naiv sejtésnek mélyebb bizonyítását követeli meg, nem elég. Miért engedjük, hogy az első felötlő naiv sejtés korlátozza a tartalomra irányuló kutatásainkat? Miért legyen vizsgálódásunk célja „a naiv sejtés tartománya"?
Ómega: Nem tudlak követni. Ugye, az volt a feladatunk, hogy feltárjuk $c-\acute{e}+l=2$ igazságának tartományát?
Dzéta: Nem az volt! A probléma az volt, hogy bármely létező poliéderre érvényesen megtaláljuk *c*, *é* és *l* összefüggését. Merő véletlen, hogy először olyan poliéderekkel ismerkedtünk meg, amelyek esetében $c-\acute{e}+l=2$. De ezeknek az „Euler-féle" poliédereknek a kritikus vizsgálata azt mutatta, hogy sokkal több nem Euler-féle poliéder van, mint Euler-féle. Miért nem keressük $c-\acute{e}+l=-6$, $c-\acute{e}+l=28$ vagy $c-\acute{e}+l=0$ tartományát? Ezek nem ugyanolyan érdekesek?
Szigma: Igazad van. Csak azért fordítottunk olyan sok figyelmet a $c-\acute{e}+l=2$ összefüggésre, mert eredetileg azt hittük, igaz. Most már tudjuk, hogy nem, s *egy új, mélyebb naiv sejtést kell találnunk*...
Dzéta: ... ami kevésbé naiv lesz...
Szigma: ... ami megadja a *bármely* poliéder csúcsai, élei és lapjai között érvényes összefüggést.
Ómega: Mire való ez a sietség? Oldjuk meg először azt a szerényebb feladatot, amelyhez hozzáfogtunk: magyarázzuk meg, miért Euler-féle néhány poliéder! Mostanáig csak részleges magyarázatokra jutottunk. Egyik eddigi bizonyítás sem magyarázza meg például azt, hogy miért Euler-féle az a képkeret, amelynek az első és a hátsó lapja is gyűrű alakú (16. ábra). 16 csúcsa, 24 éle és 10 lapja van...



16. ábra

Théta: Ez biztos nem Cauchy-féle poliéder: van benne alagút, vannak gyűrű alakú lapjai...
Béta: És mégis Euler-féle! Milyen ésszerűtlen! Egy poliéder egyetlen bűn miatt — alagút van benne, de nincs gyűrű alakú lapja (9. ábra) — kiűzetik a nyájból, míg egy másik, kétszeresen vétkes — lévén gyűrű alakú lapjai is (16. ábra) —, bebocsátást nyer?[1]

1 L.: 93. o.
2 L.: 93. o.

1 Ezt a problémát Lhuilier (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 189. o.), majd tőle függetlenül Hessel vette észre (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad.). Hessel dolgozatában a két képkeret ábrája egymás mellett szerepel. Vö.: 121. o. 1. lj.

ÓMEGA: Látod, Dzéta, elég bajunk van még az Euler-féle poliéderekkel is. Oldjuk meg ezeket, mielőtt áttérnénk egy általánosabb problémára!
DZÉTA: Nem, Ómega. „Gyakran megfigyelhetjük, hogy az új, igényesebb feladat könnyebben tárgyalható, mint az eredeti. Előfordul, hogy több kérdésre könnyebb válaszolni, mint egyre."[1] Sőt, be fogom bizonyítani, hogy a te szűk, esetleges problémádat csak a nagyobb, lényeges probléma megoldásával lehet megoldani.
ÓMEGA: De én az Euler-szerűség titkát akarom megtalálni!
DZÉTA: Megértem az ellenállásodat. Beleszerettél abba a feladatba, hogy megtaláld, hol húzta meg Isten az Euler-féle és nem Euler-féle poliédereket elválasztó határt. De nincs semmi okunk azt hinni, hogy Istennek a világegyetemre vonatkozó tervezetében előfordult az „Euler-féle" terminus. Mi van akkor, ha az Euler-szerűség csupán esetleges sajátossága egyes poliédereknek? Ebben az esetben érdektelen, sőt, lehetetlen megtalálni az Euler-féle és nem Euler-féle poliéderek közötti rendszertelen demarkációs vonal cikcakkjait. Ennek elismerése viszont makulátlanul hagyná a racionalizmust, mivel az Euler-szerűség nem tartozna a világegyetem racionális tervéhez. Felejtsük hát el! A kritikai racionalizmus egyik legfőbb jellemzője, hogy a megoldás során az ember mindig kész megválni az eredeti problémától és felcserélni azt egy másikkal.

b) Az indukció mint a bizonyítások és cáfolatok módszerének alapja

SZIGMA: Igaza van Dzétának. Micsoda katasztrófa!
DZÉTA: Katasztrófa?
SZIGMA: Igen. Most azt akarod, hogy a *c*, *é* és *l* közötti összefüggésre találjunk egy *bármely* poliéderre igaz új „naiv sejtést", ugye? Lehetetlen! Nézd az ellenpéldák hatalmas tömegét. Üreges poliéderek, poliéderek gyűrű alakú lapokkal, alagutakkal, az éleknél és csúcsoknál

1 Pólya ezt az „igényesség paradoxonának" nevezi. (*Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 70. o.)

illeszkedő poliéderek... $c-é+l$ bármilyen értéket felvehet! Aligha vagy képes felismerni valamilyen rendet ebben a káoszban! Elhagytuk az Euler-féle poliéderek szilárd talaját egy posványért! Visszavonhatatlanul elveszítettünk egy naiv sejtést, és reményünk sincs arra, hogy újat találjunk!
DZÉTA: De...
BÉTA: Miért ne? Emlékezz vissza, milyen reménytelennek tűnő káosz uralkodott még azon a táblázaton is, amelyen a legközönségesebb konvex poliéderek csúcsainak, éleinek és lapjainak számát tüntettük fel!* Olyan sokszor vallottunk kudarcot, amikor képletbe akartuk foglalni összefüggéseiket.[1] De azután hirtelen megvilágosodott előttünk a valódi szabályszerűség, a rendezőelv: $c-é+l=2$.

Poliéder	*l*	*c*	*é*
I. kocka	8	8	12
II. háromszög alapú hasáb	5	6	9
III. ötszög alapú hasáb	7	10	15
IV. négyzet alapú gúla	5	5	8
V. háromszög alapú gúla	4	4	6
VI. ötszög alapú gúla	6	6	10
VII. oktaéder	8	6	12
VIII. „bástya"	9	9	16
IX. „csonka kocka"	7	10	15

KAPPA: *(félre):* „Valódi szabályszerűség"? Furcsa kifejezés egy teljesen hamis állításra.
BÉTA: Mindössze annyit kell most tennünk, hogy táblázatunkat kiegészítjük a nem Euler-féle poliéderek adataival, és új formulát ke-

* *A szerkesztők megjegyzése:* A táblázatot még azelőtt vitatták meg, hogy beléptünk az osztályba.
1 L.: 113. o. 3. lj. A táblázatot Pólyától vettük át. (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 36. o.)

resünk. Türelmes, szorgalmas megfigyeléssel és némi szerencsével rá fogunk akadni a helyes formulára, amit azután — a bizonyítások és cáfolatok módszerét alkalmazva — ismét helyesbíthetünk!

DZÉTA: Türelmes, szorgalmas megfigyelés? Egyik képletet próbálgatjuk a másik után? Talán majd szerkesztesz egy találgatógépet, amely véletlenszerű formulákat termel, és összeveti őket a táblázattal? Így képzeled el a tudomány fejlődését?

BÉTA: Nem értem, miért vagy olyan gunyoros. Bizonyára te is egyetértesz azzal, hogy első ismereteink, naiv sejtéseink csak szorgalmas megfigyelésből és hirtelen felismerésből eredhetnek, még ha a „bizonyítások és cáfolatok" kritikai módszere rögtön fel is váltja ezt mihelyt *találunk* egy naiv sejtést? Minden deduktív módszernek induktív alapról kell kiindulnia!

SZIGMA: A te induktív módszered soha nem vezet eredményre. Csak azért akadtunk rá a $c-é+l=2$ összefüggésre, mert történetesen az eredeti táblázatban nem volt képkeret vagy tengerisün. Most, hogy ez a történelmi véletlen...

KAPPA *(félre)*: ... avagy Isten kegyes útmutatása...

SZIGMA: ... a múlté, sohasem leszel képes rendet „indukálni" a káoszból. Hosszas megfigyeléssel és szerencsés felismeréssel kezdtük — és kudarcot vallottunk. Most azt javasolod, hogy még hosszadalmasabb megfigyeléssel és még szerencsésebb felismeréssel kezdjük újra. Még ha el is jutnánk egy újabb naiv sejtéshez — amit kétlek —, ugyanilyen zűrzavarban végeznénk.

BÉTA: Talán végleg hagyjuk abba a kutatást? El *kell* kezdenünk ismét: először egy új naiv sejtéssel, majd újra eleget téve a „bizonyítások és cáfolatok" módszerének.

DZÉTA: Nem, Béta. Én Szigmával értek egyet, ezért nem új naiv sejtéssel kezdem újra.

BÉTA: Akkor mivel akarod kezdeni, ha nem egy naiv sejtésként megfogalmazott, induktív, alacsony szintű általánosítással? Vagy van más módszered a kezdethez?

c) Deduktív találgatás és naiv találgatás

DZÉTA: Kezdet? Miért kellene *elkezdenem?* Nem üres az agyam, amikor felfedezek (vagy kitalálok) egy problémát.

TANÁR: Ne kötekedjen Bétával! A probléma adott: *„Van-e olyan összefüggés a poliéderek csúcsainak (c), éleinek (é) és lapjainak (l) száma között, amely a sokszögek csúcsainak és éleinek száma közti triviális összefüggéssel, vagyis „c=é"-vel analóg?"*[1] *Maga* hogy látna hozzá?

DZÉTA: Először is, nem kapok állami támogatást a poliéderek kiterjedt kutatásához, nem rendelkezek kutatói segéderők tömegével a poliéderek csúcsainak, éleinek, lapjainak megszámlálásához és az adatok táblázatba foglalásához. De ha rendelkeznék is ezekkel az eszközökkel, nem lenne türelmem (vagy érdeklődésem) egyik képletet a másik után kipróbálni, hogy ellenőrizzem, megfelel-e.

BÉTA: Hát akkor mit csinálsz? Leheveredsz a nyoszolyádra, lehunyod a szemed, és elfelejted az adatokat?

DZÉTA: Pontosan. A kezdethez szükségem van egy *gondolatra*, de nincs szükségem semmiféle adatra.

BÉTA: És honnan meríted a gondolatot?

DZÉTA: Már a fejünkben van, amikor megfogalmazzuk a problémát, valójában éppen a probléma megfogalmazásában rejlik.

BÉTA: Miféle gondolat?

DZÉTA: Hogy sokszögnél $c=é$.

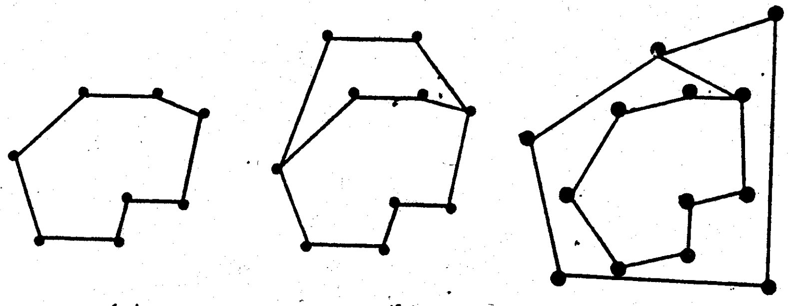
BÉTA: És akkor mi van?

DZÉTA: Egy probléma sohasem a semmiből keletkezik, mindig kapcsolódik korábbi ismereteinkhez. Tudjuk, hogy sokszögek esetében $c=é$. Mármost a sokszög egyetlen sokszögből álló sokszögrendszer. A poliéder egynél több sokszögből álló sokszögrendszer. De poliéderek esetében $c \neq é$. Az egy sokszögből álló rendszerekről a több sokszögből álló rendszerekre való átmenet mely pontján szakadt meg a $c=é$ összefüggés? Az adatgyűjtés helyett azt nyomozom, hogyan nőtt

1 L.: 21. o.

ki a probléma korábbi ismereteinkből, vagy melyik sejtés cáfolata szülte a problémát.

SZIGMA: Helyes. Fogadjuk el a javaslatodat! Bármely sokszög esetében $é-c=0$ (17(*a*) ábra). Mi történik, ha ehhez a sokszöghöz (nem szükségképpen ugyanabban a síkban) egy másik sokszöget illesztek? A hozzáadott sokszögnek n_1 éle (oldala) és n_1 csúcsa van. Ha ezt a sokszöget egy n_1' élből (oldalból) és $n_1'+1$ csúcsból álló lánc mentén hozzá-



(*a*) (*b*) (*c*)

17. ábra

illesztjük az eredeti sokszöghöz, az élek (oldalak) számát n_1-n_1'-gyel, a csúcsokét $n_1-(n_1'+1)$-gyel növeljük, azaz az új, két sokszögből álló rendszerben nagyobb lesz az élek (oldalak) száma a csúcsokénál: $é-c=1$ (17(*b*) ábra). Szokatlan, de teljesen szabályos illesztést mutat be a 17(*c*) ábra. Egy-egy új lap „hozzáillesztésével" az élek (oldalak) számának túlsúlya mindig 1-gyel nő a rendszerben, vagy másképp kifejezve: egy így alkotott l sokszögből álló rendszerben $é-c=l-1$.

DZÉTA: Vagy $c-é+l=1$.

LAMBDA: De ez a legtöbb poligonális rendszerre hamis. Vegyünk egy kockát...

SZIGMA: Viszont az én konstrukcióm csak „nyitott" poligonális rendszerekre vezethet; ezeket élekből (oldalakból) álló kerület határolja. Gondolatkísérletemet könnyen kiterjeszthetem „zárt" poligonális rendszerekre is, amelyeknek nem ilyen a határa. Az ilyen lezárás elvégezhető, ha egy nyitott urna alakú poligonális rendszert egy sokszögű „fedővel" fedünk le: egy ilyen fedő sokszög hozzáillesztése 1-gyel növeli l-et, mégpedig c vagy $é$ változása nélkül...

DZÉTA: Vagyis egy ily módon megkonstruált zárt poligonális rendszer — vagy zárt poliéder — esetében $c-é+l=2$. Most anélkül kaptuk ezt a sejtést, hogy akár egyetlen poliéder csúcsainak, éleinek és lapjainak a számát „megfigyeltük" volna!

LAMBDA: És most a bizonyítások és cáfolatok módszerét „induktív kiindulópont" nélkül alkalmazhatod.

DZÉTA: Azzal a különbséggel, hogy nem kell bizonyítást kigondolni, hiszen már megvan a bizonyítás! Közvetlenül a cáfolatokkal, a bizonyításelemzéssel, a tételalkotással lehet folytatni.

LAMBDA: Akkor a te módszeredben — megfigyelések helyett — bizonyítás előzi meg a naiv sejtést![1]

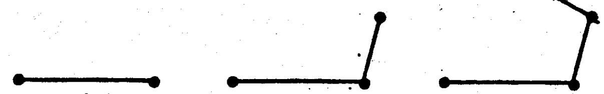
DZÉTA: Nem nevezném „naivnak" azt a sejtést, amely egy bizonyításból nő ki. Az én módszeremben nincs helye az induktív naivitásoknak.

BÉTA: Tiltakozom! Egyszerűen hátrább toltad a „naiv" induktív kiindulópontot: azzal kezded, hogy „sokszögek esetében $c=é$". Ezt nem megfigyelésekre alapozod?

DZÉTA: A legtöbb matematikushoz hasonlóan én sem tudok számolni. Megpróbáltam megszámolni egy hétszög oldalait és csúcsait: először 7 oldalt és 8 csúcsot, aztán meg 8 oldalt és 7 csúcsot találtam...

BÉTA: Félretéve a tréfát, *valójában* hogy kaptad meg $c=é$-t?

DZÉTA: Először mély megdöbbenéssel észleltem, hogy háromszög



(*a*) (*b*) (*c*)

18. ábra

19. ábra

esetében $c-é=0$. Természetesen nagyon jól tudtam, hogy egy élen $c-é=1$ (18(*a*) ábra). Azt is tudtam, hogy egy újabb él hozzáillesztésével mind az élek, mind a csúcsok száma 1-gyel nő (18(*b*) és 18(*c*) ábra).

1 Ez fontos módosítása a 25. oldal 2. lábjegyzetében foglaltaknak.

Akkor a poligonális élrendszerekben hogy lehet $c-é=0$? Aztán rájöttem, hogy ennek az oka egy nyitott élrendszerről (amelyet két csúcs határol) egy zárt élrendszerre (amelynek nincs ilyen határa) való átmenet: mert egy él hozzáillesztésével — új csúcs hozzáadása nélkül — „befedjük" a nyitott rendszert. Tehát bebizonyítottam — és nem megfigyeltem —, hogy sokszögek esetében $c-é=0$.

BÉTA: A találékonyság nem segít rajtad. Csak még hátrább toltad az induktív kiindulópontot: ezúttal arra az állításra, hogy bármely él (oldal) esetében $c-é=1$. Ezt bebizonyítottad vagy *megfigyelted?*

DZÉTA: Bebizonyítottam. Természetesen tudtam, hogy egyetlen csúcs esetében $c=1$ (19. ábra). Az volt a feladatom, hogy ehhez hasonló viszonyt konstruáljak...

BÉTA *(dühös)*: Azt nem *figyelted meg*, hogy egy pont esetében $c=1$?

DZÉTA: *Te* megfigyelted? *(Félre, Pinek):* Mondjam neki azt, hogy „induktív kiindulópontom" az üres tér volt? Hogy a *semmi* „megfigyeléséből" indultam ki?

LAMBDA: Mindenesetre két álláspont fogalmazódott meg. Először is, Szigma azt állította, hogy *csupán történelmi véletlenek következtében juthatunk naiv induktív sejtésekhez;* ha az ember a tények valóságos káoszával kerül szembe, aligha képes szép formulába illeszteni őket. Ezután Dzéta bebizonyította, hogy *a bizonyítások és cáfolatok logikájához egyáltalán nincs szükségünk sem naiv sejtésre, sem induktív kiindulópontra.*

BÉTA: Tiltakozom! Mi van azokkal a híres sejtésekkel, amelyeket *nem* előzött meg (vagy nem is követett) bizonyítás? Ilyen volt például a négyszínnyomás-sejtés, amely szerint négy szín elegendő bármely térkép színezéséhez, vagy a Goldbach-sejtés. Csak történelmi véletlenek idézhetik elő, hogy egyes bizonyítások megelőzhetik a tételeket, hogy Dzéta „deduktív találgatására" sor kerülhet; egyébként naiv induktív sejtések nyitják a sort.

TANÁR: Kétségtelenül meg kell ismernünk *mindkét* heurisztikus sémát. Legjobb a *deduktív találgatás*, de a *naiv találgatás* is jobb, mint egyáltalán nem találgatni. *A naiv találgatás* viszont *nem indukció: nincsenek induktív sejtések!*

BÉTA: De a naiv sejtésre *indukcióval* találtunk rá! „Azaz megfigyelés sugallta, partikuláris esetek jelezték... És a megvizsgált partikuláris esetek között két csoportot tudtunk megkülönböztetni: olyan eseteket, amelyek megelőzték a sejtés megfogalmazását, és olyanokat, amelyek utólag adódtak. Az előzők *sugallták* a sejtést, az utóbbiak *támasztották alá*. Mindkét típus teremt valamiféle kapcsolatot a sejtés és a »tények« között..."[1] Ez a kettős kapcsolat az indukció lényege: az elsőből fakad az *induktív heurisztika*, másodikból az induktív igazolás vagy *induktív logika.*

TANÁR: Nem! A tények nem sugallnak sejtéseket, és nem is támasztják alá őket!

BÉTA: Akkor nekem mi sugallta a $c-é+l=2$ formulát, ha nem a táblázatomban felsorolt tények?

TANÁR: Megmondom. Maga mondta, hogy sokszor kudarcot vallott, amikor formulába akarta illeszteni a tényeket.[2] Nos, a következő történt: három vagy négy sejtése volt, amelyeket egymás után gyorsan megcáfoltak. A maga táblázata ezeknek a sejtéseknek a kipróbálása és cáfolata során épült fel. Ezek a halott és most már feledésbe merült sejtések adták az ötletet a tényekhez, nem a tények a sejtésekhez. *A naiv sejtések nem induktív sejtések: próbálkozásokon, tévedéseken, sejtéseken és cáfolatokon át jutunk el hozzájuk.*[3] De ha maga — tévesen — azt hiszi, hogy induktív úton, a táblázataiból jutott el ezekhez a sejtésekhez, ha azt hiszi, hogy minél hosszabb a táblázat, annál több sejtést sugall, majd támaszt alá, akkor valószínűleg felesleges adatok halmozására fecsérli az idejét. Emellett, mivel magába nevelték, hogy a felfedezés útja a tényektől a sejtéshez, a sejtéstől pedig a bizonyítás-

1 *G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 5. és 7. o. (Kiemelés tőlem! — *L. I.*)

2 L.: 107. o.

3 Pólya szépen rekonstruálja ezeket a próbálkozásokat és tévedéseket. Az első sejtés az, hogy l együtt nő c-vel. Miután ezt megcáfolták, két további sejtés következik: $é$ együtt nő l-lel, és $é$ együtt nő c-vel. A negyedik találgatás a nyerő: $l+c$ együtt nő $é$-vel. (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 35—37. o.)

hoz vezet (ez az indukció mítosza), alighanem teljesen elfeledkezett a heurisztikus alternatíváról, a deduktív találgatásról.[1]

A matematikai heurisztika nagyon hasonlít a tudományos heurisztikára; nem azért mert mindkettő induktív, hanem mert mindkettőt sejtések, bizonyítások és cáfolatok jellemzik. A — fontos — különbség a megfelelő sejtések, bizonyítások (vagy tudományos magyarázatok) és ellenpéldák jellegében rejlik.[2]

BÉTA: Értem. Akkor a mi naiv sejtésünk korántsem a nem sejtésszerű kemény tények „sugallta" *első* sejtés volt, számos „prenaiv" sejtés és cáfolat előzte meg. A sejtések és cáfolatok logikájának nincs kiindulópontja, de a bizonyítások és cáfolatok módszerének van: a gondolatkísérlet után adódó első naiv sejtéssel kezdődik.

ALFA: Lehet. De akkor nem kellett volna „naivnak" neveznem![3]

KAPPA *(félre)*: Még a heurisztikában sincs tökéletes *naivitás!*

BÉTA: Az a legfontosabb, hogy a lehető leghamarabb túljussunk a próbálkozások és tévedések szakaszán, hogy azután gyorsan elkezdhessük a gondolatkísérleteket, a „tények" túlzott „induktív" tisztelete nélkül. Az ilyen tisztelet akadályozhatja a tudás növekedését. Képzeljétek el, hogy a fokozatos megközelítés módszerével eljuttok a $c-é+l=2$

1 Akik viszont a matematika szokásos deduktív leírása miatt azt hiszik, hogy a felfedezés útja az axiómáktól és/vagy a definícióktól vezet a bizonyításokhoz és tételekhez, alkalmasint teljesen elfeledkeznek a naiv találgatás lehetőségéről és fontosságáról. Tulajdonképpen a matematikai heurisztikában a deduktivizmus, a tudományos heurisztikában az induktivizmus jelenti a nagyobb veszélyt.

2 Pólyának köszönhető a matematikai heurisztika századunkban bekövetkezett újjászületése. Csodálatraméltó munkásságának egyik legfőbb jellegzetessége, hogy a tudományos és a matematikai heurisztika közti rokon vonásokra helyezi a hangsúlyt. Éppen ezzel az érdemmel kapcsolatos munkásságának talán egyetlen gyenge pontja: soha nem kérdőjelezte meg a tudományok induktív jellegét, s mivel — helyesen — mély hasonlóságot lát a tudományos és a matematikai heurisztika között, úgy gondolta, a matematika is induktív. Ugyanez történt korábban Poincaréval (l.: *H. Poincaré:* La science et l'hypothèse. Párizs 1902. Bevezetés) és Fréchet-vel [l.: *M. Fréchet:* L'analyse générale et la question des fondements. *In:* F. Gonseth (szerk.): Les entretiens de Zürich, sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques. Zürich 1941. 53—73. o.].

3 L.: 69. o.

sejtéshez, amit rögtön megcáfol az a felismerés, hogy a képkeret esetében $c-é+l=0$! Ha túlságosan tisztelitek a tényeket, akkor — különösen, ha a tények cáfolják a sejtést — prenaiv próbálkozásokkal és tévedésekkel lesztek kénytelenek továbblépni és új sejtést keresni. De ha jobb heurisztikát alkalmaztok, legalábbis *megpróbáljátok* figyelmen kívül hagyni a megfigyelés visszás eredményét, és egy *próbát olyan gondolatkísérlettel* elvégezni, mint például Cauchy bizonyítása.

SZIGMA: Micsoda zűrzavar! Miért nevezed Cauchy *bizonyítását próbának?*

BÉTA: Miért nevezem Cauchy *próbáját bizonyításnak?* Próba volt! Figyelj ide! Egy naiv sejtésből indultál ki: $c-é+l=2$ minden poliédernél. Ebből azután következtetéseket vontál le: „ha a naiv sejtés igaz, egy lap eltávolítása után a fennmaradó hálórácson $c-é+l=1$"; „ha ez a következtetés igaz, akkor $c-é+l=1$ a háromszögekre osztás után is"; „ha ez az utóbbi következtetés igaz, akkor $c-é+l=1$ mindaddig érvényes, amíg egyenként eltávolítjuk a háromszögeket"; „ha ez igaz, akkor egyetlen háromszög esetében is $c-é+l=1$"...

Nos, erről az utolsó következtetésről történetesen tudjuk, hogy igaz. De mi lett volna, ha arra a következtetésre jutunk, hogy egyetlen háromszög esetében $c-é+l=0$? Menten hamisnak nyilvánítottuk volna az eredeti sejtést, és elvetettük volna. Csak ellenőriztük sejtésünket: következtetéseket vontunk le belőle. A próba megerősíteni látszott a sejtést. De a megerősítés nem bizonyítás.

SZIGMA: Hiszen így bizonyításunk még kevesebbet bizonyított, mint gondoltuk! Akkor most fordított eljárást kell alkalmaznunk: meg kell próbálni egy ellentétes irányú gondolatkísérletet konstruálni, amely a háromszögtől visszavezet a poliéderhez.

BÉTA: Így van. Dzéta viszont rámutatott, hogy rögtön valódi bizonyítással kezdhetjük problémánk megoldását, ahelyett, hogy először próbálkozásokon és tévedéseken keresztül megkonstruálnánk egy naiv sejtést, ezt ellenőriznénk, majd az ellenőrzést alakítanánk át bizonyítássá. Ha felismertük volna a deduktív találgatás lehetőségét, elkerülhettük volna mindezt a pszeudoinduktív tapogatózást!

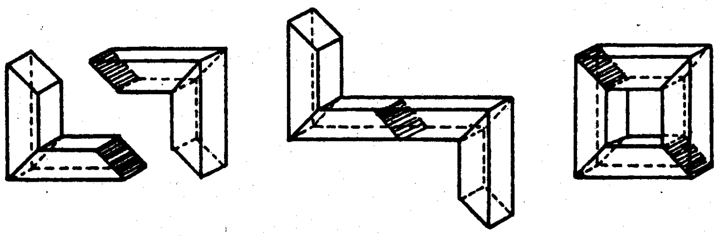
KAPPA *(félre)*: Pálfordulások drámai sorozta! A kritikus Alfa dogmatikussá, a dogmatikus Delta a cáfolatelmélet hívévé vált, most meg az induktivista Béta deduktivistává!
SZIGMA: Várj csak! Ha az *ellenőrző gondolatkísérlet*...
BÉTA: Én *analízisnek* nevezem...
SZIGMA: ... egyáltalán folytatható egy *bizonyító gondolatkísérlettel*...
BÉTA: ...amit *szintézisnek* nevezek...[1]
SZIGMA: ... az „analitikus tétel" szükségképpen azonos lesz a „szintetikus tétellel"? Ellentétes irányban haladva talán különböző lemmákat használunk![2]
BÉTA: Ha különbözők, akkor a szintetikus tétel felváltja az analitikust, elvégre az analízis csak *ellenőriz*, míg a szintézis *bizonyít*.
TANÁR: Úgy látszik, megdöbbentette magukat az a felfedezés, hogy „*bizonyításunk*" valójában *ellenőrzés* volt, és közben elterelődött a figyelem a fő kérdésről: ha van egy ellenpélda által már megcáfolt sejtésünk, félre kell tolni a cáfolatot, s meg kell próbálni gondolatkísérlet segítségével ellenőrizni a sejtést; így esetleg találunk egy bizonyítást, elhagyhatjuk a próbálkozások és tévedések szakaszát, áttérhetünk a bizonyítások és cáfolatok módszerére. Pontosan ezért mondtam, hogy „szívesen fogok hozzá egy hamis sejtés »bizonyításához«"![3] Lambda is azt követelte *1. szabály*ában: „Ha van egy sejtésed, kezdd el bizonyítani *és* cáfolni!"[4]
DZÉTA: Így van. De hadd tegyek hozzá Lambda szabályaihoz és Ómega *4. szabály*ához egy
5. szabályt: Ha bármilyen típusú ellenpéldáid vannak, deduktív találgatással próbálj egy olyan mélyebb tételt találni, amelynek ezek már nem ellenpéldái!

1 A papposzi heurisztika szerint a matematikai felfedezés egy sejtéssel kezdődik, ezt *analízis* követi, majd, ha az *analízis* nem cáfolja meg a sejtést, *szintézissel* zárul. (Vö. még: 9. o. 1. lj. és 101. o. 1. lj.) De míg a mi *analízis—szintézis* változatunk *helyesbíti* a sejtést, Papposzé csak *bizonyítja* vagy *nem bizonyítja*.
2 Vö.: *R. Robinson:* Analysis in Greek Geometry. Id. kiad. 471. o.
3 L.: 45. o.
4 L.: 81. o.

ÓMEGA: Most az én „mélység" fogalmamat tágítod ki, és lehet, hogy igazad van. De hogy alkalmazod az új szabályt a gyakorlatban? Segítségével eddig csak olyan eredményeket kaptunk, amelyeket már előzőleg is ismertünk. Könnyű utólag okosnak lenni. Az általad javasolt „deduktív találgatás" csak a tanár úr eredeti *analízisének* megfelelő *szintézis*. De most már légy tisztességes: módszeredet használd még ismeretlen sejtés felkutatására, amely a tartalom ígért gyarapodását is meghozza!
DZÉTA: Helyes. Az *én* gondolatkísérletemből származó tétellel kezdem: „*Minden zárt normális poliéder Euler-féle.*"
ÓMEGA: „Normális"?
DZÉTA: Nem akarok időt vesztegetni azzal, hogy eleget teszek a bizonyítás és cáfolatok módszerének. Egyszerűen „normálisnak" nevezem mindazokat a poliédereket, amelyek felépíthetők egy „tökéletes" sokszögből, hozzáillesztve *a)* $l-2$ lapot $c-é+l$ megváltozása nélkül (ezek *nyitott* normális poliéderek lesznek), *b)* egy utolsó zárólapot, amely 1-gyel növeli $c-é+l$-et (és a *nyitott* poliédert *zárttá* változtatja).
ÓMEGA: „Tökéletes sokszög"?
DZÉTA: „Tökéletes" sokszögön olyan sokszöget értek, amely egyetlen csúcsból felépíthető úgy, hogy először $c-é$ megváltozása nélkül $n-1$ élt illesztünk hozzá, majd egy utolsó záróélt, amely $c-é$-t 1-gyel csökkenti.
ÓMEGA: A te zárt normális poliédereid megegyeznek az általunk ismert Cauchy-féle poliéderekkel?
DZÉTA: Ezzel most nem akarok foglalkozni.

d) A tartalom növelése deduktív találgatással

TANÁR: Elég a bevezetésből, lássuk a dedukciót!
DZÉTA: Igen, uram. Veszek két zárt normális poliédert (20(*a*) ábra), és egy sokszög kerülete mentén úgy ragasztom össze őket, hogy a két egymással találkozó lap eltűnjék (20(*b*) ábra). Mivel a két poliédernél (együttesen) $c-é+l=4$, a két lap eltűnése az egyesített poliéderben helyreállítja az Euler-formulát. Ez Cauchy bizonyítása után nem



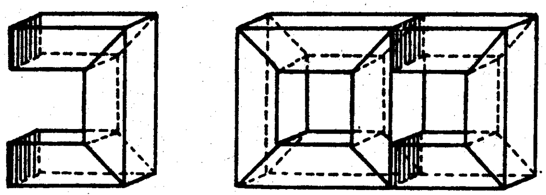
(a) (b) (c)

20. ábra

meglepetés, hiszen az új poliéder is könnyen felfújható gömbbé.* A formula tehát kiállja ezt a ragasztási ellenőrzést. De próbálkozzunk most kettős ragasztással: „ragasszuk" össze a két poliédert két sokszög kerülete mentén (20(*c*) ábra)! Most négy lap tűnik el, és az új poliédernél $c-é+l=0$.

GAMMA: Ez Alfa *4. ellenpéldá*ja, a képkeret!

DZÉTA: Ha most ehhez a képkerethez (20(*c*) ábra) még egy normális poliédert (21(*a*) ábra) ragasztok, $c-é+l$ értéke -2 lesz (21(*b*) ábra)...



(a) 21. ábra (b)

SZIGMA: Egyszeresen összefüggő poliéder esetében $c-é+l=2$, kétszeresen összefüggő poliéder esetében $c-é+l=0$, háromszorosan

* *A szerkesztők megjegyzése:* Ez a levezetés hamis, bár a végeredmény helyes. A ragasztás ténylegesen 8 csúcs, 12 él és 6 lap eltűnésével jár. Ezért csökken kettővel az Euler-karakterisztika értéke. (A két vonalkázott lapnak a 20(*b*) ábrán szemléltetett, feltételezett pontos egybeesése azt jelenti, hogy megfordítjuk az egyik fél képkeret rézsútos levágását úgy, hogy felcserélődik a hosszabb és a rövidebb él. Mivel ez a művelet sem *c*-t, sem *é*-t, sem *l*-et nem változtatja meg, az érvelés tulajdonképpen elfogadható.)

összefüggő poliéder esetében $c-é+l=-2$, *n*-szeresen összefüggő poliéder esetében $c-é+l=2-2(n-1)$...

DZÉTA: ...amely minden korábbinál tartalmasabb, bizonyítással kiegészített, új sejtés, anélkül, hogy egyetlen táblázatot is készítettünk volna.[1]

SZIGMA: Ez igazán szép. Nemcsak a megátalkodott képkeretet sikerült megmagyaráznod, hanem eredeti ellenpéldák végtelen sokaságát is létrehoztad...

DZÉTA: Magyarázattal együtt.

RHÓ: Épp most jutottam más úton ugyanerre az eredményre. Dzéta két Euler-féle példából indult ki, és egy ellenőrzött kísérlet során ellenpéldává alakította át őket. Én egy ellenpéldából indulok ki, és ezt példává alakítom át. A következő gondolatkísérletet végeztem egy képkerettel: „Legyen a poliéder valami könnyen vágható anyagból, például puha agyagból. Dugjunk át egy fonalat az alagúton, s aztán húzzuk át az agyagon. A test nem esik szét..."[2] Viszont ismert, egyszerű, egyszeresen összefüggő poliéderré válik! Igaz, a lapok számát kettővel, az élek és a csúcsok számát *m*-mel növeljük, de mert tudjuk, hogy az egyszerű poliéderek Euler-karakterisztikája 2, az eredeti poliéder karakterisztikája bizonyára 0 volt. Mármost ha több, mondjuk *n* vágásra van szükség ahhoz, hogy a poliédert egyszerűvé redukáljuk, a karakterisztika $2-2n$ lesz.

SZIGMA: Ez érdekes. Dzéta már kimutatta, hogy nincs feltétlen szükségünk sejtésre ahhoz, hogy elkezdjük a *bizonyítást*, hogy azonnal *szintézist*, azaz egy bizonyító gondolatkísérletet konstruálhatunk egy már igaznak ismert rokon jellegű állításból kiindulva. Rhó most azt mutatja meg, hogy ahhoz sincs feltétlen szükségünk sejtésre, hogy elkezdjük az *ellenőrzést*, hanem — *úgy téve*, mintha az eredmény már

1 Ez Raschigtól származik. (*L. Raschig:* Zum Euler'schen Theorem der Polyedrometrie. *In:* „Festschrift des Gymnasium Schneeberg", 1891.)

2 *R. Hoppe:* Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. *In:* „Archiv der Mathematik und Physik", 1879. 102. o.

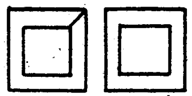
ismert lenne — *analízist*, ellenőrző gondolatkísérletet végezhetünk.[1]

ÓMEGA: Bármelyik módszert választjátok is, poliéderek tömegei maradnak magyarázat nélkül! Új tételetek szerint $c-\acute{e}+l$ minden poliédernél 2-nél nem nagyobb páros szám. Ezzel szemben elég sok *páratlan* Euler-karakterisztikájú poliéderrel találkoztunk már. Vegyük a búbos kockát (12. ábra), ahol $c-\acute{e}+l=1$...

DZÉTA: Soha nem állítottam, hogy tételem *minden* poliéderre vonatkozik. Csak az én értelmezésem szerint szerkesztett, *n*-szeresen összefüggő poliéderek mindegyikére vonatkozik. Jelenlegi ismereteink szerint az én értelmezésem nem eredményez gyűrű alakú lapokat.

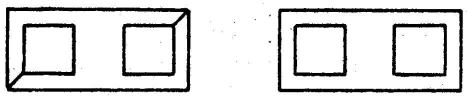
ÓMEGA: Na és akkor?

SZIGMA: Tudom! A gyűrű alakú lapokkal rendelkező poliéderekre is kiterjeszthető a tétel: ha egy megfelelő bizonyításból származó sokszögrendszerben a lapok számának csökkenése nélkül megszüntetünk egy élt, gyűrű alakú sokszög szerkeszthető (22(*a*) és 22(*b*) ábra). Sőt,



(*a*) (*b*)

22. ábra



(*a*) (*b*)

23. ábra

lehet, hogy vannak olyan „normális", bizonyításunknak megfelelően felépülő sokszögrendszerek is, amelyekben egynél több él szüntethető meg a lapok számának csökkenése nélkül...

GAMMA: Így van. Nézzétek ezt a „normális" sokszögrendszert (23(*a*) ábra)! Két él szüntethető meg a lapok számának csökkenése nélkül (23(*b*) ábra).

SZIGMA: Jó! Akkor általában minden *n*-szeresen összefüggő poliéder esetében, amelyben $\acute{e}_k$ élt szüntettünk meg a lapok számának csökkenése nélkül, $c-\acute{e}+l=2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{l}\acute{e}_k$.

BÉTA: Ez a formula megmagyarázza Alfa búbos kockáját (12. ábra). Ez olyan egyszeresen összefüggő poliéder, amelynek van gyűrű alakú lapja ($n=1$); $\acute{e}_6=1$, a többi $\acute{e}_k=0$, azaz $\sum_{k=1}^{l}\acute{e}_k=1$, következésképpen $c-\acute{e}+l=3$.

SZIGMA: Ez megmagyarázza a te „irracionális" Euler-féle torzszülöttedet is: a kockát, amelyben alagút és két gyűrű alakú lap van (16. ábra). Ez egy kétszeresen összefüggő poliéder ($n=2$), ahol $\sum_{k=1}^{l}\acute{e}_k=2$. Következésképpen karakterisztikája $c-\acute{e}+l=2-2+2=2$. Helyreállt a poliéderek világának erkölcsi rendje![1]

ÓMEGA: És mi van az üreges poliéderekkel?

1 Ez ismét a papposzi heurisztikához tartozik. Papposz a sejtésből kiinduló *analízist* „*teoretikus*nak", a sejtés hiányában végzett analízist „*problematikus*nak" nevezi. (*T. L. Heath:* The Thirteen Books of Euclid's Elements. Id. kiad. I. k. 138. o.) Az első a *bizonyítandó*, a második a *megoldandó problémákra* vonatkozik. Vö. még: *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 200—207. („Papposz") és 131—137. o. („Fordított irányú munka").

1 Lhuilier nagyjából ugyanilyen formulával állította helyre a „rendet" (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 189. o.), Hessel pedig az Euler-féle poliéderek összeillesztésének különböző módjaira vonatkozó nehézkes, *ad hoc* formuláival (*J. F. Hessel:* Nachtrag zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyedern. Id. kiad. 19—20. o.). Vö.: 105. o. 1. lj.

Történetileg Lhuiliernek sikerült naiv találgatással általánosítani az Euler-formulát (fent említett művében), és a következő eredményre jutott: $c-\acute{e}+l=2[(\ddot{u}-a+1)+(p_1+p_2+\ldots p_l)]$, ahol $\ddot{u}$ az üregek, a az alagutak, p_i az i-dik lapon található belső sokszögek számát jelöli. A „belső sokszögeket" illetően be is *bizonyította* ezt a formulát, de az alagutakkal nem tudott megbirkózni. A formulát annak kapcsán konstruálta, hogy megkísérelte megmagyarázni háromféle „kivételét", a kivételek felsorolása viszont nála sem teljes. (Vö.: 50. o. 1. lj.) De nemcsak emiatt hamis naiv sejtése. Lhuilier ugyanis nem vette észre, hogy az üregek is lehetnek többszörösen összefüggők, hogy nem lehet egyértelműen meghatározni az elágazó alagutakat tartalmazó poliéderekben az alagutak számát, és hogy nem „a belső sokszögek száma", hanem a gyűrű alakú lapok száma számít (formulája csődöt mond két olyan szomszédos belső sokszög esetében, amelynek egy közös éle van). Lhuilier „induktív általánosításának" kritikája megtalálható Listing egy munkájában. (*J. B. Listing:* Der Census räumlicher Complexe. *In:* „Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", 1861. 98—99. o.) Vö. még: 138. o. 1. lj.

SZIGMA: Tudom! Ezeknél össze kell adni minden egyes különálló felület Euler-karakterisztikáját:

$$c-é+l=\sum_{j=1}^{K}\left\{2-2(n_j-1)+\sum_{k=1}^{l}é_{kj}\right\}.$$

BÉTA: És az ikertetraéderek?

SZIGMA: Tudom! ...

GAMMA: Mi értelme ennek a precizitásnak? Elegem van a nagyképű trivialitások áradatából![1]

ALFA: Miért hagyná abba? Vagy talán az ikertetraéderek torzszülöttek, nem igazi poliéderek? Az ikertetraéder éppen olyan jó poliéder, mint a te hengered! Neked tetszett a *nyelvi* precizitás.[2] Miért gúnyolod ki a mi újfajta precizitásunkat? A tételt *minden* poliéderre ki kell terjesztenünk. Ha pontosabbá tesszük, növeljük, és nem csökkentjük a tartalmát. Ebben az esetben erény a precizitás!

KAPPA: Az unalmas erények éppen olyan rosszak, mint az unalmas hibák! Ráadásul soha nem érhetsz el *tökéletes* precizitást. Ott kell abbahagynunk, ahol a folytatás már nem érdekes.

ALFA: Nekem más a véleményem. Abból indultunk ki, hogy

(1) egy csúcs az egy csúcs.

1 Elég sok XIX. századi matematikust zavarba ejtett a tartalom efféle triviális növekedése, valójában azt sem tudták, mit mondjanak róla. Egyesek — mint Möbius — torzszülött-kizáró definíciókat használtak (l: 34. o.), mások — mint Hoppe — a torzszülöttek kiigazításának módszerét alkalmazták. Hoppe imént idézett munkája különösen árulkodó. Egyrészt — sok kortársához hasonlóan —, nagyon szeretett volna egy mindenre kiterjedő, *tökéletesen befejezett* „általános Euler-formulát". Másrészt, húzódozott a triviális komplexitásoktól. Ily módon, bár azt állította, hogy képlete „befejezett, mindent magában foglaló", zavarosan hozzátette, hogy „speciális esetek kétessé tehetik az (alkotóelemek) számbavételét". (*R. Hoppe:* Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. Id. kiad. 103. o.) Azaz, ha egy kellemetlen poliéder mégis legyőzné formuláját, akkor a poliéder alkotóelemeit rosszul számolták meg, és a torzszülöttet helyes látásmód segítségével ki kell igazítani: például az ikertetraéder közös csúcsait és éleit kétszeresen kell látni és számolni, s mindkét tetraédert önálló poliédernek kell tekinteni. (Uo.) További példák: 145. o. 2. lj.

2 L.: 82—86. o.

Ebből levezettük, hogy

(2) $c=é$ minden tökéletes sokszög esetében.

Ebből levezettük, hogy

(3) $c-é+l=1$ minden normális nyitott sokszögrendszer esetében.

Ebből:

(4) $c-é+l=2$ minden normális zárt sokszögrendszer, azaz a poliéderek esetében.

Ebből viszont megint:

(5) $c-é+l=2-2(n-1)$ minden normális n-szeresen összefüggő poliéder esetében.

(6) $c-é+l=2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{l}é_k$

a többszörösen összefüggő lapokkal rendelkező normális n-szeresen összefüggő poliéderek esetében.

(7) $c-é+l=\sum_{j=1}^{K}\left\{2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{l}é_{kj}\right\}$

a többszörösen összefüggő lapokkal és üregekkel rendelkező normális n-szeresen összefüggő poliéderek esetében.

Hát nem csodálatos, ahogy kibomlik a triviális kiindulópont rejtett gazdagsága? És mivel (1) kétségtelenül igaz, igaz a többi is.

RHÓ *(félre)*: Rejtett „gazdagság"? Az utolsó kettő csak azt mutatja, milyen *szegényessé* válhatnak az általánosítások![1]

LAMBDA: Tényleg azt hiszed, hogy az (1) az az egyetlen axióma, amelyikből az összes többi következik? Hogy a dedukció növeli a tartalmat?

ALFA: Természetesen! Nem a deduktív gondolatkísérlet csodája ez? Ha egyszer sikerül megragadni egy kis igazságot, a dedukció csalhatatlanul a tudás fájává növeszti.[2] Ha egy dedukció *nem* növeli a tar-

1 Vö.: 145—147. o.

2 Az ókori filozófusok nem riadtak vissza attól, hogy egy sejtést nagyon triviális következményéből vezessenek le. (Lásd például a háromszögtől a poliéderig vezető szintetikus bizonyításunkat.) Platón szerint „elegendő egyetlen axióma egy egész rendszer létrehozásához". „Rendesen önmagában is olyan termékenynek tartott egyetlen hipotézist, hogy módszertanában nem vett tudomást azokról a premisszák-

talmat, nem nevezem dedukciónak, hanem „verifikációnak"; „a verifikáció pontosan azért különbözik az igazi bizonyítástól, mert az előbbi pusztán analitikus és terméketlen".[1]

LAMBDA: De a dedukció igazán nem növelheti a tartalmat! Ha a kritika során kiderül, hogy a következmény gazdagabb, mint a premissza, akkor rejtett lemmák kifejtésével kell megerősítenünk a premisszát.

KAPPA: És éppen ezek a rejtett lemmák hordozzák a szofizmust és a tévedés lehetőségét, s végül is lerombolják a csalhatatlan dedukció mítoszát.[2]

TANÁR: Van még kérdés Dzéta módszerével kapcsolatban?

e) Logikai és heurisztikus ellenpéldák

ALFA: Nekem tetszik Dzéta *5. szabálya*[3] — ahogy Ómega *4. szabálya* is tetszett.[4] Ómega módszere azért tetszett, mert helyi, de nem globális ellenpéldákat keresett, olyanokat, amelyeket Lambda eredeti három szabálya[5] logikailag ártalmatlannak, s ezért heurisztikailag érdektelennek ítélt és figyelmen kívül hagyott. Ezek a példák arra ösztönözték Ómegát, hogy új gondolatkísérleteket konstruáljon; ezek tudásunk valódi bővülésére vezettek.

ról, amelyekkel ezt a hipotézist összekapcsolta." (*R. Robinson:* Plato's Earlier Dialectic. Oxford 1953. 168. o.) *Ez jellemző az ókori informális logikára, vagyis a bizonyítás, gondolatkísérlet vagy konstrukció logikájára. Mi csak utólagos bölcsességgel tartjuk ezt entimematikusnak; csak később következett be, hogy a tartalom növekedése a levezetés erőssége helyett a levezetés gyengeségének jelévé vált.* Ezt az antik informális logikát határozottan helyeselte Descartes, Kant és Poincaré. Az arisztotelészi formális logikát mint terméketlen és irreleváns logikát mindhárman megvetették és elutasították, ugyanakkor magasztalták a termékeny informális logika csalhatatlanságát.

1 *H. Poincaré:* La science et l'hypothèse. Id. kiad. 33. o.

2 A rejtett lemmák utáni hajsza csak a XIX. század közepén kezdődött el a matematikai kritikában, s szorosan összefüggött azzal a folyamattal, amely később *a bizonyításokat bizonyításelemzésekkel, a gondolkodás törvényeit a nyelv törvényeivel* helyettesítette. Az elméleti logika legfontosabb eredményeit rendszerint megelőzte a matematikai kritika fejlődése. Sajnos még a legjobb logikatörténészek is hajlamosak kizárólag az *elméleti logika változásaira* figyelni, nem véve észre, hogy ezek a *logikai gyakorlat változásaiban* gyökereznek. Vö. még: 154. o. 2. lj.

3 L.: 116. o.

4 L.: 93. o.

5 L.: 81—82. o.

Dzétát most globális és egyben helyi ellenpéldák — logikai szempontból tökéletes, de heurisztikailag nem tökéletes megerősítések — lelkesítik; jóllehet, ezek megerősítések, beavatkozást igényelnek. Dzéta azt javasolja, hogy bővítsük, finomítsuk eredeti gondolatkísérleteinket, alakítsuk át a logikai megerősítéseket heurisztikus megerősítésekké, a logikailag kielégítő példákat mind logikai, mind heurisztikus szempontból kielégítő példákká.

Mind Ómega, mind Dzéta új gondolatokat keres, míg Lambda, de különösen Gamma lehorgonyoz a nyelvi trükköknél, hogy megbirkózzanak irreleváns globális, de nem helyi ellenpéldáikkal; hóbortos szemléletük szerint egyedül ezek releváns ellenpéldák.

THÉTA: Vagyis a logikai szemlélet úgy-e „hóbortos"?

ALFA: A *te* logikai szemléleted igen. De még egy megjegyzésem van. Akár növeli a dedukció a tartalmat, akár nem — jegyezzétek meg, hogy igenis növeli! — kétségtelenül biztosítja a *tudás folytonos növekedését*. Kiindulunk egy csúcsból, lendületesen és harmonikusan növeljük tudásunkat, hogy megmagyarázzuk azt az összefüggést, amely bármely poliéder csúcsainak, éleinek és lapjainak száma közt fennáll; ez a növekedés nem drámai, s cáfolatok nélkül zajlik.

THÉTA *(Kappához):* Alfa teljesen elvesztette az ítélőképességét? Az ember egy *problémából* indul ki, nem pedig egy csúcsból![1]

ALFA: Ez az aprólékos, de ellenállhatatlanul diadalmas hadjárat olyan tételekhez vezet, amelyek „noha maguk nem evidensek, de levezethetők igaz és világosan felismert elvekből, egy folytonos, sehol meg nem szakított gondolatmozgás által, amelynek egyes lépéseit világos intuícióval belátjuk".[2] Ezek a tételek „elfogulatlan" megfigyeléssel és villanásszerű felismeréssel sohasem lettek volna elérhetők.

1 Alfát szemlátomást elragadta a deduktív heurisztika téveszméje. Vö.: 114. o. 1. lj.

2 *R. Descartes:* Szabályok az értelem vezetésére. III. szabály. *In: Descartes:* Válogatott filozófiai művek. Bp. 1961. 93. o.

THÉTA: Kételkedem e végső győzelemben. Az efféle növekedés soha nem vezet el a hengerhez, mert (1) állításod egy csúcsból indul ki, a hengernek pedig egyáltalán nincs csúcsa. Sohasem juthatunk el az egyoldalú vagy a többdimenziós poliéderekhez sem. Ez az aprólékos folyamatos tágulás valószínűleg véget ér egy ponton, s akkor új, forradalmi kiindulópontot kell majd keresni. És még ez a „békés kontinuitás" is tele van cáfolatokkal, kritikával! Miért lépünk tovább a (4) állításról az (5)-re, az (5)-ről a (6)-ra, a (6)-ról a (7)-re, ha nem a globális és egyben helyi ellenpéldák folytonos nyomására? Lambda csak a globális, de nem helyi ellenpéldákat tartotta igazinak: ezek az ellenpéldák a tétel *hamis voltát* fedték fel. Ómega Alfa által joggal dicsért újítása igazinak fogadtatta el a helyi, de nem globális ellenpéldákat is; ezek az ellenpéldák a tétel *igazságának szegényességét* fedték fel. Dzéta most azt mondja, ismerjük el igazinak a globális és egyben helyi ellenpéldákat is: ezek is a tétel *igazságának szegényességére* utalnak. A képkeretek például a Cauchy-tétel globális és egyben helyi ellenpéldái; természetesen önmagában az *igazságot* illetően a képkeretek megerősítések, de a *tartalmat* illetően cáfolatok. Az első (globális, de nem helyi) ellenpéldákat *logikai*, a többit *heurisztikus ellenpéldáknak* nevezhetjük. De minél inkább felismerjük a — logikai vagy heurisztikai — cáfolatokat, annál gyorsabban gyarapodnak ismereteink. Alfa a logikai ellenpéldákat irrelevánsnak tartja, a heurisztikai ellenpéldákat pedig egyáltalán nem hajlandó ellenpéldának nevezni, mert képtelen megszabadulni attól az elgondolástól, hogy a matematikai ismeretek fejlődése folyamatos, és a kritika semmiféle szerepet sem játszik.

ALFA: Csak azért tágítod mesterségesen a cáfolat és a kritika fogalmát, hogy igazold az ismeretek gyarapításának kritikai elméletét. Nyelvi trükkök egy kritikai gondolkodónál?

PI: Szerintem a fogalomalkotás megvitatása segíthet tisztázni a kérdést.

GAMMA: Csupa fül vagyok.

8. Fogalomalkotás

a) Cáfolat a fogalom kitágításával. A torzszülöttek kizárásának meg a tévedés és cáfolat fogalmának újraértékelése

PI: Előbb a Dzéta, sőt, Ómega előtti időszakba szeretnék visszanyúlni, a tételalkotás három fő módszeréhez: a torzszülöttek kizárásához, a kivételek kizárásához meg a bizonyítások és cáfolatok módszeréhez. Mindhárom módszer ugyanabból a naiv sejtésből indult ki, de különböző *tételekkel* és különböző *elméleti terminusokkal* végezte. Alfa már vázolta e különbségek néhány vetületét,[1] de összefoglalása nem kielégítő, főleg a torzszülöttek kizárása meg a bizonyítások és cáfolatok módszere esetében. Alfa szerint a torzszülötteket kizáró tétel „a nyelvi kifejezés azonossága mögé" a naiv sejtés „lényeges helyesbítését rejti", szerinte Delta a „naiv" poliéderek osztályát fokozatosan a nem Euler-féle torzszülöttektől megtisztított osztállyá *szűkíti*.

GAMMA: Mi baja ennek az összefoglalásnak?

PI: Az, hogy nem a torzszülött-kizárók *szűkítették* a fogalmakat, hanem a cáfolatelmélet hívei *tágították*.

DELTA: Úgy van, úgy van!

PI: Tekintsünk vissza témánk első kutatóinak korára. A felfedezőket megigézte a *szabályos* poliéderek gyönyörű szimmetriája: azt hitték, ez az öt szabályos test rejti a világegyetem titkát. Mire a Descartes—Euler-sejtést megfogalmazták, már a poliéder fogalmába tartozott a konvex poliéderek minden fajtája, sőt, néhány konkáv poliéder is. Ezzel szemben biztosan nem tartoztak bele a nem egyszerű vagy a gyűrű alakú lapokkal rendelkező poliéderek. A figyelembe vett poliéderekre vonatkozóan — az akkori ismeretek szerint — igaz *volt* a sejtés, és hibátlan volt a bizonyítás.[2]

1 L.: 69. o.

2 Először Eulernél szerepel konkáv poliéder geometriai szövegben. (*L. Euler:* Elementa Doctrinae Solidorum. Id. kiad. 6. ábra.) Legendre konvex és konkáv poliéderekről beszél. (*A. M. Legendre:* Éléments de géométrie. Id. kiad.) De Lhuilier előtt senki sem említett nem egyszerű konkáv poliédereket.

Azután jöttek a cáfolatelmélet hívei. Kritikai buzgóságukban úgy kitágították a poliéder fogalmát, hogy olyan dolgokra is kiterjedt, amelyek idegenek voltak az eredeti értelmezéstől. Az *eredeti értelmezés* szerint a sejtés igaz volt, és csak a cáfolatelmélet hívei által becsempészett, *eredetitől eltérő értelmezés* szerint volt hamis. „Cáfolatuk" nem tárt fel semmiféle *tévedést* az eredeti sejtésben, semmiféle *hibát* az eredeti bizonyításban, hanem egy olyan *új* sejtés hamisságát mutatta ki, amelyet előzőleg senki sem fogalmazott meg, amelyre senki sem gondolt.

Szegény Delta! Hősiesen védelmezte a poliéder eredeti értelmezését. Minden egyes ellenpéldával egy új kikötést állított szembe, hogy megvédje az eredeti fogalmat...

GAMMA: De hát nem Delta változtatta meg az álláspontját minden egyes esetben? Valahányszor új ellenpéldát hoztunk fel, definícióját felváltotta egy újabb „rejtett" kikötést felfedő hosszabbal!

PI: Micsoda torz értékelése a torzszülöttek kizárásának! Csak *úgy látszott*, hogy megváltoztatja az álláspontját. Ártatlanul vádoltátok azzal, hogy csökönyösen védelmezve egy gondolatot, meg nem engedett terminológiai epiciklusokat használ. A baj forrása az a szerencsétlen *1. definíció* („A poliéder olyan test, amelynek a felülete sokszögekből áll.") volt, amelyre nyomban rávetették magukat a cáfolatelmélet hívei. De Legendre ezt a definíciót *csak* a naiv poliéderekre vonatkoztatta, s egyáltalán nem vette észre, hogy sokkal több fér bele, és nem is akarta másra kiterjeszteni. A matematikai közvélemény rákényszerült annak a torz tartalomnak a tudomásulvételére, amely ebből a plauzibilis, ártatlannak látszó definícióból lassan kibontakozott. Ezért kellett Deltának újra és újra azt dadognia, „úgy értettem...", és ezért kellett kifogyhatatlan „hallgatólagos" kikötéseit explicitté tennie. Az egészre azért kerülhetett sor, mert a naiv fogalmat soha nem rögzítették, és helyébe egy egyszerű, de torz, az eredetitől eltérő definíció lépett. De képzeljünk el egy másfajta helyzetet, ahol a definíció megfelelően rögzíti a „poliéder" eredeti értelmezését. Ebben az esetben a cáfolóknak kellett volna egyre hosszabb, a *torzszülötteket magukban foglaló definíciókat* konstruálni, mondjuk, a „komplex poliéderekre": „A komplex poliéder (valódi) poliéderek olyan halmaza, amelyben bármely két illeszkedő poliéder egybevágó lapokon keresztül kapcsolódik egymáshoz." „A komplex poliéderek lapjai komplex sokszögek lehetnek, amelyek (valódi) sokszögek olyan halmazai, amelyekben bármely két illeszkedő sokszög egybevágó éleken keresztül kapcsolódik egymáshoz." Ez a *komplex poliéder* felelt volna meg aztán Alfa és Gamma cáfolatból származó *poliéder* fogalmának, mivel az első definíció megenged nem egyszerű poliédereket is, a második pedig nem egyszeresen összefüggő lapokat is. Vagyis nem szükségképpen a torzszülött-kizárók vagy a fogalmat megőrzők feladata új definíciók alkotása, lehet ez a torzszülötteket befogadók és a fogalmat kitágítók feladata is.[1]

SZIGMA: Mulatságos, hogy a fogalmak és a definíciók — azaz az eredeti fogalmak és az eredetitől eltérő definíciók — kibabrálhatnak egy-

Mindamellett tehetünk egy érdekes kiegészítést. A poliéderek elsőként vizsgált osztálya részben az öt szabályos poliéderből, részben a hasábhoz és gúlához hasonló kváziszabályos poliéderekből állt. A reneszánsz után ezt az osztályt két irányban bővítették. Az egyik magában foglalt minden konvex és néhány enyhén horpadt poliédert; ez szerepel a szövegben. A másik Kepleré, aki kibővítette a szabályos poliéderek osztályát a szabályos csillagpoliéder feltalálásával. Kepler újítása azonban feledésbe merült, csak Poinsot-nál bukkant fel újra (vö.: 36—37. o.). Biztos, hogy Euler nem is álmodott a csillagpoliéderekről. Cauchy tudott róluk, de agya furcsa rekeszekre volt osztva: ha volt egy érdekes gondolata a csillagpoliéderekről, publikálta, de ha a poliéderekre vonatkozó általános tételeinek ellenpéldáit sorolta fel, nem vett tudomást róluk. Nem úgy az ifjú Poinsot (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad.), aki viszont később megváltoztatta véleményét (vö.: 56. o.).

Pi állítása tehát heurisztikailag (azaz a matematika racionális története szempontjából) helyes ugyan, de történetileg téves. (Ez senkit ne aggasszon: a tényleges történelem gyakran csupán karikatúrája a történelem racionális rekonstrukciójának.)

1 A torzszülötteket befogadó definíció érdekes példája a *konvexitás* Poinsot-féle újrameghatározása, amely a csillagpoliédereket is besorolja a konvex szabályos testek tekintélyes osztályába. (*L. Poinsot:* Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad.)

mással. Álmomban sem jutott eszembe, hogy a fogalomalkotás lemaradhat egy az eredetinél tágabb definíció mögött!

PI: Pedig így van. A torzszülött-kizárók ragaszkodnak az eredeti fogalomhoz, míg a fogalom-kitágítók kiszélesítik ezt a fogalmat. Furcsa dolog, hogy a fogalom kitágítása lopva zajlik, senki sem tud róla, és mivel a táguló fogalommal együtt mindenkinek a „koordinátarendszere" is tágul, prédájává válik annak a heurisztikus csalódásnak, hogy a torzszülöttek kizárása *szűkíti* a fogalmakat, holott valójában ez hagyja őket változatlanul.

DELTA: Most akkor ki volt intellektuálisan tisztességtelen? Ki változtatta meg nem engedett módon az álláspontját?

GAMMA: Belátom, tévedtünk, amikor Deltát azzal vádoltuk, hogy lopva leszűkíti a poliéder fogalmát: mind a hat definíciója a poliédernek ugyanarra a régi jó fogalmára vonatkozott, amelyet elődeitől vett át. *Ugyanazt a szegényes fogalmat definiálta egyre gazdagabb elméleti koordináta-rendszerben vagy stílussal. A torzszülöttek kizárása nem fogalmakat alakít át, hanem csak definíciókat.* A torzszülötteket kizáró tétel egyáltalán nem helyesbíti a naiv sejtést.

DELTA: Úgy érted, hogy valamennyi definícióm logikailag ekvivalens volt?

GAMMA: Ez logikai elméletedtől függ — az én logikám szerint egyáltalán nem voltak ekvivalensek.

DELTA: Ismerd be, ezzel a válasszal nem sokra megyünk. De mondd, te megcáfoltad a naiv sejtést? Csak eredeti értelmezését meg nem engedett módon elferdítve cáfoltad.

GAMMA: Azért sokkal fantáziadúsabb és érdekesebb értelmezés segítségével cáfoltuk, mint amilyenről te valaha is álmodtál. Éppen ez a különbség *azok között a cáfolatok között, amelyek csupán egy buta kis hibát fednek fel*, és *azok között a cáfolatok között, amelyek jelentős szerepet játszanak a tudás fejlődésében*. Ha hibás számítás miatt arra az eredményre jutottál volna, hogy „minden poliéder esetében $c-é+l=1$", és én kijavítottam volna tévedésedet, ezt nem nevezném „cáfolatnak".

BÉTA: Igaza van Gammának. Pi eszmefuttatása után nem szívesen

neveznénk „ellenpéldáinkat" *logikai ellenpéldáknak* — mivel végül is nem összeegyeztethetetlenek a sejtés eredeti értelmezésével —, hanem ezek — mivel elősegítik a tudás fejlődését — minden bizonnyal *heurisztikus ellenpéldák*. Ha Delta korlátolt logikáját fogadnánk el, az ismeretek egyáltalán nem gyarapodnának. Tegyük fel, hogy valaki ebben a szűk fogalmi keretben fedezi fel az Euler-sejtés Cauchy-féle bizonyítását! Arra az eredményre jut, hogy gondolatkísérletének minden lépése könnyen elvégezhető *bármely* poliéderen. Nyilvánvalónak, kétségtelennek tekinti azt a „tényt", hogy minden poliéder egyszerű, minden lap egyszeresen összefüggő. Sohasem jut eszébe, hogy egy helyesbített sejtésben feltételekké alakítsa át a „nyilvánvaló" lemmákat, és így építsen fel egy tételt, mert hiányzik az ellenpéldák ösztönzése, amelyek bizonyos „triviálisan igaz" lemmákról kimutatják, hogy hamisak. Ezért úgy véli, hogy a „bizonyítás" minden kétséget kizáróan alátámasztja a naiv sejtés igazságát. Ez a „bizonyosság" azonban korántsem a siker jele, hanem csak a képzelőerő hiányáé, a fogalmi szegényességé. Önelégült megnyugvást eredményez, és akadályozza a tudás fejlődését.[1]

1 Cauchyval tényleg ez történt. Valószínű, hogy ha Cauchy előbb felfedezte volna forradalmi jellegű kivétel-kizáró módszerét (vö.: 88—90. o.), keresett és talált volna néhány kivételt. De feltehetően csak később találkozott a kivételek problémájával, amikor elhatározta, hogy eloszlatja az analízisben uralkodó káoszt. (Úgy tűnik, először Lhuilier vette észre azt a tényt, és nézett szembe vele, hogy ez a „káosz" nem korlátozódik az analízisre.)

A történészek azt szokták mondani (például *E. Steinitz:* Polyeder und Raumeinteilungen. Id. kiad.), hogy Cauchy nem egyetemes érvénnyel, hanem csak a *konvex* poliéderekre vonatkozóan fogalmazta meg tételét. Igaz, hogy bizonyításában használja az „egy poliéder konvex felülete" kifejezést (*A. L. Cauchy:* Recherches sur les polyèdres. Id. kiad. 81 o.), és máshol „Testszögletekre és *konvex poliéderekre* vonatkozó tételek" főcím alatt fogalmazza meg újra az Euler-tételt (*A. L. Cauchy:* Sur les polygones et les polyèdres. *In:* „Journal de l'École Polytechnique", 1813. 87—98. o.). De valószínűleg azért, hogy ellensúlyozza ezt a címet, különösen hangsúlyozza, hogy Euler tétele *bármely* poliéderre *egyetemesen* érvényes (XI. tétel. 94. o.), míg a *konvex* poliéderekre három másik tételt közöl (XIII. tétel és ennek két korolláriuma. 96. és 98. o.).

Miért ilyen pongyola Cauchy terminológiája? Cauchy poliéder fogalma *majdnem* egybeesett a konvex poliéderek fogalmával. De nem pontosan. Cauchy ismerte a konkáv poliédereket, amelyek a konvex poliéderek oldalának enyhe benyomásával kaphatók meg, de nem foglalkozott olyasmivel, ami tétele irreleváns újabb *megerősítésének* — és nem *cáfolatának* — látszott. (*A megerősítések sohasem hasonlíthatók össze az ellenpéldákkal vagy akár csak a „kivételekkel"; az utóbbiak a fogalom fejlődésének katalizátorai.*) Ez az oka annak, hogy Cauchy esetlegesen használja a „konvex" kifejezést. Észre sem vette, hogy a konkáv poliéderek ellenpéldák is lehetnek, nemhogy tudatos erőfeszítést tett volna ezeknek az ellenpéldáknak a *felszámolására*. Még ugyanabban a bekezdésben azzal érvel, hogy az Euler-tétel „közvetlenül következik" abból a lemmából, hogy sokszögű *sík*hálók esetében $c-é+l=1$, és kijelenti, hogy a „$c-é+l=1$ tétel érvényessége szempontjából nincs jelentősége annak, hogy a sokszögek azonos vagy különböző síkban helyezkednek-e el, mivel a tétel csak a sokszögeknek és a sokszögek alkotóelemeinek számára vonatkozik" (81. o.). Cauchy szűk fogalmi keretén belül ez az érvelés teljesen helyes, de egy szélesebb értelmezés esetén, amelyben például a képkeret is belefér a poliéder fogalmába, helytelen. A XIX. század első felében gyakran megismételték ezt az okfejtést. (Például *L. Olivier:* Bemerkungen über Figuren, die aus Behebigen, von geraden Linien umschlossenen Figuren Zusammengesetzt sind. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1826. 230. o.; *J. A. Grunert:* Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyedern. Id. kiad. 367. o.; *R. Baltzer:* Die Elemente der Mathematik. 2. k. Id. kiad. 207. o.) Becker bírálta ezt az érvelést. (*J. C. Becker:* Über Polyeder. Id. kiad. 68. o.) *Gyakran előfordul, hogy mihelyt fogalom-kitágítással megcáfolnak egy állítást, a megcáfolt állítás olyan elemi hibának tűnik, aminek elkövetését nagy matematikusokról még elképzelni is nehéz.* A fogalmat kitágító cáfolatnak ezzel a fontos sajátosságával magyarázható, hogy tisztes történészek, akik nem tudják megérteni, hogy a fogalmak *fejlődnek*, belegabalyodnak a problémák útvesztőjébe. Miután megmentették Cauchyt, mondván, „egyszerűen lehetetlen, hogy ne vette volna észre" a nem egyszerű poliédereket, és ezért „*kategorikusan*"(!) a konvex poliéderek tartományára *korlátozta* a tételt, a tisztes történészeknek most azt kell megmagyarázniuk, miért volt Cauchynál a határterület „szükségtelenül" keskeny. Miért *nem vette figyelembe* a nem konvex Euler-féle poliédereket. Steinitz magyarázata a következő: az Euler-formula *helyes* megfogalmazásában szerepelnie kell a felületek egymáshoz kapcsolódása terminusának. Mivel Cauchy korában ezt a fogalmat még nem „értették meg világosan", a „legegyszerűbb kibúvó" a konvexitás feltételezése volt. (*E. Steinitz:* i. m. 20. o.) Steinitz tehát egy olyan hibát igazít helyre, amelyet Cauchy sohasem követett el.

Más történészek más úton járnak. Azt mondják, hogy a helyes (azaz az általuk ismert) fogalomrendszer létrejötte előtt „a sötétség korszaka" uralkodott, amikor „ritkán vagy egyáltalán nem születtek" eredmények. Lebesgue (*H. Lebesgue:* Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan. *In:* „Mémoires de l'Académie de l'Institute de France", 1923. 59—60. o.) a poliéderek elméletének ezt a vonását Jordanhoz kapcsolja (*C. Jordan:* Recherches sur les polyèdres. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1866. 22—85. o.), Bell (*E. T. Bell:* The Development of Mathematics. New York 1945. 460. o.) viszont Poincaréhoz (*H. Poincaré:* Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *In:* „Comptes Rendus de Séances de l'Académie des Sciences", 1893. 144. o.).

b) Bizonyításból származó és naiv fogalmak. Teoretikus és naiv osztályozás

PI: Hadd térjek vissza a bizonyításból származó tételre: „Minden egyszerű *poliéder*, amelynek lapjai egyszeresen összefüggők, Euler-féle." Ez a megfogalmazás félrevezető. Jobb lenne így: „Minden egyszerű *tárgy*, amelynek lapjai egyszeresen összefüggők, Euler-féle."

GAMMA: Miért?

PI: Az első megfogalmazás azt sugallja, hogy az egyszerű poliédereknek a tételben szereplő osztálya a naiv sejtés „poliédereinek" részhalmaza.

SZIGMA: Természetesen az egyszerű poliéderek osztálya a poliéderek részhalmaza! Az „egyszerű poliéder" fogalma *leszűkíti* a poliéderek eredeti, tágabb osztályát, mivel azokra a poliéderekre korlátozza, amelyeken bizonyításunk első lemmája teljesíthető. Az „egyszerű poliéder, amelynek lapjai egyszeresen összefüggők" fogalma jelzi az eredeti osztály további szűkítését...

PI: Nem! A poliéderek eredeti osztálya csak olyan poliédereket tartalmazott, amelyek egyszerűek, és amelyeknek a lapjai egyszeresen összefüggő sokszögek. Ómega tévedett, amikor azt mondta, hogy a lemmák beépítése csökkenti a tartalmat.[1]

ÓMEGA: De hát nem zár ki minden egyes lemma-beépítés egy-egy ellenpéldát?

PI: Persze, kizár, de fogalom-kitágítással előállított ellenpéldát zár ki.

ÓMEGA: A lemma-beépítés tehát a torzszülött-kizáráshoz hasonlóan *konzerválja* a tartalmat?

1 L.: 92. o.

PI: Nem. A lemma-beépítés *növeli* a tartalmat, a torzszülött-kizárás nem.
ÓMEGA: Mi? Nemcsak arról akarsz meggyőzni, hogy a lemma-beépítés nem *csökkenti* a tartalmat, hanem arról is, hogy egyenesen *növeli?* Hogy nem *szűkíti* a fogalmakat, hanem *kitágítja* őket?
PI: Pontosan. Figyelj ide! Egy földgömb, amelyre politikai térképet rajzoltak, beletartozott a poliéderek eredeti osztályába?
ÓMEGA: Semmi esetre sem.
PI: De Cauchy bizonyítása után belekerült. Mivel a legkisebb nehézség nélkül elvégezhető rajta Cauchy bizonyítása, hacsak nincsenek rajta gyűrű alakú országok vagy tengerek.[1]
GAMMA: Így van! A bizonyítás elvégzésében legkevésbé sem zavar minket, hogy a poliédereket gömbbé fújjuk fel, eltorzítjuk az éleket és lapokat, mindaddig amíg a torzítás nem változtatja meg a csúcsok, élek és lapok *számát.*
SZIGMA: Értem, mit akarsz mondani! A bizonyításból származó „egyszerű poliéder" ezek szerint nemcsak hogy nem szűkítése, specializálása, hanem éppenséggel *általánosítása, kitágítása* a naiv „poliédereknek".[2] Cauchy bizonyítása előtt aligha juthatott volna bárkinek eszébe az az ötlet, hogy úgy *általánosítsa* a poliéder fogalmát, hogy gyűrött, *görbe* élű, *görbe* lapú „poliéderek" is beleférjenek, s ha mégis eszébe jutott volna valakinek, mint bolondságot elvetették volna. Most viszont ez természetes általánosítás, mivel bizonyításunk műveletei éppúgy értelmezhetők ilyen tárgyakra, mint közönséges, egyenes élű és sík lapú, naiv poliéderekre.[1]
PI: Jó. De még egy lépést kell tenned. A *bizonyításból származó fogalmak* sem a naiv fogalmak „specializációinak", sem azok „általánosításainak" nem tekinthetők. A bizonyítások és cáfolatok hatása a naiv fogalmakra sokkal forradalmibb, mint gondolod: teljes egészében *kitörlik* a döntő fontosságú naiv fogalmakat, és bizonyításból származó fogalmakkal *váltják fel* őket.[2] A naiv „poliéder" terminus még a

1 Vö.: 61. o. 1. lj.
2 Darboux közel került ehhez a gondolathoz. (*G. Darboux:* Lettre à Houel, 12 Janvier 1874. *In: F. Rostand:* Souci d'exactitude et scrupules des mathématiciens. Id. kiad. 11. o.) Később Poincaré világosan megfogalmazta: „... a matematika különböző dolgok azonos elnevezésének művészete... Ha jól választjuk meg a kifejezéseket, döbbenten tapasztaljuk, hogy egy bizonyos tárgyra vonatkozó valamennyi bizonyítás nyomban alkalmazható sok más tárgyra is; semmit, még a szavakat sem kell megváltoztatni, mivel a megnevezések azonossá válnak." (*H. Poincaré:* Science et méthode. Id. kiad. 375. o.) Fréchet ezt „az általánosítás rendkívül hasznos elvének" nevezi, és a következőképpen fogalmazza meg: „Ha egy matematikai objektum tulajdonságainak az a halmaza, amelyet az objektumról szóló valamely állítás bizonyításában használnak, nem határozza meg ezt az objektumot, akkor az állítást bővíteni lehet úgy, hogy egy általánosabb objektumra vonatkozzon." (*M. Fréchet:* Les espaces abstraits. Párizs 1928. 18. o.) Fréchet hangsúlyozza, hogy az ilyen általánosítások nem triviálisak, és „igen nagy erőfeszítést igényelnek" (uo.).

1 Cauchy nem vette észre ezt. Bizonyítása egy fontos szempontból különbözött a tanárétól: Cauchy *nem* képzelte, hogy gumiból is készülhet poliéder. (*A. L. Cauchy:* Recherches sur les polyèdres. Id. kiad.; Sur les polygones et les polyèdres. Id. kiad.) Bizonyítási ötletében az volt az újdonság, hogy a poliédert *felületként* képzelte el, nem *szilárd testként*, mint Eukleidész, Euler és Legendre tette. De Cauchy *szilárd* felületre gondolt. Mikor eltávolított egy lapot és a fennmaradó térbeli sokszöghálót sík sokszöghálóra képezte le, a leképezést nem *nyújtásnak* gondolta, amely esetleg *elgörbítheti* az éleket és lapokat. Crelle volt az első matematikus, aki észrevette, hogy Cauchy bizonyítása *görbe lapú* poliédereken is elvégezhető, de az *egyenes élekhez* még ragaszkodott. (*A. L. Crelle:* Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Id. kiad. 671—672. o.) Cayleynek viszont „*első pillantásra*" felismerhetőnek tűnt, hogy „az elmélet nem változik nagymértékben, ha megengedjük, hogy az élek görbe vonalak legyenek" (*A. Cayley:* On the Partitions of a Close. *In:* „The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science", 1861. 425. o.). Tőle függetlenül ugyanezt a megjegyzést tette Németországban Listing (*J. B. Listing:* Der Census räumlicher Complexe. Id. kiad. 99. o.) és Franciaországban Jordan (*C. Jordan:* Recherches sur les polyèdres. Id. kiad. 39. o.).
2 *A fogalomalkotásnak ez az elmélete a fogalomalkotást a bizonyításokkal és cáfolatokkal köti össze.* Pólya a fogalomalkotást a *megfigyelésekkel* párosítja: „Amikor a fizikusok »elektromosságról« vagy az orvosok »fertőzésről« kezdtek beszélni, ezek homályos, zavaros, kusza terminusok voltak. A tudósok által ma használt »elektromos töltés«, »elektromos áram«, »gombás fertőzés«, »vírusos fertőzés« fogalmak összehasonlíthatatlanul világosabbak és határozottabbak. De a megfigyelések milyen irdatlan tömege, milyen sok ötletes kísérlet húzódik a kétféle terminológia mögött — és néhány nagy felfedezés is. Az indukció megváltoztatta a terminológiát,

fogalomnak a cáfolók által végzett kitágítása után is valami kristályszerű dolgot jelölt, egy szilárd testet, „sík" lapokkal és egyenes élekkel. A bizonyítási ötletek elnyelték és teljesen megemésztették ezt a naiv fogalmat. A különböző, bizonyításokból származó tételekben semmi nincs a naiv fogalomból. A naiv fogalom nyomtalanul eltűnt. Helyette minden bizonyítás kitermeli a rá jellemző, bizonyításból származó fogalmakat, amelyek a nyújthatóságra, felfújhatóságra, fényképezhetőségre, vetíthetőségre és hasonlókra vonatkoznak. A régi probléma eltűnt, és újak keletkeztek. Kolumbusz után már nem kellene meglepődni, ha *az ember nem azt a problémát oldja meg, amelynek megoldását elhatározta.*

SZIGMA: Így a „szilárd testek elmélete", az Euler-sejtés eredeti „naiv" birodalma eltűnik, és az újramodellezett sejtés feltűnik a projektív geometriában, ha Gergonne szerint bizonyítjuk, az analitikus topológiában, ha Cauchy szerint bizonyítjuk, az algebrai topológiában, ha Poincaré szerint bizonyítjuk...

PI: Nagyon helyes. És most már meg fogod érteni, hogy miért nem úgy fogalmaztam meg a tételt, mint Alfa vagy Béta, azaz, hogy „Minden Gergonne-féle poliéder Euler-féle", vagy „Minden Cauchy-féle poliéder Euler-féle" stb., hanem inkább úgy, hogy „Minden Gergonne-féle tárgy Euler-féle", „Minden Cauchy-féle tárgy Euler-féle" stb.[1] *Vagyis nemcsak azt tartom érdektelennek, hogy a naiv fogalmak egzakt voltáról, hanem azt is, hogy a naiv sejtések igaz vagy hamis voltáról vitatkozzunk.*

BÉTA: De biztos, hogy fenntarthatjuk a „poliéder" terminust kedvenc bizonyításból származó fogalmunk, mondjuk, a „Cauchy-féle tárgyak" esetében?

tisztábbá tette a fogalmakat. A folyamatnak ezt az aspektusát, a fogalmak induktív tisztázását megfelelő matematikai példákkal is szemléltethetjük." (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 55. o.) De még ez a hibás, induktivista fogalomalkotási elmélet is szerencsésebb annál a törekvésnél, amely a fogalomalkotást *autonómmá,* a fogalmak *„tisztázását", „explikálását"* a tudományos viták előfeltételévé tenné.

1 L.: 104. o.

PI: Ha akarod, igen, de ne felejtsd el, hogy *terminusod már nem azt jelöli, amit jelölni akart,* hogy naiv jelentése eltűnt és most egy...

BÉTA: ... általánosabb, helyesbített fogalomra alkalmazzuk!

PI: Nem! Egy egészen más, új fogalomra.

SZIGMA: Szerintem nézeteid paradoxok!

PI: Ha „paradoxonon" „egy még nem általánosan elfogadott véleményt"[1] értesz, amely esetleg nem felel meg következetesen a beléd vésődött naiv gondolatoknak, akkor igen. Csak paradox gondolatokkal kell felváltanod naiv gondolataidat. Ez lehet az egyik módja a paradoxonok „feloldásának". De melyik konkrét nézetemre gondolsz?

SZIGMA: Emlékszel, egyes csillagpoliédereket Euler-féléknek találtunk, másokat viszont nem. Olyan bizonyítást kerestünk, amely elég mély ahhoz, hogy mind a közönséges, mind a csillagpoliéderek euleri jellegét megmagyarázza...

EPSZILON: Nekem van egy ilyen bizonyításom.*

SZIGMA: Tudom. De csak a vita kedvéért képzeljük el, hogy nincs ilyen bizonyítás, és ehelyett valaki az Euler-féle „közönséges" poliéderekre vonatkozó Cauchy-bizonyítás mellett egy ennek megfelelő, de egészen más bizonyítást ad az Euler-féle csillagpoliéderekre. Ebben az esetben a két különböző bizonyítás miatt azt javasolnád, Pi, hogy bontsuk két részre azt, amit korábban egy osztályba soroltunk? És két teljesen különböző dolgot egy elnevezéssel egyesítenél csupán azért, mert valaki néhány tulajdonságukra közös magyarázatot talál?

PI: Természetesen ezt tenném. Semmi esetre sem nevezném a bálnát halnak, a rádiót hangos doboznak (ahogy a primitív népek teszik), és nem idegesít, ha egy fizikus az üvegről mint folyadékról beszél. A haladás folyamán valóban *elméleti osztályozás,* azaz elméletből (bizonyításból, vagy ha úgy tetszik, magyarázatból) származó osztályozás váltja fel a *naiv osztályozást.* A sejtéseknek és a fogalmaknak

1 *T. Hobbes:* The Questions Concerning Liberty, Necessity and Chance. *In:* W. Molesworth (szerk.): The English Works of Thomas Hobbes. 5. k. London 1841. Bírálatok a püspök válaszáról. XXI.

* L.: 102. o. * lj.

át kell menni a bizonyítások és cáfolatok purgatóriumán. *A naiv sejtéseket és a naiv fogalmakat túlhaladják a bizonyítások és cáfolatok módszeréből kinövő helyesbített sejtések (tételek) és fogalmak (bizonyításból származó vagy elméleti fogalmak)*. És ahogy az elméleti gondolatok és fogalmak túlhaladják a naiv gondolatokat és fogalmakat, az elméleti nyelv túlhaladja a naiv nyelvet.[1]

1 Érdekes nyomon követni a poliéderek meglehetősen naiv osztályozásától a teljes elméleti osztályozáshoz vezető fokozatos változásokat. Az első nemcsak egyszerű poliéderekre kiterjedő naiv osztályozás Lhuilier-től ered, aki az *üregek*, *alagutak* és „*belső sokszögek*" száma szerint osztályozta a poliédereket. (L.: 121. o. 1. lj.)
a) Üregek. Euler első bizonyítása — és véletlenül magáé Lhuilier-é is (*S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 174—177. o.) — a *szilárd test* felbontásán alapult. Ezt úgy csinálták, hogy vagy egyenként levágták a sarkokat, vagy a test belsejében felvett pontból vagy pontokból kiindulva gúlákra bontották fel. Cauchy bizonyításának ötlete azonban— amelyről Lhuilier nem tudott — a poliedrikus *felület* felbontásán alapult. Amikor a poliedrikus felületek elmélete túlhaladta a poliedrikus szilárd testek elméletét, az üregek érdektelenné váltak: *egy* „üreges poliéderből" a poliéderek egész *osztálya* lett. Így régi, torzszülött-kizáró *2. definíció*nk (33. o.) bizonyításból származó, elméleti definícióvá vált, és az „üreg" taxonómiai fogalma eltűnt a fejlődés fősodrából.
b) Alagutak. Már Listing kimutatta, hogy e fogalom nem kielégítő. (L.: 121. o. 1. lj.) A fogalom felváltása nem abból eredt, hogy „explicitté tették" az alagút „homályos" fogalmát, ahogy azt Carnap követői várnák, hanem abból, hogy megpróbálták bizonyítani és cáfolni Lhuilier naiv sejtését az alagutas poliéderek Euler-karakterisztikájáról. Ennek során eltűnt az *n* alagúttal rendelkező poliéder fogalma, és a „többszörös összefüggés" bizonyításból származó fogalma került a helyére. Néhány munkában még megtaláljuk a naiv terminust az új, bizonyításból származó fogalom jelölésére: Hoppe az „alagutak" számát azoknak a vágásoknak a számával határozza meg, amelyek elvégzése után a poliéder még összefüggő marad (*R.Hoppe:* Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. Id. kiad. 102. o.). Ernst Steinitznél az alagút fogalmát már annyira átitatta az elmélet, hogy semmi „lényeges" különbséget nem tud felfedezni Lhuilier-nek az alagutak száma szerinti osztályozása és a többszörös összefüggőség szerinti osztályozás között. Ezért aztán „jórészt indokolatlannak" tekinti Listing kritikáját Lhuilier osztályozásával szemben. (*E. Steinitz:* Polyeder und Raumeinteilungen. Id. kiad. 22. o.)
c) „Belső sokszögek". Ezt a naiv fogalmat is hamar felváltotta először a gyűrű alakú, majd a többszörösen összefüggő lapok fogalma (vö. még: 145. o. 2. lj.) (*felváltotta* és nem „explicitté tette", mivel a „gyűrű alakú lap" semmiképpen sem a „belső

ÓMEGA: Végül a naiv, esetleges, pusztán névleges osztályozástól a végső, igaz, valódi osztályozáshoz, a tökéletes nyelvhez jutunk majd el![1]

c) Visszatérés a logikai és heurisztikus cáfolatokra

PI: Hadd vessek fel ismét néhány olyan kérdést, amely a deduktív találgatással kapcsolatban merült fel! Vegyük először a logikai és heurisztikus ellenpéldák problémáját, ahogy az Alfa és Théta vitájában felvetődött!

Szerintem sikerült kimutatnom, hogy még az úgynevezett „logikai" ellenpéldák is heurisztikusak. Az eredeti értelmezésben nem volt ellentmondás a között a két állítás között, hogy *a)* minden poliéder Euler-féle és *b)* a képkeret nem Euler-féle.

Ha eredeti nyelvezetünk hallgatólagos szemantikai szabályaihoz tartjuk magunkat, ellenpéldáink nem ellenpéldák. Csak az változtatja őket logikai ellenpéldákká, hogy fogalom-kitágítással megváltoztatjuk a nyelvi szabályokat.

GAMMA: Úgy érted, hogy *minden* érdekes cáfolat heurisztikus?

PI: Pontosan úgy. Nem lehet elválasztani egyrészt a cáfolatokat és bizonyításokat, másrészt a fogalmi, taxonómiai, nyelvi keret változá-

sokszög" explikálása). Amikor azonban egyrészt a felületek topológiai elmélete, másrészt a gráfelmélet túlhaladta a poliedrikus felületek elméletét, minden érdekességét elvesztette az a probléma, hogy miként befolyásolják a többszörösen összefüggő lapok a poliéder Euler-karakterisztikáját.
Az első naiv osztályozás három kulcsfogalmából tehát mindössze egy „maradt", az is alig felismerhető formában; az általánosított Euler-formula — mostanáig — így redukálódott: $c-é+l=2-2n$. (A további fejleményeket l.: 135. o. 1. lj.)

1 Ami a naiv osztályozást illeti, a nominalisták nem állnak messze az igazságtól, amikor azt állítják, hogy a poliéderekben az egyetlen közös dolog a nevük. De a bizonyítások és cáfolatok évszázadai után a poliéderek elméletének fejlődésével az elméleti osztályozás lép a naiv osztályozás helyébe, és az egyensúly a realisták javára billen. Az általános fogalmak problémáját annak fényében kellene felülvizsgálni, hogy a tudás fejlődésével a nyelvek is változnak.

sait. Ha ellenpéldával kerülünk szembe, általában két lehetőségünk van: vagy nem zavartatjuk magunkat, mivel *adott* L_1 nyelvünkben ez egyáltalán nem ellenpélda, vagy megállapodunk abban, hogy fogalom-kitágítással megváltoztatjuk nyelvünket, és az új, L_2 nyelvben elfogadjuk az ellenpéldát...

DZÉTA: ... és L_3-ban *megmagyarázzuk!*

PI: A hagyományos merev ésszerűség szerint az első alternatívát kellene választanunk. A tudomány azonban arra tanít, hogy a másodikat válasszuk.

GAMMA: Vagyis lehet, hogy két állításunk L_1-ben összeegyeztethető, de ha átkapcsolunk L_2-re, akkor ellentmondanak egymásnak. Az is lehet, hogy L_1-ben két állítás ellentmondó, de ha átkapcsolunk L_2-re, akkor összeegyeztethetők. A tudás fejlődésével változik a nyelv. „Minden alkotó korszak egyben a nyelv változásának korszaka is."[1] A tudás fejlődése nem modellálható egyetlen adott nyelvben.

PI: Helyes. A heurisztika a nyelv dinamikájával, míg a logika a statikus nyelvvel foglalkozik.

1 *L. Félix:* L'aspect moderne des mathématiques. 1957. 10. o. A logikai pozitivisták szerint a filozófia *kizárólagos* feladata olyan „formalizált" nyelvek alkotása, amelyben a tudomány mesterségesen befagyasztott állapotai fejeződnek ki (lásd Carnap-idézetünket; 14. o.). De ilyen kutatások aligha kezdődnek el addig, amíg a tudomány gyors fejlődése félre nem löki a régi „nyelvi rendszert". A tudomány arra tanít, hogy ne tiszteljünk semmiféle fogalmi-nyelvi keretet, nehogy fogalmi börtönné váljon. A nyelvanalitikusoknak hagyományos érdekük, hogy legalább lelassítsák ezt a folyamatot, s így igazolják nyelvi gyógymódjukat, azaz, hogy bebizonyítsák, rendkívül fontos visszacsatolást és értéket jelentenek a tudomány számára, nem satnyulnak „teljesen aszott, jelentéktelen házalókká" (*A. Einstein:* Levél P. A. Schilppnek. 1953. Közli *P. A. Schilpp:* The Abdication of Philosophy. *In:* „Kant Studien", 1959—60. 490—491. o.). A logikai pozitivizmus hasonló kritikáját adta Popper. (L.: *K. R. Popper:* The Logic of Scientific Discovery. London 1959. 128. o. *3. lj.)

d) Teoretikus és naiv fogalom-kitágítás.
Folytonos és kritikai fejlődés

GAMMA: Azt ígérted, visszatérsz arra a kérdésre, hogy a deduktív találgatás megadja-e a tudás fejlődésének folytonos sémáját vagy nem.

PI: Hadd vázoljak fel először néhányat a sok *történeti* forma közül, amelyet ez a *heurisztikus* séma felvehet.

Az *első fő séma* esetében a naiv fogalom-kitágítás messze maga mögött hagyja az elméletet, és ellenpéldák roppant káoszát szüli; naiv fogalmaink kitágulnak, de nem lépnek helyükbe elméleti fogalmak. Ebben az esetben a deduktív találgatás — apránként — kiegyenlítheti az ellenpéldák lemaradását. Ez, ha úgy tetszik, egy folytonos „általánosító" séma, de ne felejtsük el, hogy cáfolatokból indul ki, hogy folytonosságát a séma heurisztikus cáfolatainak fejlődő elméletéből adódó, egyenként elvégzett magyarázat biztosítja.

GAMMA: Vagy a „folytonos" fejlődés csak azt jelzi, hogy a cáfolatok mérföldekkel előbbre járnak!

PI: Ez igaz. De előfordulhat, hogy minden egyes cáfolatot vagy a naiv fogalmak minden egyes bővülését *közvetlenül* követi az elmélet (és az elméleti fogalmak) olyan bővülése, amely megmagyarázza az ellenpéldát; ilyenkor a „folytonosság" a fogalom-kitágító cáfolatok és az egyre hatékonyabb elméletek, a *naiv fogalom-kitágítás* és az értelmező *elméleti fogalom-kitágítás* izgalmas váltakozásának adja át helyét.

SZIGMA: Két járulékos történelmi variáció ugyanarra a heurisztikai témára!

PI: Hát voltaképpen nincs sok különbség köztük. Mindkettőnél *abban áll az elmélet ereje, hogy fejlődése során képes megmagyarázni a cáfolatokat.* De a deduktív találgatásnak van egy *második fő sémája...*

SZIGMA: Még egy járulékos variáció?

PI: Ha úgy tetszik, igen. Ebben a változatban azonban a fejlődő elmélet nemcsak *magyarázza*, hanem *szüli* is cáfolatait.

SZIGMA: Micsoda?

PI: Ebben az esetben az elmélet fejlődése megelőzi — sőt, ténylegesen felszámolja — a naiv fogalom-kitágítást. Például Cauchy tételéből indulunk ki úgy, hogy egyetlen ellenpélda sincs a láthatáron. Ezután ellenőrizzük a tételt, minden lehetséges módon átalakítva a poliédert: kettévágjuk, levágjuk a gúla alakú sarkokat, meghajlítjuk, eltorzítjuk, felfújjuk... Ezek közül az ellenőrzési ötletek közül néhány bizonyítási ötletre vezet[1] (eljutunk valami olyanhoz, amiről tudjuk, hogy igaz, majd visszafordulunk, azaz a papposzi analízis-szintézis sémát követjük), mások viszont, mint Dzéta „kettős ragasztási próbája", nem valami ismerthez vezetnek vissza, hanem valódi újdonsághoz, az ellenőrzött tétel heurisztikus cáfolatához — *nem egy naiv fogalom, hanem az elméleti keret bővítésével.* Az ilyenfajta cáfolat önmagát magyarázza...

Ióta: Milyen dialektikus! Miután az ellenőrzések bizonyítássá alakulnak át, az ellenpéldák — magyarázatuk tökéletes módszere révén — példákká válnak...

Pi: Miért dialektikus? Egy állítás ellenőrzése egy *másik*, mélyebb állítás bizonyításává, az első állítás ellenpéldái a második állítás példáivá válnak. Miért nevezzük dialektikának a zűrzavart? De hadd térjek vissza az én kérdésemre! Nem hiszem, hogy a deduktív találgatás második fő sémáját a tudás folytonos fejlődéseként lehetne értelmezni, ahogy Alfa tenné.

Alfa: Dehogynem lehet! Hasonlítsd össze a mi módszerünket Ómegának azzal az elgondolásával, hogy az egyik bizonyítási ötletet egy radikálisan különböző, mélyebb ötlettel váltja fel! Mindkét módszer növeli a tartalmat. Míg azonban módszerében Ómega a bizonyítás olyan műveleteit, amelyek egy szűk tartományban alkalmazhatók, olyan műveletekkel *váltja fel*, amelyek tágabb tartományban alkalmazhatók, vagy radikálisabban fogalmazva, az egész bizonyítást egy tágabb tartományban alkalmazható bizonyítással váltja fel, a deduktív találgatás az alkalmazhatóságát növelő műveletek hozzáadásával *kiterjeszti* az adott bizonyítást. Ez talán nem folytonosság?

1 Pólya különbséget tesz az „egyszerű" és a „szigorú" ellenőrzés között. A „szigorú" ellenőrzés eredménye esetleg „első jelzés egy bizonyításról" (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 34—40. o.).

Szigma: Igaza van! A tételből még tágabb tételek sorozatát vezetjük le! A speciális esetből egyre több általános esetet! Általánosítás dedukcióval![1]

Pi: De tele van ellenpéldákkal, ha egyszer felismerjük, hogy a tartalom *bármely* növelése, *bármely* mélyebb bizonyítás az előző, gyengébb tételek heurisztikus cáfolatait követi vagy váltja ki...

Alfa: Théta kiterjesztette az „ellenpélda" fogalmát a heurisztikus ellenpéldákra is. Te most olyan heurisztikus ellenpéldákra terjeszted ki, amelyek valójában sohasem léteznek. Az az állításod, hogy „második sémád" tele van ellenpéldákkal, azon alapul, hogy kiterjeszted az ellenpélda fogalmát a zéró élettartamú ellenpéldákra, amelyeknek a felfedezése egybeesik magyarázatukkal! De miért kellene minden intellektuális tevékenységnek, a tartalom növekedéséért egy egységes elméleti kereten belül vívott minden küzdelemnek „kritikainak" lennie? Dogmatikus „kritikai magatartásod" elködösíti a kérdést!

Tanár: A maga és Pi közti vita kétségtelenül ködös, hiszen a maga „folytonos fejlődése" és Pi „kritikai fejlődése" tökéletesen összefér. Engem jobban érdekelnek a deduktív találgatás vagy „folytonos kritika" *korlátai*, ha vannak egyáltalán.

e) A tartalom növekedésének korlátai. Teoretikus és naiv cáfolatok

Pi: Szerintem a „folytonos" fejlődés előbb vagy utóbb zsákutcába torkollik, eléri az elmélet *telítettségi határát.*

Gamma: De biztos, hogy valamelyik fogalmat mindig tágíthatom!

Pi: Természetesen. A *naiv* fogalom-kitágítás folytatódhat — de az *elméleti* fogalom-kitágításnak korlátai vannak. A naiv fogalom-kitágítással végzett cáfolatok csak gyenge ösztönzések arra, hogy el-

1 Az *informális* logikában egyáltalán nem okoz gondot az a „matematikában olyannyira megszokott, de a kezdő vagy magát haladónak tekintő filozófus számára mégis meglepő tény, hogy az általános eset logikailag ekvivalens lehet egy speciális esettel" (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 17. o.). Vö. még: *H. Poincaré:* La science et l'hypothèse. Id. kiad. 31—33. o.

jussunk az elméleti fogalom-kitágításhoz. Kétféle cáfolat van tehát. Az első fajtára véletlenül vagy szerencsével, vagy egy fogalom önkényes tágításával *bukkanunk rá.* Ezek csodaszerűek, „rendhagyó" viselkedésük megmagyarázhatatlan. Csak azért fogadjuk el őket *jóhiszemű* ellenpéldáknak, mert hozzászoktunk a fogalom-kitágító kritika elfogadásához. Ezeket *naiv* ellenpéldáknak vagy *bizarr ötleteknek* nevezem. Azután vannak az *elméleti ellenpéldák:* ezeket eredetileg bizonyítás-kitágítás hozza létre, vagy olyan bizarr ötletek, amelyeket kitágított bizonyításokkal kapunk, ezek magyarázzák, így emelkednek elméleti ellenpéldává. A bizarr ötleteket nagy gyanakvással kell szemlélni: nem lehetnek igazi ellenpéldák, hanem egy egészen más elmélet példái — ha nem egyértelműen hibák.

SZIGMA: De mit tegyünk, ha megakadunk? Amikor az eredeti bizonyítás tágításával nem tudjuk elméletivé alakítani naiv ellenpéldáinkat?

PI: Újra és újra megpróbálhatjuk, hogy elméletünkben nincs-e meg még mindig a fejlődés rejtett képessége. Néha azonban jó okunk van arra, hogy feladjuk a próbálkozásokat. Théta például helyesen mutatta ki, hogy ha deduktív találgatásunk egy csúcsból indul ki, nemigen várhatjuk tőle, hogy valaha is megmagyarázza a csúcs nélküli hengert.

ALFA: Vagyis a henger nem torzszülött, hanem egy bizarr ötlet volt!

THÉTA: De a bizarr ötleteket nem szabad lebecsülni! Ezek a *valódi* cáfolatok: nem illeszthetők be a folytonos „általánosítások" sémájába, és ténylegesen arra kényszeríthetnek, hogy forradalmasítsuk elméleti rendszerünket...[1]

1 Cayley és Listing komolyan vette a poliéderek elmélete alapfogalmainak kitágítását. Cayley az *él* fogalmát „egy csúcstól önmagához vagy egy másik csúcshoz vezető út"-ként határozta meg, de elképzelhetőnek tartotta, hogy az élek olyan csúcs nélküli zárt görbékké fajulnak, amelyeket „kontúroknak" nevezett (*A. Cayley:* On the Partitions of a Close. Id. kiad. 426. o.). Listing a „*vonalak*" terminust használta a két vagy egy csúcsú, vagy egyetlen csúccsal sem rendelkező élekre (*J. B. Listing:* Der Census räumlicher Complexe. Id. kiad. 104. o.). Mindketten észrevették, hogy teljesen új elméletre van szükség azoknak a „bizarr ötleteknek" a megmagyarázására, amelyeket liberális fogalmi keretükkel honosítottak meg. Cayley „*A zártság felosztásának elméleté*"-t, Listing, a modern topológia egyik nagy úttörője, „*A térbeli komplexumok összeírásá*"-t találta fel.

ÓMEGA: Jó! Lehet, hogy az ember eljut a deduktív találgatás egy *partikuláris* sorozatának *relatív telítettségi határáig* — de ekkor egy forradalmian új, mélyebb bizonyítási ötlete támad, amelynek nagyobb magyarázó ereje van. Végül mégis eljutunk egy *végső* bizonyításhoz, amelynek nincs korlátja, telítettségi határa, és amely bizarr ötletekkel sem cáfolható!

PI: Micsoda? Egyetlen egységes elmélet a világegyetem *valamennyi* jelenségének magyarázatára? Soha! Előbb-utóbb eljutunk egy *abszolút telítettségi határ*szerű valamihez.

GAMMA: Én voltaképpen nem törődöm vele, hogy igen vagy nem. Ha egy ellenpéldát a bizonyítás olcsó, *triviális* kitágításával meg lehet magyarázni, ezt az ellenpéldát én máris bizarr ötletnek tekintem. Megismétlem: semmi értelmét sem látom annak, hogy a „poliédert" úgy általánosítsuk, hogy magába foglalja az üreges poliédert; ez nem egy poliéder, hanem poliéderek egy osztálya. Én a „többszörösen összefüggő lapokat" is elfelejteném: miért ne húzzuk meg a hiányzó átlókat? Ami pedig az ikertetraédereket befogadó általánosítást illeti, a puskám után nyúlnék: ez csak arra szolgál, hogy bonyolult, nagyképű formulákat alkossunk fölöslegesen.

RHÓ: Végre újra felfedezted az én módszeremet, a torzszülöttek kiigazítását![1] Ez a módszer megszabadít a sekélyes általánosítástól. Ómegának nem lett volna szabad „mélységnek" nevezni a tartalmat; *a tartalom növekedése nem mindig jár a mélység növekedésével.* Gondoljatok csak a (6) és a (7) formulára![2]

1 L.: 55—59. o. és 65—67. o.

2 Igen sok matematikus képtelen megkülönböztetni a triviálist a nem triviálistól. Különösen kínos ez akkor, amikor a relevancia iránti érzék hiánya azzal az illúzióval párosul, hogy az ember képes olyan *egészen tökéletes* formulát konstruálni, amely felölel minden elképzelhető esetet. (Vö.: 122. o. 1. lj.) Az ilyen matematikusok esetleg évekig dolgoznak egy formula „végső" általánosításán, és végül csak néhány triviális helyesbítéssel bővítik ki. Becker, a kiváló matematikus, szórakoztató példáját adja ennek: sokéves munka után létrehozta a $c-é+l=4-2n+q$ formulát, ahol n az ahhoz szükséges vágások számát jelenti, hogy a poliedrikus felületet olyan egyszeresen összefüggő felületekre osszuk fel, amelyek esetében

ALFA: Vagyis te megállnál az (5) formulámnál?
GAMMA: Igen. A (6) és (7) nem fejlődés, hanem elfajulás. Ahelyett, hogy a (6) és (7) formulával folytatnám a levezetést, én inkább valami *izgalmas* új ellenpéldát keresnék, és azt próbálnám megmagyarázni![1]
ALFA: Végül is, igazad lehet. De ki dönti el, *hol* kell megállni? A mélység csak ízlés dolga.
GAMMA: Miért nincsenek matematikai kritikusok, ahogy vannak irodalmi kritikusok, hogy nyilvános kritikával fejlesszék a matematikai

$c-é+l=1$; q pedig azoknak az átlóknak a száma, amelyeket meg kell húzni ahhoz, hogy az összes lapot egyszeresen összefüggővé redukáljuk. (*J. C. Becker:* Über Polyeder. Id. kiad. 72. o.) Becker nagyon büszke volt eredményére, amely — szerinte — „teljesen új megvilágításba" helyezett, sőt, „lezárt" „egy olyan témát, amely iránt (előtte) olyan emberek érdeklődtek, mint Descartes, Euler, Cauchy, Gergonne, Legendre, Grunert és von Staudt" (uo. 65. o.). De három név kimaradt olvasmányai közül: Lhuilier, Jordan és Listing. Amikor felhívták a figyelmét Lhuilier-re, néhány szomorú sort tett közzé, amelyben elismerte, hogy ezt Lhuilier már ötven évvel korábban tudta. Ami Jordant illeti, őt nem érdekelték a gyűrű alakú lapok, de történetesen érdekelni kezdték a korlátos nyitott poliéderek; ezért szerepel képletében az m, a határoló vonalak száma, az n mellett (*C. Jordan.:* Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non Eulériens. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1866. 86. o.). Így Becker egy új cikkében összekapcsolta Lhuilier és Jordan képletét: $c-é+l=2-2n+q+m$ (*J. C. Becker:* Nachtrag zu dem Aufsätze über Polyeder. *In:* „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 1869. 343. o.). De zavarában túlságosan elsiette a dolgot, és nem emésztette meg eléggé Listing hosszú dolgozatát. Így hát szomorúan azzal zárta cikkét, hogy „Listing általánosítása még átfogóbb". Mellesleg, később megpróbálta a formulát a csillagpoliéderekre is kiterjeszteni. (*J. C. Becker:* Neuer Beweis und Erweiterung eines Fundamentalsatzes über Polyederflächen. Id. kiad.; vö.: 56. o. 3. lj.)

1 Lehetnek emberek, akiknek nyárspolgári elképzeléseik vannak a *cáfolatok csökkenő hozadéka törvényének* érvényesüléséről. Gamma biztosan nem tartozik közéjük. Most nem térünk ki az *egyoldalú* poliéderekre (*A. F. Möbius:* Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. Id. kiad.) vagy az *n-dimenziós* poliéderekre (*L. Schläfli:* Theorie der vielfachen Kontinuität. Id. kiad.). Ezek megerősítenék Gamma reményét, hogy teljesen váratlan fogalom-kitágító cáfolatok egy egész elméletnek új — esetleg forradalmi — lökést adhatnak.

közízlést? Még a nagyképű trivialitások áradatának is ellenállhatnánk a matematikai irodalomban.[1]
SZIGMA: Ha megállunk az (5) formulánál, és a poliéderek elméletét háromszögekre osztott gömbök elméletévé alakítjuk át, hogyan tudunk szükség esetén megbirkózni a (6) és (7) formulával magyarázott triviális rendellenességekkel?
MÜ: Gyerekjáték!
THÉTA: Jól van. Akkor pillanatnyilag álljunk meg az (5) formulánál! *De megállhatunk-e?* A fogalom-kitágítás esetleg megcáfolja az (5) formulát! Megtehetjük, hogy nem veszünk tudomást egy fogalom kitágításáról, ha csak olyan ellenpéldát eredményez, amely tételünk tartalmának szegényességére utal. De mit tegyünk, ha a fogalom-kitágítás olyan ellenpéldát eredményez, amely egyszerűen azt mutatja, hogy a tétel hamis? Egy bizarr ötlet magyarázata kedvéért eltekinthetünk a tartalmat növelő *4. szabály* és *5. szabály* alkalmazásától, de a tartalmat megőrző *2. szabályt* alkalmaznunk kell, hogy kivédjük a bizarr ötletből eredő cáfolatokat.
GAMMA: Erről van szó! Elejthetjük az olcsó „*általánosításokat*", de aligha vethetjük el az „olcsó" *cáfolatokat.*
SZIGMA: Miért nem építünk fel egy torzszülött-kizáró definíciót a

1 Pólya kifejti, hogy a sekélyes, olcsó általánosítás „manapság divatosabb, mint azelőtt. Az efféle általánosítás egy aprócska gondolatot hatalmas terminológiával hígít fel. A szerzők általában még ezt a gondolatocskát is szívesebben veszik át valakitől, tartózkodnak attól, hogy bármiféle eredeti megjegyzést fűzzenek hozzá, és gondosan kerülik, hogy bármilyen problémát megoldjanak, eltekintve attól a néhány problémától, amely saját terminológiájuk nehézségeiből fakad. Nagyon könnyű lenne példákat hozni, de nem akarom magamra haragítani az embereket." (*G. Pólya:* Mathematics and Plausible Reasoning. Id. kiad. I. k. 30. o.) Századunk egy másik nagy matematikusa, Neumann János, szintén figyelmeztetett az „elfajulás veszélyére", de szerinte ez a veszély nem lenne olyan nagy, ha ez „a tudományág kivételesen fejlett ízlésű emberek befolyása alatt állna" (*Neumann János:* A matematikus. Válogatott előadások és tanulmányok. Bp. 1965. 27. o.). Az ember persze nem biztos abban, hogy a „publikálj vagy pusztulj" jelszó korában a „kivételesen fejlett ízlésű emberek befolyása" elég lesz a matematika megmentéséhez.

poliéderre úgy, hogy minden egyes bizarr ötletnek megfelelően egy új kikötéssel egészítjük ki a definíciót?

THÉTA: Mindkét esetben visszatér régi lidércnyomásunk, a rossz végtelen.

ALFA: Amíg tartalmat növelünk, gondolatokat fogalmazunk meg, matematikával foglalkozunk, amikor ezután fogalmakat tisztázunk, nyelvészettel foglalkozunk. Miért nem hagyjuk abba az egészet akkor, amikor abbahagyjuk a tartalom növelését? Miért esünk bele a rossz végtelen csapdájába?

MÜ: Elég volt a matematika és a nyelvészet vitájából! A tudás soha nem profitál ezekből a disputákból.

GAMMA: A „sohából" hamar „hamar" lesz. Alig várom, hogy ismét visszatérjünk régi vitánkra.

MÜ: De egyszer már holtvágányra jutottunk! Vagy tud még valaki újat mondani?

KAPPA: Azt hiszem, én igen.

9. Hogyan alakíthatja át a kritika a matematikai igazságot logikai igazsággá?

a) A korlátlan fogalom-kitágítás megsemmisíti a jelentést és az igazságot

KAPPA: Alfa egyszer már mondta, hogy „régi módszerünk" rossz végtelent eredményez.[1] Gamma és Lambda válasza erre annak reménye volt, hogy egyszer talán kimerül a cáfolatok áradata;[2] most azonban, megértvén az eredményes cáfolat mechanizmusát — a fogalom-kitágítást —, tudjuk, hogy ez hiú ábránd. Bármely állítás megfogalmazásá-

1 L.: 85—86. o.
2 L.: 86—87. o.

ban szereplő terminusoknak mindig van egy eléggé szűk értelmezése ahhoz, hogy az állítás igaz legyen és egy eléggé tág értelmezése ahhoz, hogy hamis legyen. Hogy melyik értelmezést akarjuk alkalmazni és melyiket nem, természetesen szándékainktól függ. Az első értelmezést *dogmatikus, megerősítő* vagy *igazoló*, a másodikat *szkeptikus, kritikai* vagy *cáfoló értelmezésnek* nevezhetjük. Az első értelmezést Alfa konvencionalista cselnek nevezte[1] — most látjuk, hogy a második is az. Valamennyien kigúnyoltátok a naiv sejtés dogmatikus értelmezését Deltánál,[2] majd a tétel dogmatikus értelmezését Alfánál.[3] De a fogalom-kitágítás *bármely* állítást megcáfol, és semmiféle igaz állítást nem hagy meg.

GAMMA: Várj! Igaz, kitágítottuk a „poliéder" fogalmát — azután darabokra téptük és eldobtuk; ahogy Pi mondta, a „poliéder" naiv fogalma a tételben már nem szerepel.

KAPPA: De akkor elkezdjük tágítani a tétel egyik kifejezését, egy elméleti terminust, nem? Te magad az „egyszeresen összefüggő lap" fogalmát tágítottad ki, hogy beleférjen a kör is, meg a henger palástja is.[4] Céloztál rá: intellektuális tisztesség kérdése, hogy az ember ne térjen ki a támadások elől, hogy elnyerje a cáfolhatóság tiszteletreméltó státusát, azaz tegye lehetővé a cáfoló értelmezést. De a fogalomkitágítás miatt a cáfolhatóság cáfolatot jelent. Így egy véget nem érő lejtőre kerülsz, *minden egyes* tételt megcáfolva és felváltva egy „szigorúbb" tétellel, olyannal, amelynek a hamissága még nem „derült ki"! *De sohasem szabadulsz a hamisságtól.*

SZIGMA: Mi van akkor, ha egy ponton megállunk, elfogadjuk az igazoló értelmezéseket, s nem tágítunk sem az igazságtól, sem attól a sajátos nyelvi formától, amelyben ezt az igazságot megfogalmaztuk?

KAPPA: Akkor torzszülött-kizáró definíciókkal kell kivédeni a fogalom-kitágító ellenpéldákat. Így egy másik végtelen lejtőre kerülsz:

1 Alfa valójában nem kifejezetten ezt a popperi terminust használta. (L.: 43. o.)
2 L.: 4. szakasz *b)* pont.
3 L.: 5. szakasz.
4 L.: 71—77. o.

kénytelen leszel elismerni igaz tételed minden egyes „sajátos nyelvi formájáról", hogy nem elég pontos, és kénytelen leszel egyre „szigorúbb" definíciókat beépíteni a tételbe, e definíciókat pedig olyan terminusokkal fogalmazod meg, amelyeknek a bizonytalansága még nem derült ki! De sohasem szabadulsz a bizonytalanságtól.*

THÉTA *(félre)*: Mi baj van azzal a heurisztikával, ahol bizonytalanság a fejlődés ára?

ALFA: Már megmondtam: pontos fogalmak és rendíthetetlen igazságok nem a nyelvben, hanem csak a gondolkodásban vannak!

GAMMA: Hadd vonjam kétségbe okfejtésedet, Kappa. Vegyük a tételt abban a formában, ahogy azután hangzott, hogy figyelembe vettük a hengert is: „Minden egyszerű, egyszeresen összefüggő lapokkal rendelkező tárgy esetében, ahol a lapok élei csúcsokban végződnek, $c-é+l=2$." *Ezt* hogy cáfolnád meg a fogalom-kitágítás módszerével?

KAPPA: Először visszatérek a definiáló terminusokhoz és teljesen kifejtem az állítást. Azután eldöntöm, melyik fogalmat tágítom ki. Az „egyszerű" például ahelyett áll, hogy „egy lap eltávolítása után kiteríthető egy síkban". Kitágítom a „kiterítést". Vegyük a már tárgyalt ikertetraéder-párt, azt, amelyiknek egy közös *éle* van (6(*a*) ábra). Ez a test egyszerű, lapjai egyszeresen összefüggők, mégis $c-é+l=3$. Tételünk tehát hamis.

GAMMA: De ez az ikertetraéder *nem* egyszerű!

KAPPA: Dehogyisnem! Bármely lapjának eltávolítása után kiteríthető egy síkban. Csak arra kell vigyázni, hogy a kritikus élhez érve el ne tépjek valamit, amikor az él mentén felnyitom a második tetraédert.

GAMMA: De ez nem kiterítés! Az élt két élre *téped* — vagy *hasítod* —

* *A szerkesztők megjegyzése:* Kappa állítása, hogy a bizonytalanság elkerülhetetlen, helytálló (*bizonyos* terminusok szükségképpen primitívek). Abban azonban téved, hogy ez azt jelenti, hogy „fogalom-kitágítással" mindig lehet ellenpéldákat produkálni. A definícióból következően: egy bizonyítás érvényes, ha benne — *akárhogy értelmezzük is a deskriptív terminusokat* — sohasem adódnak ellenpéldák, azaz az érvényesség nem függ a despkriptív terminusok jelentésétől, amelyek ezért tetszés szerint tágíthatók. Ezt maga Lakatos is kimutatja a későbbiek során. L.: 153—154. o., valamint (világosabban) II. fejezet, 181. o.

szét! Biztos, hogy nem képezhetsz le egy pontot két pontra: *a kiterítés folytonos, egy-egyértelmű leképezés, amelynek az inverze is folytonos!*

KAPPA: *7. definíció?* Attól tartok, az *én* józan észjárásomtól idegen a „kiterítésnek" ez a szűk, dogmatikus értelmezése. Például igen jól el tudom képzelni, hogy egy négyzet (24(*a*) ábra) a határvonalak kitágításával két egymásba illeszkedő négyzetté tágítható (24(*b*) ábra). Tépésnek vagy hasításnak neveznéd ezt csak azért, mert nem „folytonos,

(a) 24. ábra *(b)*

egy-egyértelmű leképezés, amelynek az inverze is folytonos"? Mellesleg, nem értem, miért nem *c*-t, *é*-t és *l*-et változatlanul hagyó transzformációként határoztad meg a kiterítést, hiszen ezzel le is zártad volna a kérdést.

GAMMA: Jól van, megint te nyertél. Vagy el kell fogadnom a „kiterítés" általad adott cáfoló értelmezését, és kibővítem a bizonyításomat, vagy mélyebb bizonyítást találok, vagy beépítek egy lemmát — vagy egy újabb torzszülött-kizáró definíciót kell bevezetnem. Viszont — bármelyiket választom is e lehetőségek közül — definiáló terminusaimat egyre világosabbá teszem. Miért ne juthatnék el egy pontig, ahol a terminusok jelentése olyan kristálytiszta, hogy csak egyféle értelmezés lehetséges, mint $2+2=4$ esetében? E terminusok jelentésében nincs semmi változékonyság, ennek az állításnak az igazságát semmi sem cáfolhatja, ez az igazság örökké ragyog az ész természetes fényében.

KAPPA: Halvány fény!

GAMMA: Tágítsd ki, ha tudod!

KAPPA: Hiszen ez gyerekjáték! Bizonyos esetekben kettő meg kettő az öt. Tegyük fel, hogy két, külön-külön egyaránt két font súlyú árucikket rendelünk. Ha a két cikket egy dobozban szállítják, s a doboz súlya egy font, akkor ebben a csomagban két font meg két font az öt font!

GAMMA: De úgy lesz öt font, hogy *három* súlyt adsz össze: 2-t, 2-t és 1-et!

KAPPA: Igaz, a „2 meg 2 az 5" művelet az eredeti értelemben nem összeadás. De az összeadás jelentésének egyszerű kitágításával érvényessé tehetjük az eredményt. A naiv összeadás a csomagolás egészen különleges esete, ahol a csomagolóanyag súlya zéró. Ezt a lemmát feltételként be kell építenünk a sejtésbe, s helyesbített sejtésünk a következő lesz: „»súlytalan« összeadásnál 2+2=4".[1] Az algebra egész története ilyen fogalom- és bizonyítás-kitágításokból áll.

GAMMA: Azt hiszem, kissé túlzásba viszed a „kitágítást". Legközelebb a „meg"-et „-szor"-nak értelmezed, és cáfolatnak tekinted! Vagy a „minden poliéder poliéder" állításban a „minden"-t „semelyik"-ként értelmezed! Te kitágítod a fogalom-kitágítás fogalmát! El kell határolni a *racionális kitágításból* adódó cáfolatot az *irracionális kitágításból* adódó „cáfolattól". Nem engedhetjük, hogy tetszésed szerint kitágíts bármely terminust.

Kristálytiszta terminusokkal kell rögzítenünk az ellenpélda fogalmát!

DELTA: Még Gamma is torzszülött-kizáróvá válik: most a fogalom-kitágító cáfolat torzszülött-kizáró definícióját követeli. *Végül is, a racionalitás a változatlan, egzakt fogalmaktól függ!*[2]

KAPPA: *De ilyen fogalmak nem léteznek! Miért nem fogadjuk el, hogy nullával egyenlő az a képességünk, hogy pontosan megfogalmazzuk azt, amire gondolunk, tehát az a képességünk is nullával egyenlő, hogy bebizonyítsunk valamit?* Ha azt akarjátok, hogy a matematikának jelentése, tartalma legyen, le kell mondanotok a bizonyosságról. Ha bi-

1 Vö.: *L. Félix:* L'aspect moderne des mathématiques. Id. kiad. 9. o.

2 Gammának az az igénye, hogy az „ellenpéldát" kristálytisztán definiáljuk, azt jelenti, hogy a racionális vita feltételeként kristálytiszta, változatlan fogalmakat követel a metanyelvben.

zonyosságot akartok, meg kell szabadulni a jelentéstől. A kettő együtt nem megy. *Az üres fecsegés cáfolhatatlan, a tartalmas állítások fogalom-kitágítással megcáfolhatók.*

GAMMA: Akkor az utóbbi kijelentéseid is megcáfolhatók, s ezt te is tudod. „A szkeptikusok nem olyan emberek, akik meg vannak győződve arról, amit mondanak; a szkeptikusok a hazudozók egyik szektáját alkotják."[1]

KAPPA: Szitkozódás — az értelem utolsó menedéke!

b) A mérsékelt fogalom-kitágítás a matematikai igazságot logikai igazsággá alakíthatja át

THÉTA: Szerintem Gammának igaza van abban, hogy el kell határolni a racionális és az irracionális fogalom-kitágítást. A fogalom-kitágítás ugyanis hosszú utat tett meg: jámbor, racionális tevékenységből radikális, irracionális tevékenységgé változott.

Eredetileg a kritika kizárólag *egyetlen partikuláris* fogalom *enyhe* kitágítására irányul. *Enyhének* kell lennie, hogy ne vegyük észre; ha valódi — kitágító — jellegére rájönnénk, talán nem is fogadnánk el jogos kritikának. *Egyetlen partikuláris* fogalomra irányul, mint meglehetősen egyszerű állításaink esetében, például: *„Minden A — B"*. A kritika célja ilyenkor az, hogy találjunk egy enyhén kitágított *A*-t (esetünkben *poliédert*), amely nem *B* (esetünkben *Euler-féle*).

Kappa azonban ezt két irányban is kiélezte. Egyrészt, a megtámadott állításnak *egynél több* összetevőjét vetette fogalom-kitágító kritika alá. Másrészt, a fogalom-kitágítást rejtett és meglehetősen igénytelen tevékenységből a fogalom *nyílt eltorzításává* változtatta, például a „minden"-t „semelyik"-ké torzította. Itt cáfolatnak fogadja el a megtámadott terminusok minden olyan értelmes fordítását, amely hamissá teszi a tételt. Én azt mondanám, hogy *ha egy állítás a, b, ... összetevőket illetően nem cáfolható, akkor az állítás ezekre az összetevőkre vonat-*

1 *A. Arnauld—P. Nicole:* La logique, ou l'art de penser. Lille 1964. XX—XXI. o.

kozóan logikailag igaz.[1] Egy ilyen állítás hosszú, kritikai-elméleti folyamat végeredménye; e folyamat során egyes terminusok jelentéstartalma teljesen áthelyeződik a tétel megmaradó terminusaira és formájára.

Kappa mindössze annyit mond, hogy nincsenek olyan állítások, amelyek *minden* összetevőjükre vonatkozóan logikailag igazak. De létezhetnek olyan állítások, amelyek *egyes* összetevőket illetően logikailag igazak; a cáfolatok áradata tehát csak akkor indítható el ismét, ha új kitágítható összetevőkkel bővítjük az állítást. Ha ezt a végletekig visszük, akkor irracionalizmusba fulladunk — de nem kell ilyen messzire mennünk. Hol húzzuk meg a határvonalat? Joggal megtehetjük, hogy a fogalom-kitágítást csak az összetevőknek arra a kitüntetett részhalmazára engedjük meg, amely a kritika elsődleges céljává vált. A logikai igazság nem függ ezeknek az összetevőknek a jelentésétől.

SZIGMA: Végül tehát elfogadtuk Kappa álláspontját: az igazságot legalább bizonyos terminusok jelentésétől függetlenné tettük!

THÉTA: Így van. De ha le akarjuk győzni Kappa szkepticizmusát, és el akarjuk kerülni az ő rossz végtelenjét, akkor feltétlenül abba kell hagynunk a fogalom-kitágítást azon a ponton, ahol már nem a fejlődés eszköze többé, hanem a rombolás eszközévé válik; valószínűleg azt kell megállapítanunk, hogy melyek azok a terminusok, amelyeknek a jelentése csak az ésszerűség alapelveinek lerombolása árán tágítható.[2]

KAPPA: Kitágíthatjuk a kritikus ésszerűséget hirdető elméletedben

1 Ez a logikai igazság Bolzano-féle meghatározásának kissé parafrazált változata. (*B. Bolzano:* Wissenschaftslehre. Lipcse 1914—31. 147. §.) Különösen azért rejtély, hogy Bolzano miért vetette fel ezt a definíciót az 1830-as években, mert munkássága előrevetíti a XIX. századi matematikai filozófia egyik legnagyobb újítását, a modell fogalmát.

2 A XIX. századi matematikai kritika egyre több fogalmat tágított ki, és egyre több terminus jelentéstartalmát helyezte át az állítások *logikai formájára* és a néhány (még) ki nem tágított terminus jelentésére. Az 1930-as években úgy látszott, hogy lelassul ez a folyamat, állandósul a nem tágítható („logikai") és a tágítható („deskriptív") terminusok közti választóvonal. Széles körben elfogadottá vált egy kis számú logikai terminust tartalmazó lista, s így lehetővé vált a logikai igazság általános meghatározása; a logikai igazság ettől kezdve nem „függött" az összetevők *ad hoc* felsorolásától. (Vö.: *A. Tarski:* On the Concept of Logical Consequence. *In:*

szereplő fogalmakat? Vagy ez kétségbevonhatatlanul igaz, definiálást nem tágíthatóan egzakt terminusokkal kifejezett lesz? A kritikáról szóló elméleted véget ér az „elkötelezettségbe való visszavonulással"; minden kritizálható, kivéve a te kritika-elméletedet, „metateóriádat"?[1]

ÓMEGA *(Epszilonhoz):* Nem tetszik nekem ez az eltolódás az igazságról az ésszerűségre. *Kinek* az ésszerűsége? Konvencionalista beszivárgást érzek.

BÉTA: Miről beszélsz? Én értem Théta „enyhe sémáját" a fogalomkitágításra. Azt is értem, hogy a fogalom-kitágítás egynél több terminust is támadhat: láttuk, hogy tágította ki Kappa a „kiterítés"-t, vagy Gamma a „mindent"-t...

SZIGMA: Mindenesetre, Gamma az „egyszeresen összefüggő" fogalmát tágította ki.

BÉTA: Dehogyis. Az „egyszeresen összefüggő" csupán rövidítés — Gamma csak a definiáló terminusok között előforduló „minden" terminust tágította ki.[2]

J. H. Woodger (szerk.): Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford 1956. 409—420. o.) Tarskit azonban zavarta ez az elhatárolás, és arra gondolt, hogy tulajdonképpen visszatérhetne az ellenpélda — következésképpen a logikai igazság — relativizált fogalmához (uo. 420. o.); egyébként Bolzano is ezt tette, de erről Tarski nem tudott. Ezen az irányzaton belül Popper érte el a legérdekesebb eredményt. (*K. R. Popper:* Logic without Assumptions. *In:* „Aristotelian Society Proceedings", 1947. 251—292. o.) Az ember tehát nem mondhat le mindig újabb logikai állandókról a racionális okfejtés némelyik alapelvének feladása nélkül.

1 „Visszavonulás az elkötelezettségbe" — ez Bartley kifejezése. (*W. W. Bartley:* Retreat to Commitment. New York 1962.) Bartley azt vizsgálja, hogy lehetséges-e a kritikus racionalizmus racionális védelme, különösen a *vallásos* tudatot illetően — a problematika sémája azonban nagyon hasonló a *matematikai* ismeretekre vonatkozóan is.

2 L.: 71—77. o. Gamma voltaképpen a „minden" szóból akart eltávolítani némi jelentéstartalmat. Azt akarta, hogy a továbbiakban ne csak a nem üres osztályokra lehessen alkalmazni. A „minden" enyhe tágítása fontos esemény volt, jelentéséből eltűnt az „egzisztenciális import", és ezáltal az üres halmaz torzszülöttből közönséges, *nyárspolgári* halmazzá változott. Ez nemcsak az arisztotelészi logika Boole-féle halmazelméleti átértelmezéséből következett, hanem az üres kielégítés fogalmának a matematikai okfejtésben való megjelenéséből is.

THÉTA: Térjünk vissza a kérdésre! A „nyílt", radikális fogalom-kitágítás aggaszt?

BÉTA: Igen. Ezt a legutolsó változatot senki sem fogadná el igazi cáfolatnak! Teljesen megértem, hogy a heurisztikus kritika enyhe fogalom-kitágító tendenciája, amit Pi tárt fel, a matematika fejlődésének egyik legfontosabb eszköze. De a matematikusok sohasem fogják elfogadni a cáfolatnak ezt a legutolsó, vad formáját!

TANÁR: Téved, Béta. Már el is fogadták, és ez fordulópontot jelentett a matematika történetében. *A matematikai kritikának ez a forradalma megváltoztatta a matematikai igazság fogalmát, a matematikai bizonyítás előírásait és a matematika fejlődésének modelljeit!*[1] De egyelőre fejezzük be a vitát, ezt az új szakaszt majd máskor beszéljük meg!

SZIGMA: De hiszen semmit sem zártunk le. *Most* nem hagyhatjuk abba!

TANÁR: Megértem magát. Ennek a legutolsó szakasznak fontos visszacsatolása lesz vitánkra.[2] De a tudományos kutatás „problémákkal kezdődik és problémákkal ér véget".[3] *(Elhagyja a tantermet.)*

BÉTA: De az elején nekem egyáltalán nem voltak problémáim! Most pedig *csak* problémáim vannak!

1 A kritika, ellenpélda, következtetés, igazság és bizonyítás fogalma elválaszthatatlan egymástól; ezek változásakor *először a kritika fogalma változik meg*, s a többi fogalom változása ezt követi.
2 Vö.: *I. Lakatos:* Infinite Regress and the Foundations of Mathematics. Id. kiad.
3 *K. R. Popper:* Science: Problems, Aims, Responsibilities. *In:* „Federation of American Societies for Experimental Biology: Federation Proceedings", 1963. 968. o.

A szerkesztők bevezetése

A korábbiakban szó esett a Descartes–Euler-sejtés Poincaré-féle bizonyításáról.* Lakatos már doktori disszertációjában, a matematika „euklideszi" megközelítése mellett és ellen szóló érvek tárgyalása során bevezette e bizonyítás részletes vizsgálatát. Ennek egyes részeit beépítette az első fejezetbe,** másokat *Infinite Regress and the Foundations of Mathematics* (Végtelen regresszió és a matematika alapjai) című munkájában közölte. Ezért itt elhagyjuk ezt a bevezető elemzést.

Epszilon a szószólója az euklideszi programnak, annak a törekvésnek, hogy a matematikát tökéletesen világos terminusokban megfogalmazott, vitathatatlanul igaz axiómákkal lássák el. Epszilon filozófiáját is kétségbe vonják, de a tanár szerint a vita legkézenfekvőbb és legcélravezetőbb módja felkérni Epszilont, hogy a Descartes–Euler-sejtést az euklideszi követelményeknek megfelelően bizonyítsa. Epszilon elfogadja a kihívást.

* L.: 102. o. és 136. o.
** L.: 82–90. o.

1. A sejtés lefordítása a vektoralgebra „tökéletesen ismert" terminusaira. A fordítás problémája

EPSZILON: Elfogadom a kihívást. Be fogom bizonyítani, hogy minden egyszeresen összefüggő, egyszeresen összefüggő lapokkal rendelkező poliéder Euler-féle.

TANÁR: Igen, ezt a tételt én fejtettem ki egy korábbi órán.[1]

EPSZILON: Ahogy jeleztem már, először meg kell találnom az igazságot, hogy bebizonyíthassam. Nos, egyáltalán nem ellenzem a „bizonyítások és cáfolatok" módszerét, mint az igazság feltárásának egyik módszerét, azonban én ott kezdem, ahol ön abbahagyta. Ott kezdem el a bizonyítást, ahol abbahagyja a helyesbítést.[2]

ALFA: De ez a hosszú tétel tele van tágítható fogalmakkal. Nem hiszem, hogy nehéz lesz megcáfolnunk.

EPSZILON: Képtelenek lesztek megcáfolni. Minden egyes terminus jelentését rögzíteni fogom.

TANÁR: Folytassa!

EPSZILON: Először csak a lehető legvilágosabb fogalmakat használom. Lehet, hogy egyszer majd képesek leszünk annyira gyarapítani tökéletes ismereteinket, hogy kiterjedjenek a fényképezőgépekre, a papírra és az ollóra, a gumilabdákra és a pumpákra is, de jobb, ha *most* elfelejtjük ezeket. A *véglegesség* mindenesetre elérhetetlen ilyen eltérő eszközök alkalmazásával. Véleményem szerint korábbi kudarcaink abban gyökereznek, hogy a poliéderek egyszerű, nyilvánvaló természetétől idegen módszereket használtunk. A mindezeket az eszközöket mozgósító dús képzelet teljesen tévútra vezetett. A poliéderek lényegére nem jellemző, külsőleges, idegen, esetleges tényezőkre hivatkozott,

1 L.: 62. o.

2 Valószínűleg Epszilon Eukleidész első olyan követője, aki méltányolja a bizonyítási eljárás heurisztikus értékét. Az Eukleidész-követők a XVII. századig az analízis platóni módszerét fogadták el a heurisztika módszerének, később pedig a szerencse és/vagy a zseni hirtelen felvillanásával cserélték ezt fel.

s így nem csoda, hogy bizonyos polidérekkel kudarcot vall. A tökéletes bizonyításhoz korlátozni kell a felhasznált eszközök körét.[1] Erre azért van szükség, mert a túlburjánzó képzelet túlságosan megnehezíti a *bizonyosság* elérését. Nehéz garantálni azoknak a lemmáknak az igazságát, amelyek a gumi, a lencsék stb. tulajdonságaitól függnek. Le kell mondani az ollóról, a pumpáról, a fényképezőgépről és az efféle eszközökről, mert „ha egy problémát tökéletesen megértünk, akkor meg kell szabadítani minden felesleges fogalomtól, vissza kell vezetni a legegyszerűbb kérdésformára".[2] Én tételemet[3] és bizonyításomat mindezektől megtisztítom, s a legegyszerűbb és legkönnyebb dolgokra korlátozom,[4] nevezetesen, a csúcsokra, az élekre és a lapokra. *Ezeket* a terminusokat nem definiálom, mivel nem lehet nézeteltérés jelentésüket illetően. Mindazokat a terminusokat, amelyek a legcsekélyebb mértékben is homályosak, tökéletesen ismert, „primitív" terminusokkal fogom definiálni.[5]

Mármost világos, hogy az eddigi bizonyítások egyetlen konkrét lemmája sem volt magától értetődően igaz, ezek csak sejtések voltak (például: „Minden poliéder felfújható gömbbé" stb.). De most „megkövetelem, hogy a dolgok igazságáról szóló ítéleteinkbe semmiféle

1 A bizonyításelemzés nem szab határt az „eszközöknek". Bármilyen lemmát, bármilyen fogalmat használhatunk. Ez igaz bármely fejlődő, informális elméletre, ahol a problémamegoldás pankrációs harc. Formalizált elméletben az elmélet szintaxisa megszabja az eszközöket. Ideális esetben (ahol van eldöntési eljárás) csak formaság a problémamegoldás.

2 Ezek Descartes szavai. (*R. Descartes:* Szabályok az értelem vezetésére. XIII. szabály. Id. kiad. 130. o.)

3 Ne felejtsük el, hogy míg a bizonyításelemzés tétellel *zárul*, az euklideszi bizonyítás azzal *kezdődik*. Az euklideszi módszertanban nincsenek sejtések, csak tételek.

4 *R. Descartes:* Szabályok az értelem vezetésére. IX. szabály.

5 Pascal szabályai a definíció-alkotásra: „Ne definiáljunk egyetlen olyan adott terminust sem, amely tökéletesen ismert! Ne hagyjunk definiálatlanul egyetlen olyan terminust sem, amely akár a legcsekélyebb mértékben is homályos vagy nem egyértelmű! A terminusok definiálásakor csak tökéletesen ismert vagy már megmagyarázott szavakat használjunk!" (*B. Pascal:* Les réflexions sur la géométrie en général. Id. kiad. 596—597. o.)

sejtést ne engedjünk be”.[1] A sejtést olyan lemmákra bontom fel, amelyek már nem sejtések, hanem „intuíciók”, azaz „a tiszta és figyelmes ész egyértelmű felismerései, amelyek kizárólag értelem fényében születnek meg”.[2] Példák az ilyen „intuíciókra”: *minden poliédernek vannak lapjai; minden lapnak vannak élei; minden élnek vannak csúcsai.* Nem vetek fel olyan kérdéseket, hogy a poliéder test-e vagy felület. Ezek bizonytalan fogalmak, s egyébként fölöslegesek célunk eléréséhez. Szerintem a poliéder három halmazból áll: a c csúcsból álló halmaz (ezeket így jelölöm: $P_1^0, P_2^0, \ldots, P_c^0$), az $é$ élből álló halmaz (jelölésük: $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_é^1$) és az l lapból álló halmaz ($P_1^2, P_2^2, \ldots, P_l^2$). A poliéder jellemzéséhez valamilyen táblázatra is szükségünk van, amelyről leolvashatjuk, hogy melyik csúcs melyik élhez, melyik él melyik laphoz tartozik. Ezeket a táblázatokat „incidencia mátrixoknak” nevezem.

GAMMA: Egy kicsit problematikusnak találom a poliéderről adott definíciódat. Először is, mivel egyáltalán foglalkozol a poliéder fogalmának definiálásával, arra következtetek, hogy a poliéder fogalmát nem tartod tökéletesen közismertnek. De akkor honnan veszed a definíciódat? A poliéder homályos fogalmát a lapok, élek és csúcsok „tökéletesen ismert” fogalmaival definiáltad. Definíciód azonban — tudniillik, hogy a poliéder csúcsok halmaza, plusz élek halmaza, plusz lapok halmaza, plusz egy incidencia mátrix — nyilvánvalóan nem fedi a poliéder intuitív fogalmát. Ez például azt jelenti, hogy minden sokszög poliéder, tehát, mondjuk, egy olyan sokszög is, amelyből egy szabad él áll ki. Nos, most két lehetőség közül kell választanod. Mondhatod azt, hogy „a matematikust szakmai fogalmaink köznapi értelme nem érdekli... A matematikai definíció megteremti a matematikai jelentést.”[3] Ebben az esetben a poliéder fogalmának definiálása azt jelenti, hogy a régi fogalmat egészen elvetjük, és egy új fogalommal cseréljük fel. Ekkor viszont, ha a te „poliédered” és bármely igazi poliéder között bármilyen hasonlóság adódik, az teljesen véletlenszerű, és álpoliédereid tanulmányozásával semmi biztosat nem tudhatsz meg az igazi poliéderekről. Ha a másik lehetőséget választod, ragaszkodsz ahhoz az elképzeléshez, hogy a definiálás tisztázás, a lényegi sajátosságok explicitté tétele, egy terminus lefordítása vagy a jelentést megőrző átalakítása érthetőbb nyelvre. Ebben az esetben definícióid sejtések, s lehetnek igazak, lehetnek hamisak. Hogy kaphatod meg egy bizonytalan terminusnak precíz terminusokra való, biztosan igaz lefordítását?

EPSZILON: Elismerem, megleptél ezzel a kritikával. Arra gondoltam, hogy esetleg kétségbe vonjátok axiómáim abszolút igazságát, arra is gondoltam, hogy talán megkérdezitek, hogyan lehetségesek ilyen *a priori* szintetikus ítéletek, és előkészítettem néhány ellenérvet, de a definíciók irányából nem vártam támadást. Azt hiszem, mégis van válaszom: definícióimhoz — éppúgy, mint axiómáimhoz — intuícióval jutok. Definícióim valójában egyenértékűek axiómáimmal: tekintheted őket kiegészítő axiómáknak, vagy axiómáimat tekintheted implicit definícióknak.[1] A szóban forgó terminusok lényegét adják meg.

TANÁR: Elég a filozofálásból! Lássuk a bizonyítást! A filozófiáját nem kedvelem, de lehet, hogy a bizonyítása tetszik.

EPSZILON: Rendben van. Először a bebizonyítandó tételt lefordítom tökéletesen egyszerű és világos fogalmi rendszeremre. Sajátos, definiálatlan kifejezéseim a következők lesznek: csúcsok, élek, lapok és poliéderek. Időnként nulla-, egy-, két- és háromdimenziós politopiáknak, vagy röviden 0-politopiáknak, 1-politopiáknak, 2-politopiáknak és 3-politopiáknak nevezem őket.[2]

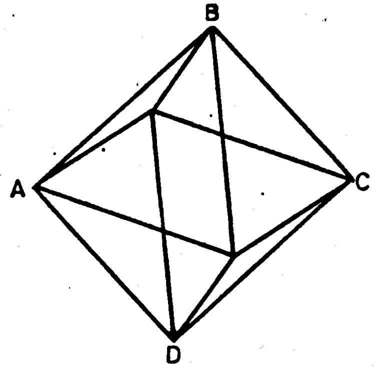
1 *R. Descartes:* Szabályok az értelem vezetésére. Megjegyzés a III. szabályhoz.
2 Uo.
3 *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. 78. o.

1 *J. D. Gergonne:* Essai sur la théorie des definitions. *In:* „Annales de Mathématiques, Pures et Appliquées”, 1818. 1—35. o.
2 Schläfli fedezte fel, hogy ezek a terminusok összefoglalhatók egyetlen általános absztrakt terminusban. (*L. Schläfli:* Theorie der vielfachen Kontinuität. Id. kiad.) Schläfli „polisémá”-nak, Listing „Curian”-nak nevezi őket (*J. B. Listing:* Der Census räumlicher Complexe. Id. kiad.). De Schläfli volt az, aki az általánosítást háromnál több dimenzióra terjesztette ki.

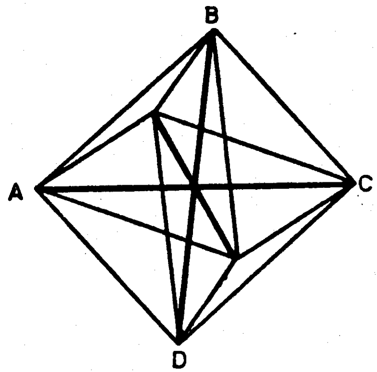
ALFA: De alig tíz perccel ezelőtt a poliédereket csúcsok, élek és lapok segítségével definiáltad!
EPSZILON: Tévedtem. Az a „definíció" ostoba anticipáció volt. Meggondolatlan sietséggel, elhamarkodottan alakítottam ki a véleményemet. Az igaz intuíció, az igaz értelmezés lassan érik, és időbe telik, amíg az ember megtisztítja lelkét a sejtésektől.[1]
BÉTA: Egy perccel ezelőtt említett axiómád: a lapoknak élei *vannak*, vagy minden laphoz élek *tartoznak*. „Tartoznak" — ez egy újabb primitív terminus?
EPSZILON: Nem. Csak a kérdéses elméletre, jelen esetben a poliéderek elméletére *jellemző* terminusokat sorolom fel, a mögöttes elmélet logikai, halmazelméleti, aritmetikai terminusait viszont nem, mivel feltételezem ezek tökéletes ismeretét. De hadd térjek rá az „egyszeresen összefüggő" terminusra, amely bizonyára nem teljesen világos. Először a poliéderek egyszeres összefüggőségét, majd a lapok egyszeres összefüggőségét fogom definiálni. Először veszem a poliéderek egyszeres összefüggőségét. Ez voltaképpen egy hosszú kifejezés rövidítése: egy poliédert akkor nevezünk egyszeresen összefüggőnek, 1. ha minden zárt, húrok nélküli élrendszernek van belseje és külseje, és 2. ha csak egy zárt, hurok nélküli laprendszere van — az, amelyik a poliéder belsejét a külsejétől elválasztja. Mármost ez tele van olyan meglehetősen bizonytalan terminusokkal, mint „zárt", „belső", „külső" stb. De mindezeket tökéletesen ismert terminusokkal fogom definiálni.
GAMMA: Már kiűzted a mechanikai terminusokat — a pumpálást, a vágást — mint megbízhatatlanokat; most a geometriai terminusoktól — például a zártságtól — szabadulsz meg. Azt hiszem, túlzásba viszed tisztogató buzgalmadat. „A zárt élrendszer" egészen egyértelmű fogalom, nem kell definiálni.
EPSZILON: Tévedsz. Zárt élrendszernek neveznél egy csillagsokszöget?

1 „A megkülönböztetés szempontjából az olyan (emberi) következtetést, amelyet a természetre alkalmazunk, a *természet megelőzésének* nevezzük (mivel merész és korai); azt a (következtetést) pedig, amely megfelelő módon a dolgokból ered, *a természet magyarázatának*." (*F. Bacon:* Novum Organum. XXVI. *In:* Morus, Bacon, Hobbes, Locke. Bp. 1958. 57. o.)

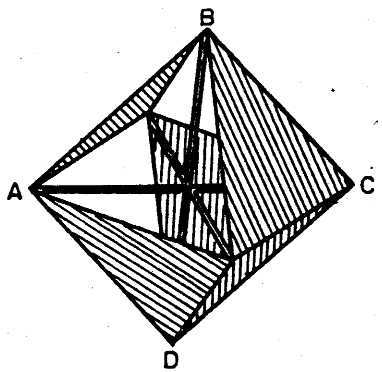
Lehet, hogy te igen, mert nincs szabad vége. De nem „zár körül" semmiféle jól definiált területet, és vannak, akik „zárt élrendszeren" esetleg olyan élrendszert értenek, amely egy ilyen területet zár körül. Így vagy úgy döntened kell tehát, és meg kell mondanod, hogyan döntöttél.
GAMMA: Lehet, hogy a csillagsokszög nem körülhatárolt, de nyilvánvalóan *zárt*.
EPSZILON: Szerintem zárt is, körülhatárolt is. Már ez a véleménykülönbség is sokatmondó, de további bizonyítékot is hozok. Kíváncsi vagyok, hogy szerinted a heptaéder zárt laprendszer-e és körülhatárolt-e?
GAMMA: Sohasem hallottam a te heptaéderedről.
EPSZILON: Ez meglehetősen érdekes poliéder-féleség, mivel egyoldalú. Nem zár körül semmiféle geometriai testet, nem osztja két részre, egy belsőre és egy külsőre a teret. Alfa például, „világos" geometriai intuíciótól vezérelve, korábban azt mondta, hogy egy zárt laprendszer akkor határol, „ha ez a poliéder belseje és külseje közti határ". Kíváncsi vagyok, azt mondaná-e, hogy a heptaéder felülete nem határol. Vagy a heptaéder megismerése megváltoztatja a „határoló" rendszerekre vonatkozó fogalmát? Ebben az esetben a legalázatosabban kérdezem: megváltoztathat a tapasztalat *tökéletesen* ismert fogalmakat? Nem. Következésképpen nem tökéletesen ismert a „zárt" és a „körülhatárolt" fogalma. Következésképpen definiálni fogom ezeket a fogalmakat.
THÉTA: Rajzold le azt a heptaédert! Kíváncsi vagyok, milyen.
EPSZILON: Jó. Először egy közönséges, ismert oktaéderrel kezdem (25. ábra). Most három négyzetet teszek hozzá az átlók által kifeszített síkokban, például *ABCD* egy ilyen négyzet (26. ábra).
DELTA: Egy tisztességes poliédertől elvárnám, hogy csak két lap találkozzék egy élben. Itt három van.
EPSZILON: Várj! Most eltávolítok négy háromszöget, hogy eleget tegyek ennek a követelménynek: az ábra elülső feléből a bal felső és a jobb alsó, a hátulsó részéből a bal alsó és a jobb felső háromszöget távolítom el. Ezután csak a rajzon bevonalkázott négy háromszög



25. ábra



26. ábra



27. ábra

marad meg (27. ábra). Így egy négy háromszögből és három négyzetből álló ábrát kapunk. Ez a heptaéder.[1] Élei és csúcsai megegyeznek az eredeti oktaéder éleivel és csúcsaival. Az oktaéder átlói alakzatunk-

1 A 27. ábrát Hilbert és Cohn-Vossen munkájából vettük át. (*D. Hilbert—S. Cohn-Vossen:* Anschauliche Geometrie. Id. kiad.) A heptaédert Reinhardt fedezte fel. (L.: *C. Reinhardt:* Zu Möbius Polyedertheorie. Vorgelegt von F. Klein. *In:* „Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig", 1885, 114. o.)

nak nem élei, hanem olyan egyenesek, amelyekben az alakzat önmagát metszi. Nem tulajdonítok nagy jelentőséget a geometriai intuíciónak, nem nagyon érdekel, hogy poliéderem történetesen ilyen kényelmetlenül helyezkedik el a háromdimenziós térben. Ezt a tényt nem mutatja a heptaéder incidencia mátrixa. (Mellesleg, a heptaéder szépen, önmetszés nélkül elhelyezhető egy ötdimenziós térben.)[1]

Nos, határol-e bármit is a heptaéder felülete? A válasz „nem", ha definíció szerint akkor és csak akkor nevezel „határolónak" egy felületet, ha az a poliéder határa abban az értelemben, hogy a kérdéses poliéder belsejét és külsejét választja el. Másrészt, a válasz „igen", ha definíció szerint akkor és csak akkor nevezel egy felületet „határolónak", ha az a poliéder határa abban az értelemben, hogy a poliéder minden lapját tartalmazza. Látod, *definiálni* kell a „határol"-t, definiálni kell a „határ"-t. Ezek a fogalmak ismerősnek tűnnek mielőtt elkezdenénk megvizsgálni a poliedrikus alakzatok gazdagságát, de a vizsgálódás során felbomlanak az eredeti, durva fogalmak, föltárul finom szerkezetük, és ezért gondosan definiálni kell a fogalmakat, hogy világos legyen, milyen értelemben használjuk őket.

KAPPA: És aztán vétót kell emelni a további vizsgálódás ellen, hogy elkerüljük a fogalmak további felbomlását!

TANÁR: Epszilon, ne hallgasson Kappára! A cáfolatok, belső ellentmondások, a kritika általában nagyon fontosak, de csak ha helyesbítésre vezetnek. *Egy cáfolat önmagában nem győzelem.* Ha önmagában a kritikának — még ha kifogástalan is — hatalma volna, Berkeley véget vetett volna a matematika fejlődésének, és Dirac nem talált volna kiadót tanulmányai megjelentetésére.

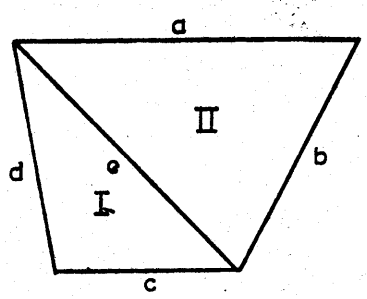
EPSZILON: Ne aggódjon, tüstént elvetettem Kappa ízetlen piszkálódását. Folytatom terminusaim definiálását, mindent lefordítok a magam néhány sajátos primitív terminusára, a politopiákra és az incidencia mátrixokra. A „határ" definiálásával kezdem. Egy *k*-politopia határa

1 Elsőként Dyck vette észre, hogy az egy oldalúság vagy két oldalúság a tér dimenzióinak számától függ. (L.: *W. Dyck:* Beiträge zur Analysis Situs. *In:* „Mathematische Annalen", 1888. 474. o.)

azoknak a $(k-1)$ politopiáknak az összege, amelyek az incidencia mátrix szerint hozzá tartoznak. A k-politopiák összegét k-láncnak nevezem. Például egy poliédernek (vagy bármely részének) a „felülete" lényegében egy 2-lánc. Úgy definiálom egy k-lánc határát, mint a k-lánchoz tartozó $(k-1)$ politopiák összegét, de a közönséges összeg helyett az összeget *modulo* 2-nek veszem. Ez azt jelenti, hogy az összeadás szabálya a következő:

$$0+0=0, \quad 1+0=1, \quad 0+1=1, \quad 1+1=0.$$

Be kell látnotok, hogy egy k-lánc határának ez az *igaz definíciója*.
BÉTA: Állj meg egy pillanatra! Nehezen követem k-dimenziós definícióidat. Hadd gondolkozzam hangosan egy példán!* Definíciód szerint például egy *lap* határa a hozzá tartozó élek halmaza. Mármost, amikor két lapot összeillesztek, a közös határ nem tartalmazza azokat az éleket, melyeket mindkét lap tartalmaz. Így az élek összeadásakor elhagyom a párosával előforduló éleket. Veszek például két háromszöget (28. ábra). Az első háromszög határa $c+d+e$, a másodiké $a+b+$



28. ábra

$+e$, az összekapcsolt háromszögek határa $a+b+e+c+d+e=a+$ $+b+c+d$. Most már értem, miért vezetted be definíciódban a *mod* 2 összegeket. Folytasd, kérlek!

* *A szerkesztők megjegyzése:* A „hangosan gondolkodás" [„*thinking loudly*"] Lakatos-féle angol *terminus technicus*.

EPSZILON: Miután tökéletesen ismert, speciális terminusokkal definiáltam a „határt", most a „zártságot" fogom definiálni. Mind ez ideig vagy bizonytalan felismerésekre kellett hagyatkoznunk, vagy minden egyes esetben külön kellett definiálni a zártságot: először az élrendszerek zártságát, majd a laprendszerekét. Most bebizonyítom, hogy a zártságnak létezik egy általános fogalma, amely k-tól függetlenül bármely k-láncra alkalmazható. Egy k-láncot akkor és csak akkor nevezek zárt k-láncnak vagy röviden k-körnek, ha határa nulla.
BÉTA: Állj meg egy pillanatra! Meg akarom érteni. Egy közönséges sokszög intuitíven zárt, és definíciód szerint valóban zárt, mivel határa nulla, hiszen mindegyik csúcsa kétszer szerepel a határban, és ez a te *mod* 2 algebrádban nullát eredményez. Egy közönséges egyszerű poliéder zárt, és határa ismét nulla, hiszen határában mindegyik él kétszer fordul elő.
KAPPA *(félre):* Bétának mindenesetre meg kell küzdenie azért, hogy verifikálja Epszilon „nyilvánvaló és közvetlen felismeréseit"!
EPSZILON: A következő tisztázandó terminus a „határol". Azt mondom, egy k-kör akkor határol, ha egy $(k+1)$ lánc határa. Például egy gömbi poliéder „egyenlítője" határol, de egy tórusz-szerű poliéder „egyenlítője" nem. Az utóbbi esetben kizárt az alternatív elképzelés, nevezetesen az, hogy az „egyenlítő" a poliéder „egészét" határolja, mivel a poliéder egészének határa üres. Mármost teljesen világos, hogy például a heptaéder határol.
BÉTA: Egy kicsit sietsz, de úgy tűnik, igazad van.
GAMMA: Be tudod bizonyítani, hogy bármely határoló k-lánc kör? A „határoló"-t csak körökre definiáltad, jobb lett volna, ha általában a láncokra definiáltad volna. Azt hiszem, definíciód korlátozottságának oka ez a rejtett tétel.
EPSZILON: Így van. Be tudom bizonyítani.
GAMMA: Egy másik bizonytalan kérdés. Bizonyos láncok körök, bizonyos körök határolnak. Úgy vélem, ez rendben van. De szerintem egy tisztességes k-lánc határának zártnak kell lenni. Valószínűleg aligha fogadnék el poliédernek például egy olyan kockát, amelynek hiányzik a teteje, és aligha fogadnék el sokszögnek egy olyan négyzetet, amely-

nek hiányzik az egyik éle (oldala). Be tudod bizonyítani, hogy bármely k-lánc határa zárt?
EPSZILON: Be tudom-e bizonyítani, hogy bármely k-lánc határának határa nulla?
GAMMA: Erről van szó.
EPSZILON: Nem tudom bebizonyítani. Ez vitathatatlanul igaz. Axióma. Nem kell bizonyítani.
TANÁR: Folytassa, folytassa! Feltételezem, hogy most már le tudja fordítani tételünket a maga tökéletesen ismert terminusaira.
EPSZILON: Igen. A lefordított tétel röviden: *„Minden poliéder, amelynek minden köre határol, Euler-féle.”* A „poliéder" terminus definiálatlan; a „kör"-t és a „határol"-t tökéletesen ismert terminusokkal definiáltam már.
GAMMA: Elfeledkeztél a lapok egyszeres összefüggőségéről. Csak a poliéder egyszeres összefüggőségét fordítottad le.
EPSZILON: Tévedsz. Megkövetelem, hogy *minden* kör határoljon, még a 0-körök is. A „poliéder egyszeres összefüggősége"-t „minden 1-kör és 2-kör határol"-ra, a „lapok egyszeres összefüggősége"-t „minden 0-kör határol"-ra fordítottam le.
GAMMA: Nem tudlak követni. Mi az a 0-kör?
EPSZILON: A 0-lánc a csúcsok bármely összege. A 0-kör olyan csúcsok bármely összege, amelyeknek a határa nulla.
GAMMA: De mi egy csúcs határa? Nincsenek *mínusz* 1-dimenziós politopiák!
EPSZILON: Persze, hogy vannak. Vagyis inkább egy ilyen van: az üres halmaz.
GAMMA: Bolond vagy!
ALFA: Lehet, hogy nem bolond. Egy konvenciót vezet be. Nekem mindegy, milyen fogalmi eszközökkel él. Lássuk az eredményeit!
EPSZILON: Nem használok konvenciókat, és fogalmaim nem „eszközök". Az üres halmaz a *mínusz* 1-dimenziós politopia. Létezése számomra feltétlenül nyilvánvalóbb, mint, mondjuk, a te kutyád létezése.
TANÁR: Semmi platonista propaganda! Mutassa meg, hogy fordítják

le a maga „határoló 0-körei" „az egyszeresen összefüggő lapokat"!
EPSZILON: Ha felismeri, hogy bármely csúcs határa az üres halmaz, a többi már semmiség. Korábbi definícióm szerint egy csúcs határa az üres halmaz, de két csúcs határa nulla, a *mod* 2 algebra miatt. Három csúcs határa ismét az üres halmaz, és így tovább. Páros számú csúcs tehát kör, páratlan számú csúcs nem az.
GAMMA: Vagyis annak a követelményednek a lényege, hogy a 0-köröknek határolniuk kell, azonos azzal a követelménnyel, hogy bármely két csúcsnak egy 1-láncot kell határolnia, vagy köznyelven kifejezve, azzal, hogy bármely két csúcsot valamilyen élrendszernek kell összekapcsolnia. Ez persze kizárja a gyűrű alakú lapokat. Ez voltaképpen az a követelmény, amelyet mi „az egyes lapok egyszeres összefüggőségének" neveztünk.
EPSZILON: Aligha tagadhatod, hogy az általam használt, a poliéderek *lényegét* tükröző *természetes* nyelv mutatja meg először a korábban összefüggéstelen, elszigetelt, *ad hoc* kritériumok mélyen gyökerező, lényegi azonosságát.
GAMMA *(félre)*: Amit aligha tagadhatok, az az, hogy teljesen tanácstalan vagyok! Mégiscsak meglehetősen furcsa, hogy a „természetes egyszerűséghez" vezető út valójában ilyen bonyodalmakkal terhes.
ALFA: Hadd ellenőrizzem, hogy értem-e. Azt mondod, hogy minden csúcsnak ugyanaz a határa: üres halmaz?
EPSZILON: Igen.
ALFA: És — gondolom — számodra a „minden csúcsnak van üres halmaza" állítás ugyanúgy axióma, mint a „minden lapnak vannak élei" és a „minden élnek vannak csúcsai" állítás?
EPSZILON: Igen.
ALFA: De ezek az axiómák aligha lehetnek egyenértékűek! Az első egy konvenció, a másik kettő szükségszerűen igaz!
TANÁR: A tételt lefordította. Látni akarom a bizonyítást.
EPSZILON: Rögvest, uram. Hadd fogalmazzam át egy kicsit a tételt! *„Minden poliéder, amelyben a körök és a határoló körök egybeesnek, Euler-féle."*
TANÁR: Bizonyítsa be!

EPSZILON: Rögvest, uram. Átfogalmazom.[1]
BÉTA: De miért? Már minden kicsit is homályos terminusodat lefordítottad tökéletesen ismert terminusokra!
EPSZILON: Igaz. De az a fordítás, amire most készülök, egészen másféle. Primitív terminusaim halmazát, a primitív terminusok másik, még alapvetőbb halmazára fordítom le.
BÉTA: Vagyis némelyik tökéletesen ismert terminusod ismertebb, mint mások!
TANÁR: Béta, ne piszkálja állandóan Epszilont! Arra figyeljen, amit csinál, ne arra, hogyan értelmezi azt, amit csinál! Folytassa Epszilon!
EPSZILON: Ha közelebbről megnézzük a tétel utolsó megfogalmazását, látjuk, hogy az az incidencia mátrix által meghatározott bizonyos vektor-terek dimenzióinak számára vonatkozó tétel.
BÉTA: Tessék?
EPSZILON: Nézd „lánc" fogalmunkat, mondjuk, egy 1-láncot!

Ilyen:

$$x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + \ldots + x_{\acute{e}}\Theta_{\acute{e}},$$

ahol

$$\Theta_1, \ldots, \Theta_{\acute{e}} \ \acute{e} \text{ él}, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{\acute{e}} \text{ vagy 0, vagy 1.}$$

Könnyű belátni, hogy az 1-láncok *é*-dimenziós vektor-teret alkotnak a *modulo* 2 maradék-osztályok teste fölött. Általánosságban a k-láncok N_k-dimenziós vektor-teret alkotnak a *modulo* 2 maradék-osztályok teste fölött (ahol N_k a k-politopiák számát jelöli). A körök a lánc-terek altereit alkotják, a határoló körök pedig a kör-terek altereit.

Tételem tehát tulajdonképpen a következő: *„Ha a kör-terek és a határoló terek egybeesnek, a 0-lánc-tér dimenzióinak száma* mínusz *az 1-lánc-tér dimenzióinak száma* plusz *a 2-lánc-tér dimenzióinak száma* egyenlő *2-vel.* Ez az Euler-tétel lényege.

1 „Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni?" (*Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. Belső borító.)

TANÁR: Tetszik ez az átfogalmazás, amely — ahogy ígérte — valóban megmutatta egyszerű eszközeinek természetét. Most majd kétségtelenül egyszerű vektoralgebrai módszerekkel bizonyítja az Euler-tételt. Lássuk a bizonyítást!

2. A sejtés újabb bizonyítása

EPSZILON: Tételemet felosztom két részre. Az első azt állítja, hogy a kör-terek és a határoló kör-terek akkor és csak akkor esnek egybe, ha dimenzióik száma egybeesik. A második azt állítja, hogy ha a kör-tereknek és a határoló kör-tereknek ugyanaz a dimenziója, akkor az 1-lánc-tér dimenzióinak száma *plusz* a 2-lánc-tér dimenzióinak száma 2-vel egyenlő.
TANÁR: Az első rész a vektoralgebra egyik triviálisan igaz tétele. Bizonyítsa be a második részt!
EPSZILON: Mi sem könnyebb ennél. Csak a benne szereplő fogalmak definíciójára kell visszatérnem.[1] Először töltsük ki incidencia mátrixainkat. Vegyük például egy *ABCD* tetraéder incidencia mátrixait, amelynek élei *AD*, *BD*, *CD*, *BC*, *AC*, *AB*, lapjai pedig *BCD*, *ACD*, *ABD*, *ABC*. A mátrixok $\eta^k_{ij} = 1$ vagy 0, aszerint, hogy P^i_{k-1} hozzátartozik-e P^j_k-hoz vagy nem. Mátrixaink tehát a következők:

η^0	*A*	*B*	*C*	*D*
az üres halmaz	1	1	1	1

η^1	*AD*	*BD*	*CD*	*BC*	*AC*	*AB*
A	1	0	0	0	1	1
B	0	1	0	1	0	1
C	0	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0

1 „A definiált dolgokat gondolatban a definíciókkal kell helyettesíteni." (*B. Pascal:* Les réflexions sur la géométrie en général. Id. kiad.) „Idézd fel a definíciót!" (*Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája. Id. kiad. Belső borító.)

η^2	BCD	ACD	ABC	ABC
AD	0	1	1	0
BD	1	0	1	0
CD	1	1	0	0
BC	1	0	0	1
AC	0	1	0	1
AB	0	0	1	1

η^3	$ABCD$
BCD	1
ACD	1
ABD	1
ABC	1

E mátrixok segítségével most már könnyen jellemezhetők a kör-terek és a határolt kör-terek. Már láttuk, hogy a k-láncok valójában a

$$\sum_{i=1}^{N_k} x_i P_i^k \text{ vektorok.}$$

A P_j^k politopia határát a következőképpen definiáltuk:

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \eta_{ij}^k P_i^{k-1}$$

(Ez — ugyanúgy, mint valamennyi következő formula — csak régi definíciónk átfogalmazása szimbolikus jelölésekkel.)
Egy $\sum x_j P_j^k$ k-lánc határa:

$$\sum_i \sum_j x_j \eta_{ij}^k P_i^{k-1}.$$

Egy $\sum x_j P_j^k$ k-lánc akkor és csak akkor k-kör, ha

(1) $$\sum \eta_{ij}^k x_j = 0 \text{ minden } i\text{-re.}$$

Egy $\sum x_j P_j^k$ k-lánc akkor és csak akkor határoló k-kör, ha valamilyen $\sum \gamma_m P_m^{k+1}$ $(k+1)$-lánc határa, azaz akkor és csak akkor, ha vannak olyan $\gamma_m (m=1, \ldots, N_{k+1})$ együtthatók, amelyekre

(2) $$x_j = \sum \gamma_m \eta_{jm}^{k+1}.$$

Nyilvánvaló most már, hogy a kör-tér és a határoló kör-tér akkor és csak akkor azonos, ha dimenzióik száma azonos, vagyis akkor és csak akkor, ha az N_{k-1} homogén lineáris egyenletrendszer *(1)* független megoldásainak száma egyenlő rangú az inhomogén lineáris egyenletrendszer *(2)* független megoldásainak számával. Nos, a lineáris algebra közismert tételei szerint az első szám $N_k - \varrho_k$, ahol ϱ_k az $\|\eta_{ij}^k\|$ mátrix rangja, a második pedig ϱ_{k+1}.
Csak azt kell bebizonyítanom tehát, hogy ha $N_k - \varrho_k = \varrho_{k+1}$, akkor $c - é + l = 2$.

LAMBDA: Vagy: „Ha $N_k = \varrho_k + \varrho_{k+1}$, akkor $N_0 - N_1 + N_2 = 2$." N_k bizonyos vektorterek dimenzióit, ϱ_k bizonyos mátrixok rangjait jelenti. Ez a tétel már nem poliéderekről szól, hanem többdimenziós vektorterek részhalmazáról.

EPSZILON: Látom, most ébredtél fel. Amíg aludtál, én kielemeztem poliéderekre vonatkozó fogalmainkat, és kimutattam, hogy ezek *valójában* vektoralgebrai fogalmak. Az Euler-jelenség gondolatkörét lefordítottam vektoralgebrára, így mutatva be lényegüket. Most természetesen egy vektoralgebrai tételt bizonyítok. A vektoralgebra tökéletesen ismert kifejezésekkel, megfelelő és vitathatatlan axiómákkal, megfelelő és vitathatatlan bizonyításokkal rendelkező, egyértelmű és határozott elmélet. Nézzük például régi, sokat vitatott tételünk új, triviális bizonyítását: Ha $N_k = \varrho_k + \varrho_{k+1}$, akkor $N_0 - N_1 + N_2 = \varrho_0 + \varrho_1 - \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_2 + \varrho_3 = \varrho_0 + \varrho_3 = 1 + 1 = 2$. Ki merné most kétségbe vonni e tétel bizonyosságát? Így kétségtelen bizonyossággal bizonyítottam Euler vitatott tételét.[1]

ALFA: Figyelj ide, Epszilon! Ha azt a rivális konvenciót fogadtuk volna el, hogy a csúcsoknak nincs határa, akkor például a tetraéder esetében az η^0 mátrix

η^0	A	B	C	D
	0	0	0	0

lett volna, a ϱ_0 rang 0 lett volna, következésképpen $c - é + l = \varrho_0 + \varrho_3 =$

1 Ez a bizonyítás Poincarétól származik. (*H. Poincaré:* Complément à l'analysis situs. *In:* „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", 1899. 285—343. o.)

$=1$ lett volna. Nem gondolod, hogy „bizonyításod" túlságosan támaszkodik egy konvencióra? Nem csupán azért választottad éppen ezt a konvenciót, hogy megmentsd a tételt?

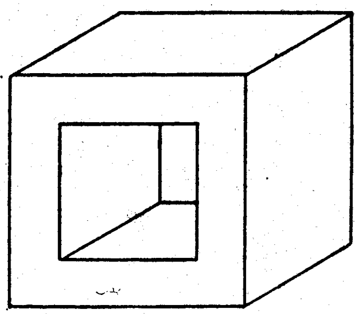
EPSZILON: ϱ_0-ra vonatkozó axiómám nem „konvenció" volt. Az én nyelvemben $\varrho_0=1$-nek az a nagyon is valóságos jelentése, hogy minden csúcspár határol, az élek alkotta háló összefüggő (ily módon nem lehetnek gyűrű alakú lapok). A „konvenció" kifejezés teljesen félrevezető. Az egyszeresen összefüggő lapokkal rendelkező poliéderek esetében $\varrho_0=1$ *igaz*, $\varrho_0=0$ hamis.

ALFA: Hm! Úgy tűnik, azt mondod, hogy $\varrho_0=1$ és $\varrho_0=0$ valamilyen vektortérbeli struktúrát jellemez. A különbség az, hogy a $\varrho_0=1$-nek az egyszeresen összefüggő lapokkal rendelkező poliéderek között van valóságos modellje, a másiknak viszont nincs.

3. Kételyek a bizonyítás véglegességét illetően. A fordítási eljárás meg a definíciók esszencialista és nominalista megközelítésének ellentéte

TANÁR: Mindenesetre megvan az új bizonyítás. De végleges-e?

ALFA: Nem. Vegyük ezt a poliédert (29. ábra)! Van két gyűrű alakú lapja — egy elöl, egy hátul —, felfújható tórusszá. És 16 csúcsa, 24 éle,



29. ábra

10 lapja van. Vagyis $c-é+l=16-24+10=2$. Euler-féle, de távolról sem egyszeresen összefüggő.

BÉTA: Nem hiszem, hogy ez Descartes—Euler-jelenség. Ez a Lhuilier-jelenség egyik esete. Azaz: *egy alagúttal és m gyűrű alakú lappal rendelkező poliéder esetében* $c-é+l=2-2k+m$.[1] Minden olyan poliéder esetében, amelynek kétszer annyi gyűrű alakú lapja van, mint alagútja — ilyen a mi példánk is —, $c-é+l=2$, de ez nem jelenti azt, hogy ezek a poliéderek Euler-félék. És ez a Lhuilier-jelenség rögtön magyarázatot ad arra, miért nem volt könnyű megtalálni a Descartes—Euler-sejtés szükséges és elégséges feltételét — avagy az „igazi" tételt —; azért, mert ezek a Lhuilier-esetek befurakodtak az Euler-félék közé.[2]

TANÁR: Epszilon azonban sohasem ígért véglegességet, csak az általunk korábban elértnél nagyobb mélységet. Teljesítette azt az ígéretét, hogy olyan bizonyítást alkot, amely mind a közönséges, mind a csillagpoliéderek Euler-féle jellegét egy csapásra megmagyarázza.

LAMBDA: Ez igaz. Úgy fordította le a lapok egyszeres összefüggőségének követelményét — vagyis azt a követelményt, hogy a háromszögekre bontás során minden egyes új átlónak egy új lapot kell létrehoznia —, hogy a felbontás teljesen eltűnt belőle. E szerint az új fordítás szerint egy lap egyszeresen összefüggő, ha benne minden csúcs-kör határol; *ez* a követelmény pedig az Euler-féle csillagpoliéderekre is érvényes. S míg nekünk nehézségeink voltak azzal, hogy Jordannak a poliéder egyszeres összefüggőségére vonatkozó intuitív (azaz nem *csillag*-intuitív) fogalmát a csillagpoliéderekre alkalmazzuk, Poincaré fordításában ezek a nehézségek eltűnnek. A csillagpoliéderek éppúgy csúcsok, élek és lapok halmazai plusz egy incidencia mátrix, mint a közönséges poliéderek. Nem foglalkozunk azzal a problémával, hogyan realizálható egy poliéder abban a térben, amely történetesen a mi materiális, háromdimenziós, röviden euklideszi terünk. A kis, csillag

1 L.: *S. A. J. Lhuilier:* Mémoire sur la polyèdrométrie. Id. kiad. 1812 és 1890 között ezt az összefüggést körülbelül egy tucatszor fedezték fel újra.
2 L.: 100. o. és kk.

alakú dodekaéder például nem Euler-féle: nem túl nehéz rajta olyan 1-köröket találni, amelyek nem határolnak.

BÉTA: Ezt egy másik szempontból is érdekesnek találom. Epszilon bizonyítása szigorúbb és egyúttal átfogóbb is. Szükségszerű ez az összefüggés?

EPSZILON: Nem tudom. De míg tanárunk csupán *nagyobb mélységet*, én *teljes bizonyosságot* tulajdonítok bizonyításomnak.

KAPPA: Tételed éppúgy megcáfolható egy ötletes fogalom-kitágítással, mint bármely korábbi sejtés.

EPSZILON: Tévedsz, Kappa, s ezt meg is fogom magyarázni.[1]

ALFA: Előbb hadd tegyek fel egy másik kérdést bizonyításoddal, vagy inkább az annak tulajdonított véglegességgel és bizonyossággal kapcsolatban! A poliéder valóban vektoralgebrai struktúrád modellje? Biztos vagy abban, hogy a „poliéder" lefordítása a vektorelméletre *igaz* fordítás volt?

EPSZILON: Már mondtam, hogy igaz. Ha valami meglepő, az még nem ok a kételkedésre. „Én azoknak a matematikusoknak a nagy iskoláját követem, akik egy sor meglepő definíció bevezetésével megmentették a matematikát a szkeptikusoktól, és szigorúan bizonyították állításait."[2]

TANÁR: Én valóban úgy vélem, hogy ez a fordítási módszer a lényege Epszilon bizonyítása bizonyosságának és véglegességének. Nevezzük *fordítási eljárás*nak. De lássuk, vannak-e más kételyek!

GAMMA: Csak még egy. Mondjuk, elfogadom, hogy dedukciód hibátlan. Biztos vagy abban, hogy premisszáidból ugyanilyen hibátlan dedukcióval nem juthatsz el tételed tagadásához?

1 L.: 180—183. o.

2 Ez az idézet Ramseytől származik. (*F. P. Ramsey:* The Foundations of Mathematics and Other Essays. London 1931. 56.o .) Csak egy szót változtattunk meg. Ramsey „matematikusok" helyett „matematikai logikusokról" beszél, de csak azért, mert nem értette meg, hogy az általa leírt eljárásmód nem a matematikai logika új jellegzetessége, hanem Cauchy óta a „szigorú" matematika sajátossága, és a határérték, folytonosság stb. Cauchy által javasolt és Weierstrass által tökéletesített nevezetes definíciói mind ehhez az irányzathoz tartoznak. Megjegyzem, hogy Ramseynek erre a kijelentésére Russell is hivatkozik. (*B. Russell:* Filozófiai fejlődésem. Bp. 1968. 109. o.)

EPSZILON: Minden premisszám igaz. Hogy lehetnek ellentmondók?

TANÁR: Jól megértem kételyeit. De mindig előnyben részesítek *egy* ellenpéldát akárhány kétellyel szemben.

GAMMA: Vajon a hengerem nem cáfolja meg ezt az új tételt?

EPSZILON: Persze hogy nem. A hengerben az üres halmaz nem határol, következésképpen $\varrho_0 \neq 1$.

GAMMA: Értem. Igazad van. Ez az érv, lefordítva tökéletesen ismert, világos és határozott terminusaidra, azonnal meggyőzött.

EPSZILON: Értem szarkazmusodat! Egyszer korábban kétségbe vontad definícióimat. Akkor azt mondtam, ezek valójában a szóban forgó fogalmak lényegét csalhatatlanul világos és határozott intuícióval kifejező, vitathatatlanul igaz axiómák. Azóta gondolkodtam ezen, és azt hiszem fel kell adnom a definíciókkal kapcsolatos arisztoteliánus nézetemet. Amikor egy bizonytalan terminust definiálok, valójában egy új terminussal helyettesítem, és a régi terminus csak az új rövidítésére szolgál.

ALFA: Hadd tisztázzam ezt! Mit értesz „definíción": helyettesítést, ami balról jobbra haladó művelet, vagy rövidítést, ami jobbról balra haladó művelet?

EPSZILON: Rövidítést. A régi jelentést elfelejtem. Szabadon alkotom terminusaim jelentését, miközben sutba dobok régi, bizonytalan terminusokat. Problémáimat is szabadon alkotom, miközben sutbadobok régi, zavaros problémákat.

ALFA: Nem bírod ki túlzások nélkül. De folytasd csak!

EPSZILON: Programomnak ezzel a változásával egy valamit biztosan nyerek: egyik kételyetek kiküszöbölődik. Ha a definíciók rövidítések, akkor nem lehetnek hamisak.

ALFA: De elveszítsz valamit, ami sokkal fontosabb ennél. Euklideszi programodat tökéletesen ismert fogalmakkal kifejtett elméletekre korlátozod, és amikor bizonytalan fogalmakkal kifejtett elméleteket akarsz bevonni e program körébe, ezt fordítási eljárásoddal nem tudod elvégezni. Ahogy mondtad, te nem fordítsz, inkább új jelentést alkotsz. De még ha meg is próbálnád *lefordítani* a régi jelentést, az eredeti, bizonytalan fogalom néhány lényeges oldala elveszhetne a fordítás folyamán. Előfordulhat, hogy az új, egyértelmű fogalom nem annak a problémának a megoldását szolgálja, amelynek megoldására a régi fogalom irányult.[1] Ha fordításodat hibátlannak tartod, vagy ha tudatosan sutba dobod a régi jelentést, mindkét véglet azonos eredménnyel jár: a gondolkodás történetének lomtárába hajítod az eredeti problémát, s ezt voltaképpen magad sem akarod.[2] Ezért, ha lecsillapodsz, kénytelen leszel elismerni, hogy a definíciónak magán kell hordoznia a módosított esszencializmus nyomát: meg kell őriznie a régi jelentés néhány releváns oldalát, balról jobbra kell átvinnie releváns jelentéselemeket.[3]

BÉTA: De ha el is fogadja Epszilon ezt a módosított esszencializmust a definíciókban, a lemondás az esszencialista megközelítésről még mindig

1 Az adekvátság (általában implicit) kritériumát nem kielégítő fordítás klasszikus példája a felület területének XIX. századi definíciója, amelyet Schwarz „ellenpéldája" végleg megdöntött.
Itt az a nehézség, hogy az adekvátság kritériumai megváltozhatnak azoknak az új problémáknak a megjelenésével, amelyek a fogalmi eszköztár megváltozását is előidézhetik. Az ilyen változás egyik paradigmatikus esete az integrál fogalmának története. A mai matematikaoktatás szégyene, hogy a tanulók képesek pontosan idézni a Cauchy-, Riemann-, Lebesgue- stb. integrálok különböző definícióit anélkül, hogy tudnák, milyen problémák megoldására alkották meg, vagy milyen problémák megoldása során fedezték fel ezeket. Az adekvátság kritériumainak változásával a definíciók rendszerint úgy fejlődnek, hogy az össszes kritériumnak megfelelő definíció válik uralkodóvá. A kritériumok összeegyeztethetetlensége miatt ez nem történhetett meg az integrál definíciójával, ezért fel kellett bontani a fogalmat. A bizonyításból származó definíciók még az euklideszi program fordítással megadott definícióinak felépítésében is döntő szerepet játszanak.

2 Ez a folyamat nagyon jellemző a XX. századi formalizmusra.

3 Elég különös, hogy ezt a triviális szempontot mellőzik a nominalisták, például Pascal és Popper. Pascal ezt írja: „... a geométerek és mindazok, akik módszeresen dolgoznak, csak a rövidebb kifejtés végett adnak nevet a dolgoknak" (*B. Pascal:* Les réflexions sur la géométrie en général. Id. kiad.). Popper a következőképpen vélekedik: „A modern tudományban csak nominalista definíciók fordulnak elő, azaz a rövid fogalmazás kedvéért gyorsírás-jeleket vagy elnevezéseket vezetnek be." (*K. R. Popper:* The Open Society and its Enemies. London 1945. II. k. 14. o.) Érdekes, hogy a nominalisták és az esszencialisták milyen egyképpen vakok ahhoz, hogy észrevegyék a másik fél érvelésének racionális magvát.

óriási visszalépés eredeti euklideszi programjától. Epszilon most azt mondja, hogy vannak tökéletesen ismert terminusokkal és hibátlan levezetésekkel felépített euklideszi elméletek, mint például az aritmetika, a geometria, a logika, a halmazelmélet. Most pedig azt akarja elérni, hogy az euklideszi program csak a homályos terminusokat és bizonytalan levezetéseket tartalmazó nem euklideszi elméleteknek — mint például az analízis és a valószínűségszámítás — a már euklideszi mintára felépített elméletekre való lefordításából álljon. Így mind az alapelméletek, mind az eredetileg nem euklideszi elméletek fejlődése előtt új utak nyílnak majd meg.

EPSZILON: Az ilyen „már euklideszi" vagy megalapozott elméletet *uralkodó elméletnek* nevezem.

GAMMA: Kíváncsi vagyok, mi az alkalmazási területe ennek a zsugorított programnak. A fizikára bizonyára nem terjed ki. Soha nem fogod lefordítani a hullámmechanikát geometriára. Epszilon „egy sor meglepő definíció bevezetésével" akarta „megmenteni a matematikát a szkeptikusoktól",[1] de legjobb esetben is csak néhány morzsát mentett meg.

BÉTA: Van egy problémám azokkal a fordításos definíciókkal kapcsolatban. Az uralkodó elméleten belül ezek pusztán rövidítéseknek látszanak, és ezért „definíció szerint" igazak. De ha a nem euklideszi tartományra vonatkozónak tekintjük őket, cáfolhatónak látszanak.[2]

1 L.: 176. o.

2 E különbség metodológiai jelentőségét még nem dolgozták ki kellőképpen. Pascal, a rövidített definíciók nagy szószólója és az arisztotelészi esszencialista definíció-elmélet nagy ellenzője, nem vette észre, hogy az esszencializmus feladása valójában a nagy euklideszi program feladását jelenti. Az euklideszi program szerint mindazokat a terminusokat definiálni kell, amelyek „csak egy kicsit is homályosak". Ha ez csak abból áll, hogy egy bizonytalan terminust egy önkényesen kiválasztott pontos terminussal váltanak fel, feladják az eredeti vizsgálati területet, s áttérnek egy másik területre. Pascal viszont biztosan nem ezt akarta. Cauchy és Weierstrass esszencialisták voltak, amikor véghezvitték a matematika aritmetizálását; Russell esszencialista volt, amikor véghezvitte a matematika logicizálását. Mindnyájan azt hitték, hogy a folytonosságra, valós számokra, egész számokra stb. vonatkozó definícióik a kérdéses fogalom lényegét ragadják meg. Russell, amikor

EPSZILON: Ez igaz.
BÉTA: Érdekes volna látni, hogy cáfolja meg az ember az ilyen definíciókat.
THÉTA: Szeretnék most visszatérni arra a vitakérdésre, hogy Epszilon dedukciója megdönthetetlen-e. Még mindig azt állítod, Epszilon, hogy tételed biztosan igaz?
EPSZILON: Okvetlenül!
THÉTA: Vagyis nem tudod elképzelni, hogy van rá ellenpélda?
EPSZILON: Ahogy Kappának mondtam, bizonyításom megdönthetetlen. Nincs rá ellenpélda.
THÉTA: Úgy érted, az ellenpéldákat, mint torzszülötteket, kizárnád?
EPSZILON: Még egy torzszülött sem tudja megcáfolni.
THÉTA: Szóval azt állítod, hogy bármivel helyettesítem be tökéletesen ismert terminusaidat, a tétel igaz marad?
EPSZILON: A tökéletesen ismert terminusokat bármivel behelyettesítheted, ami *jellemző [specific]* a vektoralgebrára.
THÉTA: Nem jellemző primitív terminusaidat nem helyettesíthetem mással, mint „minden" és „2" stb.?
EPSZILON: Nem. De *specifikus*, tökéletesen ismert terminusaimat — mint „csúcs", „él", „lap" stb. — bármivel helyettesítheted. Ezzel azt hiszem, tisztáztam, mit értek cáfolaton.
THÉTA: Kétségtelenül. De akkor vagy meg lehet cáfolni téged, vagy tulajdonképpen nem azt csináltad, amit akartál.
EPSZILON: Nem értem ezt a homályos célzást.

megfogalmazta a köznyelvi ítéletek logikai formáját, azaz amikor lefordította a köznyelvet mesterséges nyelvre, azt hitte — legalábbis a „mézeshetek idején" (*B. Russell:* Filozófiai fejlődésem. Id. kiad. 90. o.) —, hogy csalhatatlan intuíció vezérli. Popper az esszencialista definíciók elleni jogos kirohanásában nem fordít kellő figyelmet a fordításos definíciók fontos problémájára és szerintem ezzel magyarázható, hogy (legalábbis számomra) nem kielégítően bánik a logikai formával. (*K. R. Popper:* Logic without Assumptions. Id. kiad. 273. o.) Szerinte (és itt Tarskit követi) az érvényes levezetés definíciója *csak* a formulákban szereplő jelek jegyzékétől függ. *De egy intuitív levezetés érvényessége a levezetésnek a köz- (vagy aritmetikai, geometriai stb.) nyelvről a logikai nyelvre való fordításától is függ; függ az általunk elfogadott fordítástól.*

THÉTA: Majd megérted, ha akarod. Ésszerűnek látszik az ellenpéldáról vallott elképzelésed jellemzése. De ha ez az, amit ellenpéldának nevezel, akkor „tökéletesen közismert terminusaid" jelentése kevéssé fontos. S ha állításod jogos, pontosan ez bizonyításod értéke. A bizonyítás, ha cáfolhatatlan — éppen a cáfolhatatlan bizonyítás fogalma szerint —, nem függ a specifikus „tökéletesen közismert terminusok" jelentésétől. Bizonyításod terhét tehát — ha igazad van — teljes egészében a nem specifikus alapterminusok — jelen esetben az aritmetikai, halmazelméleti, logikai terminusok — jelentése viseli, és a legkevésbé sem specifikus terminusaid jelentése.

Az ilyen bizonyításokat *formális bizonyítások*nak nevezem, mivel egyáltalán nem függnek a specifikus terminusok jelentésétől. A *formalitás mértéke* bizonyára a nem specifikus terminusoktól függ. Valóban nagyon fontos e terminusok — formatív terminusoknak nevezem őket — tökéletesen ismert jellege. Jelentésük rögzítésével megállapítjuk, mi fogadható el ellenpéldának és mi nem. Ezzel szabályozható az ellenpéldák áradata. Ha a tételre nincs ellenpélda, a tételt *tautológiá*nak nevezzük, esetünkben aritmetikai-halmazelméleti tautológiának.
ALFA: Úgy tűnik, tautológiáink skálája — a választott kvázilogikai állandóknak megfelelően — jó széles. Itt azonban egy csomó problémát látok. Először is: honnan tudjuk egy tautológiáról, hogy tautológia?
KAPPA: *Sohasem tudhatod* minden kétséget kizáróan. De ha *komoly* kételyeid vannak egy uralkodó elmélettel kapcsolatban, dobd sutba, és cseréld fel egy másik uralkodó elmélettel![1]

1 Az uralkodó elmélet ilyen megváltozása egész tudásunk átszervezésével jár. Az ókorban az aritmetika paradox jellege, sőt, látszólagos következetlensége, arra késztette a görögöket, hogy mondjanak le az aritmetikáról mint uralkodó elméletről, és helyettesítsék a geometriával. Arányelméletük azt a célt szolgálta, hogy az aritmetikát lefordítsák a geometriára. Meg voltak győződve arról, hogy az egész csillagászat és az egész fizika lefordítható a geometria nyelvére.
Descartes nagy újítása volt a geometria felcserélése az algebrával; talán azért, mert azt hitte, hogy az uralkodó elméletben magának az elemzésnek kell az igazságra vezetnie.

A szerkesztők megjegyzése: A dialógusnak ez a része Lakatos értekezésében itt véget ér. Megpróbáltuk volna rábeszélni Lakatost arra, hogy az alábbiakhoz hasonlóan folytassa tovább:

THÉTA: De abból, ami épp most hangzott el, úgy tűnik, az következik, hogy ha olyan rendszerekbe tudjuk önteni bizonyításainkat, amelyekben az uralkodó elmélet a logika, akkor, mihelyt logikánkat illetően nincs komoly kételyünk, képesek leszünk biztosítani dedukcióink megdönthetetlenségét, és a szóban forgó bizonyítás helyett minden kételyt a lemmákra, a tétel előzményeire háríthatunk.

EPSZILON: Örülök, hogy végre legalább Théta megértette. Bizonyításomat valóban olyan rendszerbe lehet önteni, amelyben az uralkodó elmélet a logika. Ebben a rendszerben azt a feltételes ítéletet, amelynek előtagjába minden lemmát beépítettünk, be lehet bizonyítani, és tudjuk, hogy (a formatív „logikai" kifejezések adott készletétől függően) *nem létezik* ellenpélda egyetlen olyan ítéletre sem, amely ily módon bebizonyítható. Ez a feltételes ítélet igaz marad a leíró terminusok átértelmezésétől függetlenül.

LAMBDA: Honnan „tudjuk"?

EPSZILON: Nem tudjuk *bizonyosan*; ez egy informális logikai tétel. Másfelől azonban tudjuk, hogy egy ilyen rendszerben bármely állítólagos bizonyítás teljesen mechanikusan ellenőrizhető egy olyan eljárással, amely véges számú lépésben garantáltan pozitív választ ad, s így kimutatható, hogy valóban bizonyítás-e vagy sem. Ilyen rendszerekben viszont a te „bizonyításelemzésed" trivialitássá süllyed.

ALFA: Azt mégis el kell ismerned, Epszilon, hogy a „bizonyításelemzés" megőrzi jelentőségét az informális matematikában, s hogy a formális bizonyítások mindig informális bizonyítások fordításai, a fordítással kapcsolatban felmerült problémák pedig nagyon is valóságosak.

LAMBDA: De Epszilon, honnan tudhatjuk, hogy a bizonyítás ellenőrzése mindig pontos?

EPSZILON: Olthatatlan szomjad a bizonyosságra most már igazán kezd idegesítővé válni, Lambda! Hányszor kell még elmondanom, hogy semmit sem tudunk bizonyosan? Vágyakozásod a bizonyosságra mégis rendkívül unalmas kérdések felvetésére késztet téged, és érzéketlenné tesz az érdekes problémák iránt.

A modern matematika „szigorúsági forradalma" voltaképpen az aritmetika uralkodó jellegének helyreállításából állt; ez a hatalmas program a matematika aritmetizálását jelentette Cauchytól Weierstrassig. A döntő lépés a valós számok elméletének kidolgozása volt; ezt jó néhány gyakorló matematikus mesterkéltnek tartotta, ugyanúgy, mint a görögök „mesterkélt" arányelméletét.
Russell viszont a logikát tette az egész matematika uralkodó elméletévé. E kérdés történetét esetleg új megvilágításba helyezheti a metamatematika történetének egy olyan értelmezése, amely azt egy uralkodó elmélet kereséseként fogja fel. Ez az értelmezés talán bebizonyíthatja: Gödelnek az a „felfedezése", hogy a metamatematika természetes uralkodó elmélete az aritmetika, egyenesen vezetett el a kutatás jelenlegi szakaszához, és mind az aritmetikában, mind a metamatikában új távlatokat nyitott.
Egy másik figyelemreméltó euklideszi fordítás volt a valószínűségelmélet modern beágyazása a mértékelméletbe.
Az uralkodó elméletek és változásaik nagymértékben meghatározzák a tudomány fejlődését általában is. A racionális mechanikának — mint a fizika uralkodó elméletének — a kidolgozása, majd összeomlása központi szerepet játszott a modern tudomány történetében. A legújabb kori tudomány izgalmas sajátosságai közé tartozik a biológia harca az ellen, hogy a kémiára, a pszichológiáé az ellen, hogy a fiziológiára fordítsák le. A fordítási eljárások a problémák roppant tárházai, olyan hatalmas gondolkodási sémákat képviselő történelmi tendenciák, amelyek legalább annyira fontosak, mint a hegeli triáda. Ezek a fordítások általában meggyorsítják mind az uralkodó, mind a beolvasztott elmélet fejlődését, de később, amint a fordítás gyenge pontjai előtérbe kerülnek, a fordítás a további fejlődés gátjává válik.

MÉG EGY ESETTANULMÁNY A BIZONYÍTÁSOK ÉS CÁFOLATOK MÓDSZERÉRE

1. A „folytonosság elvé"-nek Cauchy-féle megvédése

A bizonyítások és cáfolatok módszere a matematikai felfedezés igen általános heurisztikus sémája. Úgy tűnik, mégis csak az 1840-es években fedezték fel, sokan még ma is paradoxonnak vélik, és sehol sem fogadják el igazán. Ebben a függelékben megkísérlem összefoglalni egy matematikai analízisbeli bizonyításelemzés történetét, és megpróbálom megkeresni a megértésével és elismerésével kapcsolatos ellenállás forrásait. Először ismét felvázolom a bizonyítások és cáfolatok módszerét, amelyet már a Descartes—Euler-sejtés Cauchy-féle bizonyítására vonatkozó esettanulmányommal szemléltettem.

A matematikai felfedezésnek — vagy az informális matematikai elméletek fejlődésének — van egy egyszerű sémája. Ez a következő szintekből áll:[1]

1. Primitív sejtés.

2. Bizonyítás (egy durva gondolatkísérlet vagy érvelés, amely a primitív sejtést rész-sejtésekre vagy lemmákra bontja).

3. „Globális" ellenpéldák (a primitív sejtéssel szembeni ellenpéldák) merülnek fel.

[1] Mint már hangsúlyoztam, a tényleges történelmi séma némiképp eltérhet ettől a heurisztikus sémától. Időnként a negyedik szint is megelőzheti a harmadikat (még a heurisztikus sorrendben is), egy szellemes bizonyításelemzés sugallhat ellenpéldát is.

*4. A bizonyítás ismételt vizsgálata: azonosítják a „bűnös lemmát", amelynek a globális ellenpélda „helyi" ellenpéldája. Ez a bűnös lemma korábban esetleg „rejtett" maradt, vagy tévesen azonosították. Most explicitté teszik ezt a lemmát, és feltételként beépítik a primitív sejtésbe. A tétel — a helyesbített sejtés — felváltja a primitív sejtést. Ennek legfőbb új jellemzője az új, bizonyításból származó fogalom.**

Ez a négy szint alkotja a bizonyításelemzés lényeges magvát, de vannak még gyakran előforduló további szintek is:

5. Megvizsgálják más tételek bizonyításait, hogy megnézzék, előfordul-e bennük az újra megalapozott lemma vagy az új, bizonyításból eredő fogalom. Esetleg megállapítják, hogy ez a fogalom különböző bizonyítások közös metszéspontjában található, s ennélfogva alapvető jelentőségű.

6. Ellenőrzik az eredeti és most megcáfolt sejtés mindeddig elfogadott következményeit.

7. Az ellenpéldákat új példákká változtatják, új vizsgálati területek tárulnak fel.

Szeretnék most elvégezni egy másik esettanulmányt. Itt a *primitív sejtés* az, hogy a folytonos függvények konvergens sorainak határértéke maga is folytonos. Először Cauchy bizonyította ezt a sejtést, hiszen igaz voltát korábban magától értetődőnek tekintették, s ezért az egész XVIII. században szükségtelennek vélték a bizonyítását. Az „ami a

* *A szerkesztők megjegyzése:* Más szóval, ez a módszer (részben) abból áll, hogy $P_1 \ldots, P_n$ ítéletsorozatot alkotunk úgy, hogy feltételezzük: a szóban forgó tárgyak bizonyos tartományára igaz $P_1 \& \ldots \& P_n$, és úgy látszik, hogy ennek következménye az S primitív sejtés. Kiderülhet, hogy nem ez a helyzet, más szóval, találunk olyan eseteket, amelyekben S hamis („globális ellenpéldák"), de P_1-től P_n-ig minden állítás igaz. Ez egy új, P_{n+1} lemma megfogalmazására vezet, amelyet szintén megcáfol az ellenpélda („helyi ellenpélda"). Az eredeti bizonyítást így egy új, a következő feltételes ítéletben összefoglalható bizonyítás váltja fel:

$$P_1 \& \ldots \& P_n \& P_{n+1} \longrightarrow S$$

Az ellenpélda most már nem teszi kérdésessé e feltételes ítélet (logikai) igazságát (mivel az előtag most hamis, ezért a feltételes ítélet igaz).

határértékig igaz, az a határértékre is igaz" „axióma" speciális esetének tartották.[1] A sejtés és bizonyítása Cauchy nevezetes művében található.[2]

Feltéve, hogy ezt a „sejtést" mindaddig triviálisan igaznak tartották, miért érezte szükségesnek Cauchy, hogy bizonyítsa? Előzőleg bírálta valaki a sejtést?

Mint majd látni fogjuk, a helyzet nem volt ilyen egyszerű. Utólag könnyen vagyunk bölcsek, így most már érthető, hogy Fourier egyik munkája vetett fel ellenpéldákat Cauchy sejtésével szemben.[3] Fourier-nak ez az írása valóban tartalmaz egy példát arra, ami mai fogalmaink szerint egy folytonos függvényekből álló konvergens sor, de összege Cauchy-féle értelemben nem folytonos:

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots \qquad (1)$$

Egészen világos azonban, hogy Fourier hogyan vélekedett erről a sorról (és világos, hogy a modern felfogástól eltért az álláspontja):

a) Azt állítja, hogy a sor mindenütt konvergens.

b) Azt állítja, hogy a sor határfüggvénye olyan különálló egyenes szakaszokból áll, amelyek párhuzamosak az x tengellyel, és hosszuk egyenlő. Ezek a párhuzamosok váltakozva a tengely felett és alatt

1 *W. Whewell:* History of Scientific Ideas. I. k. *In:* The Philosophy of the Inductive Sciences. A harmadik kiadás első része. 1858. 152. o. Whewell 1858-ban legalább tíz évvel elmaradt korától. Az elv a folytonosság leibnizi elvéből ered. Boyer említi (*C. Boyer:* The Concepts of the Calculus. New York 1949. 256. o.) az elv Lhuilier-től származó, jellemző újrafogalmazását (*S. A. J. Lhuilier:* Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin 1786. 167. o.).

2 *A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad. 131. o.

3 *J. Fourier:* Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (Extrait). *In:* „Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique de Paris", 1808. 112—116. o. A Laplace-ból, Legendre-ből és Lagrange-ból álló zsűri Fourier-nak ítélte az 1812-es *grand prix de mathématiques*-ot ezért az értekezésért, amely csak Fourier 1822-ben kiadott klasszikus műve, a *Théorie analytique de la chaleur* után, Cauchy tankönyve után egy évvel jelent meg, de tartalma már közismert volt.

helyezkednek el; bármely két szakasz között a távolság $\pi/4$, és olyan rájuk merőleges szakaszok kötik össze őket, amelyek maguk is részei a görbének.[1]

Sokatmondók Fourier szavai a gráfban szereplő függőlegesekről. Ezeket a határfüggvényeket (bizonyos értelemben) folytonosnak tekintette. Fourier bizonyára bármilyen függvényt folytonosnak tartott, ha gráfja megrajzolható úgy, hogy a ceruzát nem kell felemelni a papírról. Ezért Fourier nem gondolta volna magáról, hogy ellenpéldákat konstruál Cauchy folytonosság-axiómájával szemben.[2] A folytonosság Cauchytól eredő későbbi jellemzése fényében került csak sor arra, hogy egyes Fourier-sorok határfüggvényét kezdték nem folytonosnak tekinteni, s így magukat a sorokat is a Cauchy-sejtés ellenpéldáinak

1 *J. Fourier:* i. m. 177. és 178. szakasz.

2 Miután ezt leírtam, felfedeztem, hogy a „nem folytonos" terminus — nagyjából a Cauchy által használt értelemben — megjelenik Poisson 1807-ből és Fourier 1809-ből származó, mind ez ideig kiadatlan kézirataiban is (ezeket dr. J. Ravetz tanulmányozta, aki szívélyesen lehetővé tette számomra a tulajdonát képező másolatok megvizsgálását). Ez kétségtelenül bonyolítja álláspontomat, bár nem cáfolja meg. Fourier-nak különböző időpontokban nyilvánvalóan két különböző elképzelése volt a folytonosságról, és ez a két különböző fogalom valóban egész természetesen két különböző területről származik. Ha egy

$$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\dots$$

sorral értelmezett függvényt egy zsinór kezdő helyzetének tekintünk, bizonyára folytonosnak fogjuk tartani, és a függőlegesek kiiktatása — Cauchy definíciója megköveteli ezt — természetellenesnek látszik. Ha viszont ezt a függvényt, mondjuk, egy drót hőmérsékletét ábrázoló összefüggésként értelmezzük, akkor a függvény nyilvánvalóan nem folytonosnak tűnik. Ezek a megfontolások két sejtést sugallnak. Először is, lehet, hogy Cauchy nevezetes folytonosság-definícióját, amely ellentétes a függvénygörbe „zsinór-értelmezésével", éppen Fourier hőtani vizsgálatai ösztönözték. Másodszor, lehet, hogy Fourier éppen azért ragaszkodott a függőlegesekhez ezeknek a („hőtani értelmezés" szerint) nem folytonos függvényeknek a görbéjében, mert nem akart ellentmondásba kerülni a Leibniz-elvvel. * *A szerkesztők megjegyzése:* Fourier matematikai munkásságáról további információk találhatók *I. Grattan-Guinness* (*J. R. Ravetz*cel együtt írt) „Joseph Fourier, 1768—1830" (M. I. T. Press, 1972.) című művében.

tartani. Elfogadva a folytonosságnak ezt az új, intuíció-ellenes definícióját, Fourier ártalmatlan folytonos rajzai a régi, jól bevált folytonosságelv kártékony ellenpéldáinak tűntek.

Cauchy definíciója kétségtelenül oly módon fordította le az aritmetika nyelvére a folytonosság egyszerű fogalmát, hogy a „közönséges józan észt" csak megbotránkoztathatta.[1] Miféle folytonosság az, ami azt jelenti, hogy ha egy kicsit elforgatjuk egy folytonos függvény görbéjét, akkor nem folytonos függvénnyé válik?*

Vagyis ha a folytonosság intuitív fogalmát Cauchy fogalmával helyettesítjük, akkor (és csakis akkor!) tűnhet úgy, hogy Fourier eredményei ellentmondanak a folytonosság axiómájának. Ez erős, talán döntő érvnek látszik Cauchy új definíciói ellen (nemcsak a folytonosság, hanem más fogalmak — például a határérték — definíciója ellen is). Nem csoda tehát, hogy Cauchy meg akarta mutatni, hogy valóban be tudja bizonyítani a folytonosság axiómáját a folytonosság általa adott új értelmezésének megfelelően, s ezzel bizonyságát adja annak, hogy definíciója az adekvátság legszigorúbb követelményének is megfelel. Sikerült kidolgoznia a bizonyítást, s azt hitte, hogy ezzel halálos csapást mér Fourier-ra, erre a tehetséges, de zavaros és pontatlan dilettánsra, aki akaratlanul kétségbe vonta definícióját.

Ha Cauchy bizonyítása helyes volna, akkor Fourier példái — a látszat ellenére — természetesen nem lehetnének valódi *ellen*példák. Az egyik módja annak, hogy ezt bebizonyítsák, az volna, ha bebizonyítanák: azok a sorok, amelyek szemmel láthatóan olyan függvényekhez konvergálnak, amelyek Cauchy értelmezése szerint nem folytonosak, egyáltalán nem konvergensek.

1 Azaz a húrszerűséget vagy görbeszerűséget feltételező józan ész.

* *A szerkesztők megjegyzése:* Talán nem is a folytonosságra vonatkozó intuitív fogalmunk szenved itt sérelmet, hanem az a hitünk, hogy bármely olyan görbe, amely egy függvényt ábrázol, enyhe elforgatás után még mindig valamilyen függvényt jellemez. Fourier görbéje intuitív szempontból folytonos, és ez az intuíció még mindig megmagyarázható a folytonosság ε, δ definíciójával (amelyet Cauchynak szoktak tulajdonítani); Fourier görbéje ugyanis — a függőlegesekkel együtt — paraméteres alakban jellemezhető két folytonos függvénnyel.

És ez tetszetős feltevés volt. Ezekben a kritikus esetekben Fourier maga is kételkedett sorainak konvergenciájában. Észrevette, hogy a konvergencia lassú: „A konvergencia nem elég gyors ahhoz, hogy jó közelítést adjon, de az egyenlet igazsága szempontjából kielégítő."[1]

Utólagos bölcsességgel érthető, hogy bizonyos értelemben a következő tény is igazolta Cauchynak azt a reményét, hogy ezekben a kritikus esetekben a Fourier-sorok nem konvergálnak (és ezért nem állítják elő a függvényt). Ahol a határfüggvény nem folytonos, a sor az $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ értékhez tart, és nem egyszerűen $f(x)$-hez. Csak akkor tart $f(x)$-hez, ha $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. Ezt viszont 1829 előtt nem tudták, és a közvélemény először voltaképpen inkább Fourier, mint Cauchy mellett állt. A Fourier-sorok működőképesnek látszottak, és amikor Abel 1826-ban, öt évvel Cauchy bizonyításának megjelenése után, dolgozatának egyik lábjegyzetében[2] megemlítette, hogy Cauchy tétele alól vannak „kivételek", ez meglehetősen furcsa kettős győzelmet jelentett: elfogadták a Fourier-sorokat, de elfogadták Cauchy megdöbbentő folytonosság-definícióját, valamint az ennek alkalmazásával bizonyított tételét is.

1 *J. Fourier:* Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides (Extrait). Id. kiad. 177. szakasz. Ez a megjegyzés természetesen távol áll attól a felfedezéstől, hogy ezeken a helyeken a konvergencia végtelenül lassú, amelyre csak a Fourier-sorokkal való számolás 40 évi tapasztalata után került sor. Ráadásul, valószínűleg nem jöhetett volna létre ez a felfedezés a Fourier-sejtés Dirichlet-től származó alapvető helyesbítése előtt, amely bebizonyította, hogy a Fourier-sorokkal csak azok a függvények állíthatók elő, amelyek értéke a szakadási helyeken $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

2 *N. H. Abel:* Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2}x^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3\ldots$ *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1826. 316. o.

Pontosan ennek a kettős győzelemnek a fényében tűnt most már úgy, hogy kell lenni *kivételeknek* a folytonosság elvének általunk vizsgált specifikus változata alól, noha Cauchy hibátlanul bebizonyította ezt az elvet.

Cauchy bizonyára ugyanarra a következtetésre jutott, mint Abel, mivel még ugyanebben az évben bizonyítást adott a Fourier-sorok konvergenciájáról, anélkül persze, hogy feladta volna a folytonosság maga alkotta jellemzését.[1] Mégis igen kínosnak találhatta a helyzetet. Soha nem jelent meg a *Cours d'analyse* második kötete. És ami még gyanúsabb, az első kötetet sem adatta ki újra; hagyta, hogy tanítványa, Moigno kiadja az előadásokon készített jegyzeteit, amikor már túl nagy szükség volt egy tankönyvre.[2]

Mivel Fourier példáit most már ellenpéldaként értelmezték, magától értetődő volt a tanácstalanság: hogy lehet egy bizonyított tétel hamis, avagy hogy „engedhet meg kivételeket?" Már beszéltünk arról, hogy ugyanebben a korban milyen zavarónak találták az Euler-tétel alóli „kivételeket", amelyek annak ellenére bukkantak elő, hogy a tétel be volt bizonyítva.

1 *A. L. Cauchy:* Mémoire sur les développements des functions en séries périodiques. *In:* „Mémoires de l'Académie des Sciences", 1826. 603—612. o. A bizonyítás egy javíthatatlanul hamis feltételezésen alapul. (Lásd pl.: *B. Riemann:* Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *In:* „Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", 1868. 87—132. o.)

2 *F. N. M. Moigno:* Leçons de calcul differentiel et de calcul intégral. Párizs 1840—41.

2. Seidel bizonyítása és az egyenletes konvergencia bizonyításból származó fogalma

Mindenki úgy érezte, hogy ez a Cauchy—Fourier-ügy nem egyszerűen ártalmatlan rejtély, hanem az egész új, „szigorú" matematika végzetes szégyene. Dirichlet a Fourier-sorokról írt híres dolgozatában[1] meg sem említette a szembetűnő ellentmondást, noha azzal foglalkozott, hogy pontosan megmutassa, *hogyan* állítanak elő folytonos függvények konvergens sorai nem folytonos függvényeket, és nyilvánvalóan nagyon jól ismerte a folytonosság elvének Cauchy-féle változatát.

A rejtélyt végül Seidel oldotta meg: felismerte a bűnös rejtett lemmát Cauchy bizonyításában.[2] Erre azonban csak 1847-ben került sor. Miért ilyen későn? E kérdés megválaszolásához meg kell vizsgálnunk kicsit közelebbről Seidel nevezetes felfedezését.

$\sum f_n(x)$ legyen folytonos függvényeknek egy konvergens sora, és tetszőleges n-re vezessük be a következő definíciókat: $S_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n} f_m(x)$ és $r_n(x)=\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m(x)$.

Cauchy bizonyítása a következő feltételekből indul ki:

Tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén

(1) van olyan δ, hogy ha $|b|<\delta$, akkor tetszőleges b-re $|S_n(x+b)-S_n(x)|<\varepsilon$ (az $S_n(x)$ folytonossága miatt van ilyen δ);

(2) van olyan N, hogy minden $n\geqq N$ számra $|r_n(x)|<\varepsilon$ (a $\sum f_n(x)$ sor konvergenciája miatt van ilyen N);

(3) van olyan N', hogy minden $n\geqq N'$ számra $|r_n(x+b)|<\varepsilon$ (a $\sum f_n(x+b)$ sor konvergenciája miatt van ilyen N').

1 *P. G. L. Dirichlet:* Sur la convergence des séries trigonometriques que servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *In:* „Journal für die Reine und Angewandte Mathematik", 1829. 157—169. o.

2 *P. L. Seidel:* Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen Darstellen. Id. kiad.

Ezekből a feltételekből Cauchy konklúziója:

$|f(x+b)-f(x)|=|S_n(x+b)+r_n(x+b)-S_n(x)-r_n(x)|\leqq|S_n(x+b)-S_n(x)|+|r_n(x)|+|r_n(x+b)|<3\varepsilon$ minden $|b|<\delta$-ra.

Mármost azok a globális ellenpéldák, amelyeket a Cauchy-féle értelemben nem folytonos függvényekhez konvergáló folytonos függvényekből álló függvénysorok jelentenek, azt mutatják, hogy valami baj van ezzel a (durván megfogalmazott) érveléssel. De hol a bűnös lemma?

Kicsit gondosabb bizonyításelemzéssel (ugyanazokat a jelöléseket alkalmazva, mint az előbb, csak azt is megjelölve, hogy egyes mennyiségek mitől függnek) a következőt kapjuk:

(1′) $|S_n(x+b)-S_n(x)|<\varepsilon$, ha $|b|<\delta(\varepsilon, x, n)$;

(2′) $|r_n(x)|<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon, x)$;

(3′) $|r_n(x+b)|<\varepsilon$, ha $n>N(\varepsilon, x+b)$,

ezért $|S_n(x+b)+r_n(x+b)-S_n(x)-r_n(x)|=|f(x+b)-f(x)|<\varepsilon$, ha $n>\max_z N(\varepsilon, z)$ és $|b|<\delta(\varepsilon, x, n)$.

A rejtett lemma az, hogy ez a maximum — $\max_z N(\varepsilon, z)$ — bármely rögzített ε mellett létezik. Ezt nevezték el később az *egyenletes konvergencia* követelményének.

Valószínűleg három fő akadály állta útját ennek a felfedezésnek. Az *első* az volt, hogy Cauchy lazán alkalmazta a „végtelenül kicsi" mennyiségek fogalmát.[1] A *második* az volt, hogy ha egyes matematikusok észre is vették, hogy ebben a bizonyításban benne foglaltatik az a feltételezés, hogy az N-ek végtelen halmazának létezik maximuma, nem gondolkodtak tovább a problémán. A maximum-problémák létezésével kapcsolatos bizonyítások először a Weierstrass-

1 Emiatt *A. L. Cauchy* Note sur la séries convergentes dont les divers terms sont des fonctions continues d'une variable réelle on imaginaire entre des limites données (*In:* „Comptes Rendus Hebdomadaires de Séances de l'Académie des Sciences", 1853. 454—459. o.) című írásában sem világos, kritikus szemlélettel értékelte régi bizonyítását, és tételét sem tudta világosan megfogalmazni.

iskolában jelennek meg. A *harmadik* és legfőbb akadály azonban az euklideszi metodológiának, a XIX. század eleji matematika jó és rossz szellemének, uralma volt.

De mielőtt ezt általánosságban tárgyalnánk, nézzük meg, hogyan oldja meg Abel azt a problémát, amelyet a Fourier-ellenpéldák vetnek fel a Cauchy-tétellel kapcsolatban! Be fogom bizonyítani, hogy Abel ezt a „kivételek kizárása" primitív módszerével oldja (vagy inkább „oldja") meg.[1]

3. Abel kivétel-kizáró módszere

Abel csak egy lábjegyzetben említi meg a problémát, ami szerintem a binomiális sorokról szóló híres dolgozatának[2] alapvető háttérproblémája. Ezt írja: „Úgy vélem, vannak kivételek Cauchy tétele alól", és rögtön példaként idézi a

$$\sin \Phi - \frac{1}{2} \sin 2\Phi + \frac{1}{3} \sin 3\Phi - \ldots \text{sort.}^{3}$$

Abel hozzáteszi, hogy „mint ismeretes, sok ehhez hasonló példa van". Az ellenpéldára úgy válaszol, hogy elkezd találgatni: „Mi Cauchy tételének biztonságos érvényességi tartománya?"

Válasza a következő: az analízis tételeinek általában és konkrétan a határfüggvény folytonosságáról szóló tételnek az érvényességi tartománya a hatványsorokra korlátozódik. A folytonosság elve alól min-

1 L.: 46—55. o.

2 *N. H. Abel:* Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2}x^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3\ldots$$ Id. kiad. 316. o.

3 Abel nem beszél arról, hogy már Fourier is éppen ezt a példát említette ebben a kontextusban.

den ismert kivétel trigonometrikus sor volt, ezért Abel azt javasolta, hogy vonuljunk vissza a hatványsorok biztonságos határai mögé, Fourier kedvelt trigonometrikus sorait, ezt az ellenőrizhetetlen dzsungelt pedig — ahol a kivétel a szabály és a siker csoda — rekesszük ki a vizsgálatból.

Hansteenhez írt, 1826. március 29-i levelében Abel a „nyomorúságos euleri indukciót" hamis és megalapozatlan általánosításokra vezető módszerként jellemezte, és felteszi a kérdést, hogyan lehetséges, hogy az ehhez hasonló eljárások valójában olyan *kevés* felfordulást okoztak. Válasza így hangzik: „Szerintem az az oka ennek, hogy az analízisben az ember többnyire olyan függvényekkel foglalkozik, amelyek hatványsorokkal állíthatók elő. Mihelyt másféle függvények lépnek be — ami csak ritkán fordul elő — az [indukció] többé nem működik, és ezekből a hamis következtetésekből végtelen sok helytelen tétel származik; egyik tétel maga után vonja a másikat. Sok ilyent megvizsgáltam, és elég szerencsés voltam ahhoz, hogy megoldjam a problémát..."[1]

1 *N. H. Abel:* Letter to Hansteen. Id. kiad. A levél folytatása is érdekes, és jól tükrözi Abel kivétel-kizáró módszerét: „Amikor az ember egy általános módszer szerint jár el, ez nem túl nehéz; nekem azonban nagyon óvatosnak kellett lennem, mert azok a tételek, amelyeket egyszer szigorú bizonyítás (azaz minden bizonyítás) nélkül elfogadtam, olyan mélyen gyökereznek bennem, hogy minden pillanatban fennáll az a veszély, hogy további vizsgálat nélkül alkalmazom őket." Így hát Abel sorra megvizsgálta ezeket az általános sejtéseket, és megpróbált rájönni érvényességi tartományukra.

Ez az abszolút világos hatványsorokra való karteziánus önkorlátozás magyarázza azt, hogy miért kezelte olyan szigorúan a Taylor-féle sorfejtéseket: „Taylor tétele, az infinitezimális számítás egyik alapja, semmivel sem megalapozottabb. Egyetlen szigorú bizonyítást találtam, mégpedig Cauchy úr *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* című munkájában, ahol ő bebizonyította, hogy

$$\Phi(x+a)=\Phi(x)+a\Phi'(x)+a^2\Phi''(x)+\ldots,$$

mindaddig, amíg a sor konvergens; de az ember minden esetre alkalmazza ezt, anélkül, hogy odafigyelne." (*N. H. Abel:* Letter to Holmboë. *In:* Oeuvres complètes. II. k., Id. kiad. 257—258. o.)

Abel dolgozatában található — szerintem Leibniz klasszikus metafizikai elvével való küszködéséből eredő — híres tétele az alábbi korlátozott formában:

„Ha az

$$f\alpha = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots + v_m\alpha^m + \ldots$$

sor α adott δ értéke esetén konvergens, akkor minden δ-nál kisebb érték esetén is konvergens lesz, és β állandóan csökkenő értékei esetén az $f(\alpha-\beta)$ függvény korlátlanul megközelíti az $f\alpha$ határértéket, amennyiben α kisebb vagy egyenlő, mint δ."[1]

A modern, racionalista, a matematika történetét az ismeretek változatlan módszer alapján végbemenő homogén fejlődésének történeteként szemlélő matematikatörténészek feltételezik, hogy bárki, aki felfedez egy globális ellenpéldát és olyan új sejtést javasol, amelyet a kérdéses ellenpélda nem cáfol, automatikusan a megfelelő rejtett lemmát és bizonyításból származó fogalmat is felfedezi. Így ezek a történészek Abelnek tulajdonítják az egyenletes konvergencia felfedezését. A tekintélyes *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*ben Pringsheim azt írja, hogy Abel „igazolta annak a tulajdonságnak a létezését, amelyet ma egyenletes konvergenciának nevezünk".[2] Hardy osztja Pringsheim nézetét, s egyik dolgozatában azt írja, hogy „az egyenletes konvergencia gondolata implicit módon benne van Abel híres tételének bizonyításában".[3] Bourbaki még nyilvánvalóbban téved. Szerinte Cauchy „eleinte nem érzékelte az egyszerű és az egyenletes konvergencia közti különbséget, és azt hitte, képes bebizonyítani, hogy

1 *N. H. Abel:* Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2}x^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3\ldots$ Id. kiad. 314. o. * *A szerkesztők megjegyzése:* Úgy látszik, Abel megfeledkezett az α körüli zárójelről.

2 *A. Pringsheim:* Grundlagen der allgemeinen Functionenlehre. *In:* M. Burkhardt, W. Wutinger és R. Fricke (szerk.): Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. II. k. Első rész. Lipcse 1916. 34. o.

3 *G. H. Hardy:* Sir George Stokes and the Concept of Uniform Convergence. *In:* „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", 1918. 148. o.

minden konvergens folytonos függvényekből álló sor összege folytonos függvény. A hibát csaknem azonnal észrevette Abel, aki azonban klaszszikussá vált, ebben a konkrét esetben lényegében az egyenletes konvergencia gondolatát alkalmazó érvelésével bebizonyította, hogy minden teljes [?] sor összege folytonos a konvergencia-intervallum belsejében. Csak az maradt hátra, hogy az egyenletes konvergencia fogalmát általánosan is megoldják; ezt Stokes és Seidel 1847—48-ban, maga Cauchy pedig 1853-ban végezte el, mindegyikük függetlenül a többitől."[1] Ahány mondat, annyi tévedés. Abel nem ismerte fel Cauchynak azt a hibáját, amelyet a kétfajta konvergencia azonosításával követett el. Az ő bizonyítása semmivel sem hasznosítja jobban az egyenletes konvergencia fogalmát, mint Cauchyé. Abel és Seidel eredményei nem mint „különös" és „általános" viszonyulnak egymáshoz, hanem két egészen különböző szinten vannak. Abel még csak észre sem vette, hogy nem a megfelelő függvények körét kell korlátozni, hanem azt, hogy hogyan konvergálnak! *Tulajdonképpen Abel számára csak egyfajta konvergencia létezik, az egyszerű konvergencia*, s bizonyítása hamis bizonyosságának titka óvatos (és szerencsés) *zéró-definícióiban* rejlik:[2] mint most már tudjuk, hatványsorok esetében az egyszerű konvergencia egybeesik az egyenletes konvergenciával![3]

1 *N. Bourbaki:* Topologie général. Párizs 1949. 65. o. és Éléments d'histoire des mathématiques. Párizs 1960. 228. o.

2 L.: 46—55. o.

3 Két matematikus volt, aki észrevette, hogy Abel bizonyítása nem egészen hibátlan. Az egyik maga Abel, aki halála után megjelent dolgozatában ismét nekiveselkedett a problémának, ismét sikertelenül. (*N. H. Abel:* Sur les séries. *In:* Oeuvres complètes. II. k. Id. kiad. 202. o.) A másik Sylow, Abel összegyűjtött munkáinak társszerkesztője, aki a tétellel kapcsolatban egy lábjegyzetben kimutatja, hogy a bizonyításban egyenletes konvergenciát és nem — mint Abel — egyszerű konvergenciát kell megkövetelni. Sylow azonban nem az „egyenletes konvergencia" kifejezést használta, amit — úgy látszik — nem ismert (Jordan *Cours d'analyse*-ének második kiadása akkor még nem jelent meg), hanem Du Bois-Reymond egy későbbi általánosítására utalt; ez csak azt mutatja, hogy még ő sem látta világosan a hiba természetét. Reiff azzal a naiv érvvel vetette el Sylow kritikáját, hogy Abel tétele érvényes. (*R. Reiff:* Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.) Reiff

A történészeket bírálván, azt is meg kell említenem, hogy általában Abelnek tulajdonítják az első ellenpéldát Cauchy tételére. Csak Jourdain vette észre, hogy ez már Fourier-nél előfordul. Ő viszont, a már említett történelmietlen szemléletnek megfelelően, ebből azt a következtetést vonja le, hogy Fourier — akinek Jourdain nagy csodálója volt — közel került az egyenletes konvergencia fogalmának felfedezéséhez.[1] Mindeddig még egyetlen történész sem vette észre, hogy egy ellenpéldának esetleg meg kell küzdenie a felismertetésért, és még a felismerés sem vezet el feltétlenül, automatikusan a rejtett lemmához, s ezáltal a bizonyításból származó kérdéses fogalomhoz.

4. Akadályok a bizonyításelemzés módszerének felfedezése útjában

De térjünk vissza a fő kérdésre! 1821 és 1847 között miért nem sikerült a legjelentősebb matematikusoknak sem megtalálni Cauchy bizonyításának egyszerű hibáját, és helyesbíteni mind a bizonyításelemzést, mind a tételt?

Az első válasz az, hogy nem ismerték a bizonyítások és cáfolatok

azt mondja, hogy bár Cauchy alapozta meg a konvergencia elméletét, Abel alakította ki a sorok folytonosságának elméletét: „Cauchy és Abel eredményeit röviden összegezve, azt mondhatjuk, Cauchy fedezte fel a végtelen sorok konvergenciájának és divergenciájának elméletét az »Algebrai analízis«-ben, és Abel a sorok folytonosságának elméletét »Értekezés a binomiális sorokról« című írásában." (Uo. 178—179. o.) Ezt mondani 1889-ben — a nagyképű tudatlanság gyöngyszeme.
Abel tételének érvényessége természetesen a nagyon szűk zéró-definíciónak és nem a bizonyításnak tulajdonítható. Abel dolgozata később megjelent Ostwald *Klassiker*jében (71. sz. Lipcse 1895.). A jegyzetek közt Sylow megjegyzése kommentár nélkül szerepel.

1 *P. E. B. Jourdain:* Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics. *In:* „Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematics", 1912. 2. k. 527. o.

módszerét. Nem tudták, hogy egy ellenpélda felfedezését követően gondosan elemezni kell a bizonyítást, és meg kell próbálni megtalálni a bűnös lemmát. A globális ellenpéldákat a heurisztikusan terméketlen kivétel-kizáró módszerrel intézték el.

Voltaképpen Seidel egy csapásra fedezte fel az egyenletes konvergencia bizonyításból származó fogalmát meg a bizonyítások és cáfolatok módszerét. Teljes mértékben tudatában volt metodológiai felfedezésének,[1] amelyet igen világosan írt le dolgozatában: „Ha abból az épp most elért bizonyosságból indulunk ki, hogy a tétel nem egyetemesen érvényes, és ezért bizonyítása mindenképpen egy rejtett kiegészítő feltevésre támaszkodik, a bizonyítást részletesebben elemezzük. Nem túl nehéz felfedezni a rejtett hipotézist. Ekkor visszafelé bizonyítható, hogy ezt a hipotézisben kifejezett feltételt nem elégítik ki a szakadásos függvényeket előállító sorok, mivel csak így állítható helyre az egyébként helyes bizonyítási sor és az új megállapítás összhangja."[2]

Mi akadályozta a Seidelt megelőző nemzedéket ennek felfedezésében? A fő ok (mint már említettük) az euklideszi metodológia uralma volt. Cauchy szigorúsági forradalmát az a tudatos törekvés motiválta, hogy az euklideszi metodológiát a differenciál- és integrálszámításra alkalmazza.[3] Cauchy és követői azt gondolták, hogy ily módon olyan fényforrást találhatnak, amely eloszlatja „az analízis szörnyű homályát".[4] Cauchy Pascal szabályainak szellemében járt el: először hozzálátott az analízis homályos terminusainak — mint a határérték, konvergencia, folytonosság stb. — az aritmetika tökéletesen ismert ter-

1 A racionalisták a metodológiai felfedezések létét is kétségbevonják. Azt hiszik, a módszer változatlan és örök. Tényleg nagyon csúnyán bánnak a metodológiai újítások felfedezőivel. Elfogadása előtt különcködő elméletnek, elfogadása után triviális közhelynek tekintik módszerüket.

2 *P. L. Seidel:* Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Funktionen Darstellen. Id. kiad. 383. o.

3 „A módszereket el kellett látnom mindazzal a szigorúsággal, amit az ember a geometriában megkövetel, hogy soha ne kelljen az általános algebrából kölcsönzött érvekhez folyamodni." (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad. Bevezetés.)

4 *N. H. Abel:* Letter to Hansteen. Id. kiad. 263. o.

minusaival való definiálásához, majd pedig azzal folytatta, hogy mindent bizonyított, amit korábban nem bizonyítottak vagy nem volt tökéletesen nyilvánvaló. Mármost az euklideszi rendszer szerint semmi értelme sincs annak, hogy bizonyítani próbáljanak valamit, ami hamis, ezért Cauchynak először — megszabadulva a hamis kacattól — helyesbítenie kellett a meglevő matematikai sejtéseket. A sejtések helyesbítésére azt a módszert alkalmazta, hogy kivételeket keresett, és az eredeti, durván megfogalmazott sejtések érvényességi körét egy biztonságos tartományra korlátozta, azaz a kivételek kizárásának módszerét alkalmazta.[1]

A *Larousse* 1865-ös kiadásának egyik cikkírója (valószínűleg Catalan) meglehetősen gúnyosan jellemezte Cauchy ellenpélda-vadászatát: „Csak negatív doktrínákat vezetett be a tudományba... Csaknem mindig az igazság negatív oldalát fedezte fel, ennek evidenssé tételével törődött: ha aranyat talált volna a mészporban, akkor azt adta volna a világ tudtára, hogy a kréta nem *kizárólag* mészkarbonátból áll." A Cauchy-iskola új, lélekelemző hangnemének tanújele Abel Holmboë-hoz írt levelének egyik részlete is: „Elkezdtem megvizsgálni azokat a legfontosabb szabályokat, amelyeket (most) e tekintetben rendszerint szentesítünk, és elkezdtem kimutatni, hogy mely esetekben nem helyesek. Elég jól megy, és végtelenül érdekel."[2]

Amit a szigorúak reménytelen kacatnak tartottak, mint például a divergens sorok összegére vonatkozó sejtéseket, azt ennek megfelelően tűzbe vetették.[3] „A divergens sorok az ördög művei" — írta Abel. Csak „felfordulást és paradoxonokat" okoznak.[4]

Mialatt azonban állandóan arra törekedtek, hogy sejtéseiket a kivételek kizárásával helyesbítsék, a bizonyítással végzett *helyesbítés* ötlete sohasem jutott eszükbe. A két tevékenységfajta — a találgatás

1 „Hogy korlátozásokkal használhatóvá tegyük a túlságosan kiterjesztett állításokat." (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad.)
2 *N. H. Abel:* Letter to Holmboë. Id. kiad. 258. o.
3 A kortársak bizonyára „kissé kíméletlennek" tartották ezt a tisztogatást. (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad. Bevezetés.)
4 *N. H. Abel:* Letter to Holmboë. Id. kiad. 257. o.

és a bizonyítás — az euklideszi hagyományok szerint szigorúan elkülönül egymástól. A szigorúaktól idegen volt az olyan bizonyítás gondolata, amely megérdemli ezt az elnevezést és mégsem bizonyító erejű. Az ellenpéldákat súlyos és végzetes hibának tartották, mert azt tanúsították, hogy a sejtés téves, elölről kell kezdeni a bizonyítást.

Abból a szempontból érthető volt ez a törekvés, hogy a XVIII. században a gyenge induktív következtetés egyes eseteit nevezték bizonyításnak.[1] De nem volt mód *ezeknek* a „bizonyításoknak" a helyesbítésére. Jogosan vetették el ezeket mint „nem szigorú bizonyításokat — ami annyit jelent, hogy egyáltalán nem bizonyítások".[2] *Az induktív érvelés nem volt tévedhetetlen — ezért tűzbe vetették. Helyét a deduktív érvelés foglalta el — mert azt tévedhetetlennek tartották.* „Eloszlatok minden bizonytalanságot" — jelentette ki Cauchy.[3] Ezen az alapon kell értékelni Cauchy „szigorúan" bizonyított tételének cáfolatát. És ez a cáfolat nem volt elszigetelt eset. Az Euler-formula Cauchy-féle szigorú bizonyítását, mint láttuk, szintén csak a közismert „kivételeket" ismertető dolgozatok követték.

Csak két kiút volt: vagy felülvizsgálják az euklideszi módszert megalapozó, a matematika tévedhetetlenségét hirdető egész filozófiát, vagy valahogy agyonhallgatják a problémát. Nézzük először, mivel járna a tévedhetetlenségre épülő megközelítés felülvizsgálata! Kétségtelenül le kellene mondani arról az elképzelésről, hogy az egész matematika vitathatatlanul igaz trivialitásokra redukálható, valamint arról, hogy vannak olyan állítások, amelyekkel kapcsolatban nem tévedhet az igazság felismerésére irányuló intuíciónk. Le kellene mondani arról az elgondolásról is, hogy deduktív, „következtető" intuíciónk téved-

1 A XVIII. századi „formalizmus" merő induktivizmus volt. (Vö.: 195. o.) Cauchy elveti azokat az indukciókat, amelyek csak „néha alkalmasak az igazság bemutatására" (*A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad. Bevezetés).
2 *N. H. Abel:* Letter to Hansteen. Id. kiad. 263. o. Cauchy és Abel számára a „szigorú" deduktívat, az induktívval ellentétest jelent.
3 *A. L. Cauchy:* Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Id. kiad. Bevezetés.

hetetlen. Csak ez a két beismerés nyithat utat a bizonyítások és cáfolatok módszere szabad fejlődésének, s e módszer alkalmazása teheti lehetővé a deduktív érvelés kritikus értékelését és az ellenpéldák problémájának megoldását.*

A matematikai kritika mindaddig lehetetlen volt, amíg egy ellenpélda nemcsak a tételen, hanem az azt védő matematikuson is szégyenfoltot hagyott, amíg csak bizonyítások vagy nem-bizonyítások voltak, de megbízható — bár gyenge pontokat is tartalmazó — bizonyítások nem. Az euklideszi módszert filozófiailag megalapozó tévedhetetlenségi elvből következtek a sejtések publikálását és megvitatását akadályozó, a matematikai kritika kialakulását lehetetlenné tevő, tekintélyelven alapuló, hagyományos matematikai sémák. Irodalmi kritika azért létezhet, mert anélkül is képesek vagyunk értékelni egy költeményt, hogy tökéletesnek tartanánk, de matematikai vagy tudományos kritika nem létezhet addig, amíg a matematikai vagy tudományos eredményt csak akkor tudjuk értékelni, ha az tökéletes igazságot hordoz. Egy bizonyítás csak akkor bizonyítás, ha bizonyít; és vagy bizonyít, vagy nem. 1847-ben forradalmi volt az a Seidel által oly világosan megfogalmazott gondolat, hogy egy bizonyítás akkor is elfogadható lehet, ha nem hibátlan — és szerencsétlen módon még ma is forradalminak hangzik.

Nem véletlen, hogy az 1840-es években fedezték fel a bizonyítások és cáfolatok módszerét, amikor a newtoni optika (Fresnel 1810-es és 1820-as években végzett munkásságának eredményeként bekövetkezett) összeomlása és a nem euklideszi geometria felfedezése (1829-ben Lobacsevszkij és 1831-ben Bolyai által) aláásta a tévedhetetlenség gőgjét.[1]

* *A szerkesztők megjegyzése:* Ezt a részletet elhibázottnak tartjuk, s kétségtelen, hogy Lakatos, akiben a legnagyobb megbecsülés alakult ki a formális deduktív logika iránt, maga is megváltoztatta volna. Az elsőrendű logika a következtetés érvényességének olyan jellemzéséhez jutott el, amely (a nyelv „logikai" terminusainak jellemzésétől függően) igenis lényegében tévedhetetlenné teszi az érvényes következtetést. Ezért a Lakatos által említett két beismerés közül csak az elsőre van szükség. Kielégítően jó „bizonyításelemzéssel" minden kétely áthárítható az *axiómákra* (vagy a tétel előzményeire), s így semmi kétely sem marad magát a *bizonyítást* illetően. A bizonyítások és cáfolatok módszerét semmi esetre sem érvényteleníti (ahogy a szöveg sugallja) a második beismerés elmulasztása, sőt, talán éppen ezzel a módszerrel helyesbíthetők úgy a bizonyítások, hogy a bizonyítás érvényességéhez szükséges valamennyi feltevést explicitté tesszük.

1 Ugyanebben az évtizedben Hegel filozófiája radikálisan szakított tévedhetetlen elődjeivel, s egyben a tudás egészen újszerű megközelítésének lendületes kezdetét jelentette. (A modern filozófiában csupán Hegel és Popper képviseli a cáfolhatóság hagyományát, de még ők is elkövették azt a hibát, hogy a matematika számára fenntartották a tévedhetetlenség privilégiumát.) A de Morgantól származó alábbi idézet jól érzékelteti azt az 1840-es években kialakult új szemléletet, amely feladta a tévedhetetlenség elvét:

„Időnként hajlandóság mutatkozik arra, hogy mindent elutasítsanak, ami bármilyen nehézséget okoz vagy a szembetűnő ellentmondások vizsgálata során nem biztosítja akadálytalanul a megoldást. Ha ezen azt értik, hogy semmi sem alkalmazható állandóan és semmiben sem lehet fenntartás nélkül bízni, ami nem igaz teljes mértékben az illető állításra, nekem nincs ellevetésem az ilyen ésszerű felfogás ellen. Ha azonban arra céloznak ezzel, hogy — sem figyelmeztetés kíséretében, sem anélkül — ne adjunk elő semmi olyant a tanulónak, ami nem érthető a maga teljes általánosságában, tisztelettel tiltakoznom kell egy ilyen korlátozás ellen, amely, véleményem szerint, nemcsak arra vezetne, hogy hamis nézeteket alakítanánk ki arról, ami már ismert, hanem akadályozná a felfedezés folyamatát is. A geometrián kívül nem igaz, hogy a matematikai tudományok *minden részletükben* olyan tökéletesen pontos modellek, mint sokan vélik. Az *analízis* végső határait mindig éppen olyan tökéletlenül fogták fel, mint amennyire teljesen ismeretlen volt a határokon túli terület. De a gyarmatosított terület kiterjesztésének nem az volt a módja, hogy az országon belül maradtak [ez a megjegyzés a kivételek kizárásának módszere ellen irányul], hanem az, hogy felfedező utakat tettek; teljes mértékben meg vagyok győződve arról, hogy a *tanulót* is így kell gyakoroltatni, azaz ugyanúgy meg kell tanítani arra, hogyan vizsgálja meg a határt, mint arra, hogyan művelje a határon belüli területet. Sohasem haboztam tehát e munka második részében olyan módszereket alkalmazni, amelyeket nem fogok azért kétségesnek nevezni, mert befejezetlen formában szerepelnek, és azért sem teszem ezt, mert a kétely a leendő tanítványé, nem pedig egy elégedetlen kritikusé. A tapasztalat gyakran azt bizonyítja, hogy a fogyatékos következtetés kitartó gondolati munkával érthetővé és szigorúvá tehető, de ki végezheti el ezt olyan következtetésekkel, amelyekkel sohasem találkozhat? Ha a matematikának kizárólag azokra a részeire fordítunk figyelmet, amelyek nem biztosítanak semmi lehetőséget a bizonytalan kérdések megvitatására, akkor ellenszenv alakul ki az analízis bővítéséhez elengedhetetlenül szükséges eljárásmódok iránt. Ha a felsőbb matematika művelése csak azok feladata volna, akiket erre képeztek

A bizonyítások és cáfolatok módszerének felfedezése előtt azt a problémát, amelyet egy „szigorúan bizonyított" tétel ellenpéldáinak sorozata vetett fel, csak a kivételek kizárásának módszerével lehetett „megoldani". *A bizonyítás bebizonyítja a tételt, de nyitva hagyja azt a kérdést, hogy mi a tétel érvényességi tartománya. Ezt a tartományt úgy tudjuk meghatározni, hogy megnevezzük és gondosan kizárjuk a „kivételeket" (ez az eufemizmus jellemző a korszakra). Azután kiegészítjük a tétel megfogalmazását ezekkel a kivételekkel.*

A kivétel-kizáró módszer uralma megmutatja, hogy bizonyos kritikus problémahelyzetekben milyen káros lehet az euklideszi módszer hatása a matematika fejlődésére. A legtöbb ilyen problémahelyzet a fejlődő matematikai elméletekben fordul elő, ahol a fejlődő fogalmak a haladás hordozói, ahol a legizgalmasabb fejlemények a fogalmak határterületeinek feltárásából, a fogalmak kitágításából, a korábban differenciálatlan fogalmak differenciálásából erednek. Ezekben a fejlődő elméletekben az intuíció járatlan, botladozik és hibázik. Nincs olyan elmélet, amely ne ment volna keresztül a fejlődés ilyen szakaszán, sőt, történelmi szempontból ez a legizgalmasabb szakasz, s az oktatásban is ennek kellene a legfontosabbnak lennie. Nem lehet jól megérteni ezeket a szakaszokat a bizonyítások és cáfolatok módszerének megértése, a cáfolhatóság elvének elfogadása nélkül.

ki, lehetne némi ésszerűség abban, hogy a közönséges diákot távol tartják az elvont tudományoknak nemcsak a megoldatlan, hanem a teljesen elméleti részeitől is, olyanoknak tartván fenn ezeket, akiknek az volna a dolga, hogy az előbbieket érthetővé, az utóbbiakat alkalmazhatóvá tegyék. Ebben az országban azonban az a kevés ember is, aki a matematika valamely nehézségével önmagáért foglalkozik, csak hajlamát követve vagy a körülmények véletlen találkozása nyomán jut el idáig. Az ilyen véletlenek számát növelni kellene azáltal, hogy minden diáknak, aki elég tehetséges a felsőbb alkalmazott matematika tanulmányozásához, lehetőséget adunk arra, hogy megismerkedjen az analízis olyan részeinek művelésével is, amelyektől inkább az analízis jövőbeli fejlődése függ, mint a jelenlegi alkalmazása az anyagi tudományokban." (*A. de. Morgan:* The Differential and Integral Calculus. London 1842. VII. o.)

Eukleidész ezért a matematika történetének és mind a kezdő fokú, mind a kreatív szintű matematikaoktatásnak a rossz szelleme.[1]

Megjegyzés: Ebben a függelékben nem volt szó a bizonyítások és cáfolatok módszerének kiegészítő (5., 6. és 7.) szintjeiről.[2] Elég itt azt megemlítenem, hogy az egyenletes konvergencia más bizonyításokban való módszeres keresése (5. szint) igen gyorsan egy Cauchy által bizonyított másik tétel cáfolatára és helyesbítésére vezetett volna. E tétel szerint bármely folytonos tagokból álló konvergens függvénysor összegfüggvényének integrálja azonos a tagok integráljaiból álló sor összegével, vagy röviden: folytonos függvénysorok esetében a határátmenet és az integrálás felcserélhető. Ezt a tételt a XVIII. században senki sem vonta kétségbe, még Gauss is alaposabb megfontolás nélkül alkalmazta.[3]

Seidelnek, aki 1847-ben felfedezte az egyenletes konvergenciát, nem jutott eszébe, hogy megvizsgálja, nem tételezik-e fel azt implicit módon más bizonyításokban is. Stokes, aki szintén ebben az évben fedezte fel az egyenletes konvergenciát — noha nem a bizonyítások és cáfolatok módszerével — ugyanabban a dolgozatában Moignora hivatkozva használja a sorok integrálására vonatkozó hamis tételt.[4] (Stokes egy másik hibát is elkövetett: azt hitte, bebizonyította, hogy az egyenletes konvergencia nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétele is a határfüggvény folytonosságának.)

Ez a késedelem annak felfedezésében, hogy a sorok tagonkénti integrálhatóságának bizonyítása is az egyenletes konvergencia feltételezésén múlik, valószínűleg azzal magyarázható, hogy ezt a primitív sejtést csak 1875-ben

1 Braithwaite szerint „Eukleidész — a matematika és a naiv tudomány jó szelleme — a tudományfilozófia, sőt, a metafizika rossz szellemévé vált" (*R. B. Braithwaite:* Scientific Explanation. Id. kiad. 353. o.). Ez a kijelentés azonban a matematika statikus, logicista felfogására vezethető vissza.

2 Vö.: 186. o.

3 L.: *K. F. Gauss:* Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot x\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^3+\text{etc.}$ *In:* Werke. Lipcse 1813. 3. k. 123—162. o.; *K. Knopp:* Theory and Application of Infinite Series. London—Glasgow 1928.; *E. T. Bell:* The Development of Mathematics. Id. kiad.

4 *G. Stokes:* On the Critical Values of the Sums of Periodic Series. *In:* „Transactions of the Cambridge Philosophical Society", 1848. 533—583. o.

cáfolták meg egy konkrét ellenpéldával.[1] A bizonyításelemzés már ezelőtt kiderítette az egyenletes konvergencia jelenlétét a bizonyításban, mégpedig anélkül, hogy ellenpélda játszotta volna a katalizátor szerepét az elemzésben. Amikor aztán — Weierstrass-szal az élen — teljes erővel megindult a hajsza az egyenletes konvergencia ellen, hamarosan felfedezték a fogalmat a tagonkénti differenciálhatóság, a kettős határátmenet stb. bizonyításában.

A *hatodik szint* abból áll, hogy ellenőrizni kell a megcáfolt primitív sejtés korábban elfogadott következményeit. Meg tudjuk menteni a következményeket, vagy a lemma megcáfolása végzetes, teljes pusztítást eredményez? A tagonkénti integrálhatóság például a Fourier-sejtés Dirichlet-től eredő bizonyításának sarkpontja volt. Du Bois-Reymond drámaian írja le a helyzetet: a trigonometrikus sorok elméletét „szíven szúrták", két kulcstétele alól „elhordták a talajt", és „az általános elméletet egy csapásra olyan állapotba taszították vissza, amilyenben Dirichlet, sőt, Fourier előtt volt".[2] Érdekes volna megvizsgálni, hogyan szerezték vissza az „elvesztett talajt".

E folyamat során rengeteg ellenpéldát kutattak fel. De az ellenpéldák tanulmányozása — módszerünk *hetedik szint*je — csak az évszázad utolsó éveiben alakult ki. (Például Young munkássága a nem egyenletes konvergenciapontok osztályozásáról és eloszlásáról.[3])

1 *G. Darboux:* Mémoire sur les fonctions discontinues. *In:* „Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure", 1875. 57—112. o.

2 *P. D. G. Du Bois-Reymond:* Beweis, das die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$f(x)=\sum_{p=0}^{p=\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px)\ \text{die werte}$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha),\quad a_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\cos p\alpha,$$

$$b_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\sin p\alpha$$

haben, jedesmal wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind. *In:* „Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe", 1875. 120. o.

3 *W. H. Young:* On Non-Uniform Convergence and Term-by-Term Integration of Series. *In:* „Proceedings of the London Mathematical Society", 1903—1904. 89—102. o.

II. FÜGGELÉK

A DEDUKTIVISTA ÉS A HEURISZTIKAI MEGKÖZELÍTÉS ELLENTÉTE

1. A deduktivista megközelítés

Az euklideszi módszertan kialakította a kifejtés egy meghatározott, kötelező stílusát. Ezt „deduktivista stílusnak" fogom nevezni. Az e stílusnak megfelelő okfejtés az *axiómák, lemmák* és/vagy *definíciók* pedáns felsorolásával kezdődik. Az axiómák és a definíciók gyakran mesterkéltnek és megtévesztően bonyolultnak látszanak. Arról soha nem értesülünk, hogyan adódtak ezek a bonyodalmak. Az axiómák és definíciók felsorolását gondosan megszövegezett *tételek* követik. A tételek nehézkes feltételekkel terhesek: lehetetlennek tűnik, hogy bármikor bárkinek sikerült rájönni ezekre a tételekre. A tételt a *bizonyítás* követi.

Az euklideszi rítus szerint a matematikával foglalkozó diák kénytelen részt venni ebben a bűvészkedésben, mégpedig anélkül, hogy kérdéseket tenne fel a mutatvány hátteréről vagy végrehajtásának módjáról. Ha a diák véletlenül felfedezi, hogy a nem odaillő definíciók némelyike bizonyításból származik, ha egyszerűen kíváncsi lesz arra, hogyan előzhetik meg ezek a definíciók, lemmák és a tétel a bizonyítást, akkor a matematikai éretlenség fitogtatása miatt a bűvész kiközösíti.[1]

1 Egyes kézikönyvek azt állítják, hogy nem várnak az olvasótól semmiféle előzetes ismeretet, csak bizonyos fokú matematikai érettséget. Ez gyakran azt jelenti, hogy elvárják, az olvasó rendelkezzék azzal a vele született „képességgel", hogy egy euklideszi okfejtést elfogadjon az alapproblematika, az okfejtés heurisztikus háttere iránti minden természetellenes érdeklődés nélkül.

A deduktivista stílusban minden állítás igaz, és minden levezetés érvényes. A matematika örök, megváltoztathatatlan igazságok egyre növekvő halmazaként jelenik meg. Ellenpéldák, cáfolatok, kritika szóba se kerülhetnek. Álcázott torzszülött-kizárással, bizonyításból származó definíciókkal és a kész tétellel kezdvén, a primitív sejtést, a cáfolatokat és a bizonyítás kritikáját elhallgatván, tekintélyelvi légkört alakítanak ki a tárgy körül. A deduktivista stílus takargatja az erőfeszítést, eltitkolja a kockázatot. Az egész történet szertefoszlik, a tételnek a bizonyítási eljárás folyamán egymást követő kísérleti megfogalmazásai felejtésre ítéltetnek, a végeredmény pedig szent tévedhetetlenséggé magasztosul.[1]

A deduktivista stílust védelmezve egyesek azt állítják, hogy a dedukció *a* matematika heurisztikus sémája, hogy a felfedezés logikája a dedukció.[2] Mások megértik, hogy ez nem igaz, de ebből a felismerésből

1 Még nem tudatosult eléggé, hogy a mai matematikai és természettudományos oktatás a tekintélyelv fenntartásának melegágya, az önálló és kritikus gondolkodás legádázabb ellensége. Míg a matematikában ez a ragaszkodás a tekintélyelvhez az épp most ismertetett *deduktivista* sémából következik, a természettudományban az *induktivista* sémán keresztül hat.
A természettudományokban régi hagyománya van az induktivista stílusnak. Egy ilyen stílusban íródott mintaszerű dolgozat a kísérlet tervezetének aprólékos leírásával kezdődik, s ezt a kísérletnek és a kísérlet eredményének leírása követi. Esetenként egy „általánosítással" zárul a dolgozat. A problémahelyzet, a sejtés, amit a kísérletnek ellenőriznie kellett, el van rejtve. A szerző büszke sekélyes, műveletlen elméjére. A dolgozatot csak az a kevés ember érti meg, aki igazán ismeri a problémahelyzetet. — Az induktivista stílus olyan látszatot kelt, mintha a tudós üres elmével kezdené el a kutatást, holott feje már a kezdet kezdetén is tele van gondolatokkal. Ezt a játékot — nem is mindig sikerrel — csak szakemberek válogatott csapata játszhatja a testület tagjai előtt. Az induktivista stílus deduktivista ikertestvéréhez (nem ellentétéhez!) hasonlóan, bár objektivitást követel, tulajdonképpen egy külön csoportnyelvet alakít ki, elfojtja a kritikát, atomizálja és tekintélyelvre építi a tudományt. Ilyen „beállításban" soha nem fordulhatnak elő ellenpéldák: az ember megfigyelésekből (nem egy elméletből) indul ki, és nyilvánvaló, hogy ha nincs előzetes elmélet, képtelen észrevenni az ellenpéldákat.
2 Ezek azt állítják, hogy a matematikusok üres elmével kezdik el a vizsgálódást, könnyed, szabályokhoz nem kötött alkotótevékenység közben tetszésük szerint állítják fel axiómáikat és definícióikat, s ezekből az axiómákból és definíciókból

azt a következtetést vonják le, hogy a matematikai felfedezés egyáltalán nem racionális tevékenység. Ennélfogva azt állítják, hogy bár a matematikai felfedezés nem deduktív úton jár, ha racionálisan akarjuk előadni a matematikai felfedezéseket, ennek deduktivista stílusban kell történnie.[1]

Manapság tehát két érv szól a deduktivista stílus mellett. Az egyik azon az elgondoláson alapul, hogy a heurisztika racionális és dedukti-

csak később vezetik le a tételeket. Ha egy bizonyos interpretációban az axiómák igazak, akkor a tételek is mind igazak. Az igazság matematikai futószalagja nem romolhat el. A bizonyítási eljárásra vonatkozó esettanulmányunk után elvethetjük ezt a deduktivista stílus védelmében felhozott általános okoskodást, hacsak el nem fogadjuk, hogy a matematika formális rendszerekre korlátozódik.
Mármost, míg Popper azt mutatta ki, hogy tévednek, akik azt állítják, hogy a tudományos felfedezés logikája az indukció, a kötetünkben szereplő tanulmányok azt kívánják bizonyítani, hogy tévednek, akik szerint a matematikai felfedezés logikája a dedukció. Míg Popper az induktivista stílust bírálta, e tanulmányok a deduktivista stílus kritikájára tesznek kísérletet.
1 Ez a doktrína lényeges eleme a matematika legtöbb formalista filozófiai iskolájának. A formalisták, amikor felfedezésről beszélnek, megkülönböztetik a *felfedezés kontextusát* és az *igazolás kontextusát*. „A felfedezés kontextusa a lélektani elemzésre tartozik, míg az igazolás kontextusával a logika foglalkozik." (*H. Reichenbach:* Elements of Symbolic Logic. New York 1947. 2. o.) Hasonló nézet található Braithwaite-nél (*R. B. Braithwaite:* Scientific Explanation. Id. kiad. 27. o.) és Poppernál is (*K. R. Popper:* The Logic of Scientific Discovery. London 1959. 31—32. o., valamint: Levél az „Erkenntnis" szerkesztőjéhez. *In:* „Erkenntnis", 1935. 426—429. o.). Amikor Popper a felfedezés aspektusait úgy osztotta fel a lélektan és a logika között, hogy semmi hely sem maradt a heurisztikának mint önálló kutatási területnek, nyilván nem vette észre, hogy „felfedezéslogikája" több, mint pusztán a tudományos haladás *szigorúan logikai* sémája. Ebből ered könyve címének paradox volta, hiszen a könyv alaptétele kétarcúnak tűnik: *a)* a tudományos felfedezésnek nincs logikája, mind Bacon, mind Descartes tévedett; *b)* a tudományos felfedezés logikája a sejtések és cáfolatok logikája. Kézenfekvő e paradoxon megoldása: *a)* a tudományos felfedezésnek nincs olyan *tévedhetetlen* logikája, amely csalhatatlanul eredményre vezetne; *b)* a felfedezésnek van egy nem tévedhetetlen logikája, s ez a tudományos haladás logikája. Poppert viszont, aki a felfedezésnek *ezt* a logikáját alapozta meg, nem érdekelte a kutatásának természetét firtató metakérdés, és nem vette észre, hogy ez nem vág sem a lélektan, sem a logika körébe, hanem egy önálló tudományág: a felfedezés logikája, a heurisztika.

vista. A másik azon, hogy a heurisztika nem deduktivista, viszont nem is racionális.

Van egy harmadik érv is. Egyes matematikusok, akik nem szeretik, ha a logikusok, filozófusok és egyéb különcök beleavatkoznak a munkájukba, azt szokták mondani, hogy a heurisztikus stílus bevezetése a tankönyvek átírását igényelné, és olyan terjedelmessé tenné ezeket, hogy sohasem lennénk képesek végigolvasni őket. A tanulmányok is sokkal hosszabbak lennének.[1] A válasz erre az alpári érvre a következő: próbáljuk meg!

2. A heurisztikai megközelítés. Bizonyításból származó fogalmak

A könyvnek ez a része néhány matematikailag fontos, bizonyításból származó fogalom rövid heurisztikai elemzését tartalmazza. Ezek az elemzések remélhetőleg megmutatják, milyen hasznos volna heurisztikai elemek bevezetése a matematikai stílusba.

Mint már említettük, a deduktivista stílus a bizonyításból származó definíciókat elszakítja „ősbizonyításaiktól", váratlanul, mesterségesen és önkényesen „tálalja" őket. Eltitkolja azokat a globális ellenpéldákat, amelyek a definíciók felfedezésére vezettek. Ezzel szemben a heurisztikai stílus ezeket a tényezőket emeli ki. A problémahelyzetet, azt a „logikát" hangsúlyozza, amely az új fogalmat szülte.

Nézzük meg először, hogyan vezethető be heurisztikai stílusban az egyenletes konvergencia bizonyításból származó, korábban már tárgyalt (I. függelék) fogalma! Ebben és a többi példában mindenesetre feltételezzük a bizonyítások és cáfolatok módszerében használt

1 Bár azt is be kell látni, hogy számuk erősen csökkenne, mivel a problémahelyzet megállapítása nagyon is nyilvánvalóan leleplezné jó néhány tanulmány értelmetlenségét.

*terminus technicus*ok ismeretét. Ez azonban nem nagyobb igény, mint az a szokásos követelmény, hogy az olvasó ismerje az euklideszi program *terminus technicus*ait, mint például az axiómákat, alapfogalmakat stb.

a) Az egyenletes konvergencia

Tézis: A folytonosság leibnizi elvének speciális változata; azt állítja, hogy bármely folytonos függvényekből álló konvergens függvénysor határfüggvénye folytonos. *(Primitív sejtés.)*

Antitézis: A folytonosság Cauchy-féle definíciója a tézist magasabb szintre emeli. A Cauchy által *választott definíció* legalizálja Fourier ellenpéldáit. Ugyanakkor ez a definíció kizárja annak a kompromisszumnak a lehetőségét, hogy a folytonosságot „függőleges egyenesekkel" állítsuk helyre, s ezáltal — néhány trigonometrikus sorral együtt — létrehozza az antitézis negatív pólusát. A „pozitív pólust" erősíti Cauchy bizonyítása, s így ez az egyenletes konvergencia ősbizonyítása lesz. A „negatív pólust" a primitív sejtés egyre több *globális ellenpéldája* erősíti.

Szintézis: Felismerik a *bűnös lemmát*, amelynek a globális ellenpéldák *helyi* ellenpéldái is, helyesbítik a bizonyítást, helyesbítik a sejtést. Kialakulnak a szintézis jellemző alkotóelemei: az egyenletes konvergencia tétele, s ezzel együtt *bizonyításból származó fogalma.*[1]

1 Egyes kézikönyvek valamilyen okból külön (kváziheurisztikusan) tárgyalják az egyenletes konvergenciát. Rudin például könyvének „A fő probléma tárgyalása" című részében először közli a primitív sejtést és cáfolatát, s csak ezután vezeti be az egyenletes konvergencia definícióját. (*W. Rudin:* Principles of Mathematical Analysis. Id. kiad. 115. o.) Ennek az előadásmódnak két fogyatékossága van: *a)* Rudin nem egyszerűen a primitív sejtést és cáfolatát adja elő, hanem inkább azt kérdezi, igaz-e vagy hamis a primitív sejtés, majd a közismert példákkal bebizonyítja, hogy hamis. Eközben azonban nem lép túl a tévedhetetlenség stílusán. „Problémahelyzetében" nem sejtés, hanem inkább egy ravasz és elferdített kérdés szerepel, amelyet példa (nem ellenpélda) követ, s ez megingathatatlan választ ad. *b)* Rudin nem azt mutatja be, hogy az egyenletes konvergencia fogalma a bizonyításból ered, hanem kifejtésében a definíció megelőzi a bizonyítást. A deduktivista stílusban ez nem

Az itt használt hegeliánus kifejezésmóddal szerintem általában leírhatók volnának a különböző matematikai fejtegetések. (Jóllehet, előnyei mellett veszélyei is vannak.) A heurisztikának a kifejezésmód alapjául szolgáló hegeli fogalma nagyjából a következő: A matematikai tevékenység emberi tevékenység. Ennek a tevékenységnek — mint minden emberi tevékenységnek — bizonyos oldalai a lélektan, mások a történettudomány segítségével vizsgálhatók. A heurisztikát nem ezek érdeklik elsősorban. A matematikai tevékenység viszont matematikát állít elő. A matematika, az emberi tevékenységnek ez a terméke, „elidegenedik" az őt létrehozó emberi tevékenységtől. Élő, fejlődő organizmussá válik, *bizonyos önállóságra tesz szert* az őt létrehozó tevékenységgel szemben, s kifejleszti saját önálló fejlődéstörvényeit, saját dialektikáját. Az igazi alkotó matematikus csak megszemélyesítője, megtestesítője ezeknek a törvényeknek, amelyek csak az emberi tevékenységben valósulhatnak meg. Megtestesülésük azonban ritkán tökéletes. A matematikus tevékenysége, ahogy a történelemben megjelenik, csak nehézkes megvalósulása a matematikai gondolatok csodálatos dia-

is történhet másként, mert ha először az eredeti bizonyítást adta volna meg, és csak azután a helyesbített bizonyítás és a bizonyításból származó definíció által követett cáfolatot, akkor leleplezte volna az „örökkön statikus" matematika mozgását, a „tévedhetetlen" matematika esendőségét, ez pedig összegyeztethetetlen az euklideszi hagyománnyal. (Talán hozzá kell tenni, hogy azért idézem Rudin könyvét, mert ez az egyik legjobb e hagyománynak megfelelő kézikönyv.) A bevezetésben például ezt írja Rudin: „Fontosnak látszik — különösen a kezdő számára — világosan látni, hogy egy tétel feltételei valóban szükségesek ahhoz, hogy biztosítsuk a következmény érvényességét. Ezért meglehetősen sok ellenpélda szerepel a szövegben." Ezek sajnos álellenpéldák, mivel valójában azt a célt szolgálják, hogy megmutassák, milyen bölcsek a matematikusok, hiszen a tételbe az összes feltételt beleveszik. Azt viszont nem mondja meg, hogy honnan erednek ezek a feltételek, hogy a bizonyítási ötletekből származnak, és hogy a tétel nem úgy pattan ki a matematikusok fejéből, mint Zeuszéból Pallasz Athéné, teljes fegyverzetben. Ne vezessen félre minket, hogy Rudin az „ellenpélda" szót használja; ettől még ne várjunk cáfoló stílust. * *A szerkesztők megjegyzése:* Lakatos megjegyzései Rudin könyvének *első kiadására* vonatkoznak. Az 1964-ben megjelent második kiadásban nem található meg minden Lakatos által idézett részlet. — A könyv magyar fordítása (*W. Rudin:* A matematikai analízis alapjai. Bp. 1978.) a második kiadás alapján készült.

lektikájának. De minden matematikus, ha tehetséges, ha megvan benne a zsenialitás szikrája, az eszméknek ezzel a dialektikájával áll összeköttetésben, ennek sodrát érzi, ennek engedelmeskedik.[1]

Mármost a heurisztika a matematika önálló dialektikájával, nem a történetével foglalkozik, noha csak a történelem tanulmányozásán, a történelem racionális rekonstrukcióján keresztül vizsgálhatja tárgyát.*

b) A korlátos variáció

A tekintélyelvű deduktivista stílus remek példája az az eljárás, amellyel az analízist tárgyaló kézikönyvekben általában bevezetik a korlátos variáció fogalmát. Vegyük ismét Rudin könyvét! A Riemann—

1 Az elidegenedett emberi tevékenység önállóságának ez a hegeli eszméje vezérfonalként szolgálhat a társadalomtudományok, különösen a közgazdaságtan helyzetére és metodológiájára vonatkozó néhány probléma megoldásához. A matematikusról — mint a Matematika tökéletlen megszemélyesítőjéről — alkotott fogalmam rendkívül hasonló Marxnak a tőkésről — mint a Tőke megszemélyesítőjéről — alkotott fogalmához. Marx sajnos nem szűkítette felfogását oly módon, hogy hangsúlyozta volna a megszemélyesítés tökéletlen jellegét és azt, hogy nincs semmiféle vaskövetkezetesség ennek a folyamatnak a megvalósulásában. Éppen ellenkezőleg, az emberi tevékenység mindig képes elnyomni vagy eltorzítani az elidegenedett folyamatok önállóságát, és képes új folyamatokat előidézni. A marxista dialektika fő gyengéje ennek a kölcsönhatásnak az elhanyagolása volt.

* *A szerkesztők megjegyzése:* Kétségtelennek tartjuk, hogy Lakatos bizonyos fokig módosította volna ezt a részt, mert munkássága előrehaladásával egyre gyengült kötődése hegeliánus neveltetéséhez. Megőrizte azonban azt a meggyőződését, hogy döntően fontos elismerni az ember szellemi erőfeszítései termékeinek részleges önállóságát. Az állítások objektív tartalmának ebben a világában — ezt Popper nevezte el „harmadik világnak" (*K. R. Popper:* Objective Knowledge. Oxford 1972.) — a problémák (amelyeket például az állítások logikai ellentmondásai okoznak) attól függetlenül léteznek, hogy felismerjük-e őket vagy sem; ezért *megtalálhatjuk* (és nem feltaláljuk) a szellemi problémákat. Lakatos azonban kezdett arra a meggyőződésre jutni, hogy ezek a problémák nem egy meghatározott megoldást „követelnek meg", nem diktálják saját megoldásukat; megoldásukhoz emberi leleményességre van szükség (ami vagy van, vagy nincs). Ezt a nézetet előlegezi az előző lábjegyzet Marx-kritikája.

Stieltjes-integrállal foglalkozó fejezet közepén hirtelen bevezeti a korlátos variációjú függvények definícióját:

„6.20. *Definíció.* Legyen f az $[a, b]$ intervallumban definiált függvény. Bevezetjük a következő definíciót:

(37) $$V(f)=\sup \sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|,$$

ahol a supremum az $[a, b]$ intervallum összes felosztására vonatkozik. Ha $V(f)$ véges, akkor azt mondjuk, hogy f korlátos variációjú $[a, b]$-ben, és $V(f)$ f totális variációja $[a, b]$-ben."[1]

Miért éppen ez a függvényhalmaz érdekeljen bennünket? A deduktivista válasza: „Várj, majd megérted!" Várjunk hát, figyeljük a magyarázatot, és próbáljuk megérteni! A definíciót példák követik, amelyekkel az a szerző célja, hogy az olvasónak legyen némi elképzelése a fogalom terjedelméről (ez és az ehhez hasonló dolgok teszik kiemelkedővé Rudin könyvét a deduktivista hagyományon belül). Ezután egy tételsorozat következik (6.22., 6.24., 6.25.), majd váratlanul a következő állítás:

„2. *korollárium.* Ha f korlátos variációjú és g $[a, b]$-ben folytonos, akkor $f \in \mathfrak{R}^*(g)$."[2] ($\mathfrak{R}^*(g)$ a g-re vonatkozóan integrálható Riemann—Stieltjes-függvények osztálya.)

Talán jobban érdekelne minket ez az állítás, ha valóban értenénk, miért olyan fontosak az integrálható Riemann—Stieltjes-függvények. Rudin meg sem említi az integrálhatóság intuitív alapon legnyilvánvalóbb fogalmát, a Cauchy-féle integrálhatóságot, pedig ennek kritikája vezetett a Riemann-féle integrálhatósághoz. Most tehát van egy két misztikus fogalmat — a korlátos variációt és a Riemann-féle integrálhatóságot — tartalmazó tételünk. Két rejtély azonban nem eredményez megértést. Vagy azok számára talán igen, akiknek van „képességük és kedvük követni egy elvont gondolatmenetet"?[3]

1 *W. Rudin:* Principles of Mathematical Analysis. Id. kiad. 99—100. o.
2 Uo. 106. o.
3 Uo. Előszó.

A heurisztikus kifejtésmód megmutatná, hogy mindkét fogalom — a Riemann—Stieltjes-féle integrálhatóság és a korlátos variáció — bizonyításból származó fogalom, mégpedig mindkettő egy és ugyanabból a bizonyításból, a Fourier-sejtés Dirichlet-féle bizonyításából származik. Ez a bizonyítás adja mindkét fogalom problémahátterét.[1]

Mármost Fourier primitív sejtése[2] semmiféle misztikus terminust nem tartalmaz. A korlátos variáció „őssejtése" azt mondja ki, hogy bármely tetszőleges függvény Fourier-féle sorba fejthető,[3] s ez igen egyszerű és rendkívül izgalmas sejtés. A sejtést Dirichlet bizonyította be.[4] Dirichlet gondosan ellenőrizte bizonyítását, és a lemmáknak mint feltételeknek a beépítésével helyesbítette Fourier sejtését. Ezek a híres Dirichlet-féle feltételek. A helyesbítés után a tétel így szólt: Minden függvény Fourier-féle sorba fejthető, amelynek 1. értéke a szakadási helyeken $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, 2. csak véges számú szakadási helye van, és 3. csak véges számú maximuma és minimuma van.[5]

Mindezek a feltételek a bizonyításból következnek. Dirichlet bizo-

1 Tulajdonképpen Rudin említi könyvében ezt a bizonyítást és a bizonyítást összegező tételt, de elrejti a 8. fejezet 17. gyakorlatában (164. o.), s teljesen elkülöníti a fent említett, önkényesen bevezetett két fogalomtól.
2 *J. Fourier:* Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corpe solides (Extrait). Id. kiad. 112. o.
3 A „Fourier-féle sorba fejthető" kifejezés a „Fourier-együtthatókkal trigonometrikus sorba fejthető" helyett áll.
4 Lásd *P. L. Dirichlet:* Sur la convergence des séries trigonométriques que servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donées. Id. kiad. és Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreichen. *In:* H. W. Dove—L. Moser (szerk.): „Repertorium der Physik", 1837. 152—174. o. E bizonyítás hátterének sok olyan érdekes vetülete van, amelyre sajnos most nem térhetünk ki. Ilyen például Fourier eredeti „bizonyítása" értékének problémája, a két egymást követő Dirichlet-bizonyítás összehasonlítása, és Dirichlet megsemmisítő kritikája Cauchy korábbi (*A. L. Cauchy:* Mémoire sur les développements des functions en séries périodiques. Id. kiad.) bizonyításáról.
5 Itt meg kell említenünk, hogy Dirichlet bizonyítását nem előzték meg és nem ösztönözték az eredeti Fourier-sejtés ellenpéldái. Senki sem próbálkozott ellenpéldákkal, sőt, Cauchy „bebizonyította" az eredeti sejtést. (Vö.: 191. o. 1. lj.;

nyításelemzése csak a harmadik feltételt illetően volt hibás: a bizonyítás valójában csak a függvény korlátos variációján múlik. Dirichlet bizonyításelemzését Jordan bírálta meg 1881-ben, ő javította ki a hibát, ezért Jordan lett a korlátos variáció fogalmának felfedezője. Jordan azonban nem találta fel, nem „vezette be" a fogalmat,[1] hanem Dirichlet bizonyításának kritikai felülvizsgálata során *megtalálta*.[2]

Dirichlet bizonyításának másik gyenge pontja az volt, hogy az integrál Cauchy-féle definícióját használta, pedig ez csak a folytonos függvények esetében alkalmas eszköz. Cauchy definíciója szerint a nem folytonos függvények egyáltalán nem integrálhatóak, és *ipso facto* nem fejthetők Fourier-féle sorba. Dirichlet úgy kerülte el ezt a nehézséget, hogy a nem folytonos függvény integrálját azokra az intervallumokra vonatkozó integrálok összegének tekintette, amelyek-

bizonyításának érvényességi tartománya az üres halmaz volt.) Az első ellenpéldákat csak Dirichlet bizonyításának lemmái — különösen az első lemma — vetették fel. Ettől eltekintve, a Fourier-sejtés első ellenpéldáját csak 1876-ban közölte Du Bois-Reymond, aki talált egy olyan folytonos függvényt, amely nem volt Fourier-féle sorba fejthető. (*P. D. G. Du Bois-Reymond:* Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. *In:* „Abhandlungen der Königlich-Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Physikalischen Classe", 1876. I—XXIV. és 1—102. o.)

1 Egy fogalom hirtelen „bevezetése" olyan varázslat, amelyhez igen gyakran folyamodnak a deduktivista stílusú történetírásban.

2 Lásd *C. Jordan:* Sur la série de Fourier. *In:* „Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences", 1881. 228—233. o. és Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Párizs 1893. I. k. 241. o. Maga Jordan hangsúlyozza, hogy nem Dirichlet *bizonyítását*, csak tételét módosítja („. . . Dirichlet bizonyítása így módosítás nélkül alkalmazható minden korlátos variációjú függvényre. . ."). Zygmund azonban téved, amikor azt állítja, hogy Jordan tétele „csak látszólag általánosabb", mint Dirichlet-é. (*A. Zygmund:* Trigonometrical Series. New York 1935. 25. o.) Ez igaz Jordan bizonyítására, de tételére nem. Ugyanakkor félrevezető az a kijelentés, hogy Jordan „kiterjesztette" Dirichlet tételét a korlátos variációjú függvények általánosabb tartományára. (Például *Szőkefalvi-Nagy B.:* Valós függvények és függvénysorok. Bp. 1954. 272. o.) Carslaw is hasonló értetlenséget árul el a bizonyításelemzés iránt. (*H. S. Carslaw:* Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. New York 1930. Historical Introduction.) Nem veszi észre, hogy Dirichlet bizonyítása a korlátos variáció bizonyításból származó fogalmának ősbizonyítása.

ben a függvény folytonos. Ez könnyen megtehető, ha véges sok szakadási helye van a függvénynek, de ha végtelen sok, akkor ez az eljárás nehézségekhez vezet. Riemann ezért bírálta Cauchy integrálfogalmát, és ezért talált fel egy új integrálfogalmat.

A korlátos variáció és a Riemann-integrál két rejtélyes definíciója tehát *entzaubert*, lefoszlott róluk az önkényes varázslat, eredetük visszavezethető egy világosan körvonalazott problémahelyzetre és a problémák korábbi megoldási kísérleteinek kritikájára. Az első egy bizonyításból származó definíció, amelyet — mintegy próbaképpen — Dirichlet fogalmazott meg, s végül Dirichlet bizonyításelemzésének kritikusa, Jordan fedezett fel. A második az integrál egy olyan korábbi definíciójának kritikájából ered, amely bonyolultabb problémákra alkalmazhatatlannak bizonyult.

A heurisztikus kifejtésnek ebben a második példájában a sejtések és cáfolatok logikájának Popper-féle sémáját követtük. Ez a séma hívebben követi a történelmet, mint a hegeli, mivel az utóbbi elveti a „fokozatos megközelítés" módszerét, mert szerinte ez csak nehézkes emberi megvalósítása az objektív eszmék szükségszerű fejlődésének. De még a Popper-féle racionális heurisztikában is meg kell különböztetni azokat a problémákat, amelyek megoldását elhatározza az ember és azokat, amelyeket valóban megold; meg kell különböztetni egyrészt a „véletlenszerű" hibákat, amelyek egyszerűen eltűnnek, és amelyek kritikája semmiféle szerepet nem játszik a későbbi fejlődésben, másrészt a „lényeges" hibákat, amelyek bizonyos értelemben a cáfolat után is megőrződnek, és amelyek kritikáján alapul a további fejlődés. A heurisztikus előadásmódban minden veszély nélkül kihagyhatók a „véletlenszerű" hibák, ezekkel csak a történetírásnak kell foglalkozni.

A korlátos variáció fogalmához vezető bizonyítási eljárásnak csak az első négy szintjét vázoltuk. Itt csupán utalunk az érdekes történet folytatására. Az ötödik szint[1] — az újra megalapozott, bizonyításból

1 A bizonyítások és cáfolatok módszere szokásos szintjeinek felsorolását lásd: 185—186. o.

származó fogalom kutatása más bizonyításokban — nyomban elvezetett a korlátos variáció felfedezéséhez annak a primitív sejtésnek a bizonyításában, hogy „minden görbe rektifikálható”.[1] A hetedik szint a Lebesgue-integrálhoz és a modern mértékelmélethez vezet.

Történeti kommentár: A szövegben elbeszélt történethez hozzátehetünk még néhány heurisztikailag érdekes részletet. Dirichlet meg volt győződve arról, hogy második és harmadik lemmájának helyi ellenpéldái *nem globálisak;* meg volt győződve arról, hogy például minden folytonos függvény, függetlenül a maximumok és minimumok számától, Fourier-féle sorba fejthető. Abban is bízott, hogy ez az általánosabb eredmény bizonyításának egyszerű, *helyi* módosításaival bizonyítható. Ezt az elképzelést — hogy 1. Dirichlet bizonyítása csak részleges, és 2. a végleges bizonyítás néhány kisebb módosítással elérhető — 1829-től egészen 1876-ig széles körben elfogadták, de akkor Du Bois-Reymond nyilvánosságra hozta Fourier régi sejtésének *első* igazi ellenpéldáját, s ezzel eloszlatta az ilyen módosításokhoz fűzött reményeket. Úgy tűnik, ennek az ellenpéldának a hatására fedezte fel Jordan a korlátos variációt.

Érdekes, hogy Gauss is bizonyításának olyan helyesbítésére biztatta Dirichlet-t, hogy az akárhány maximummal és minimummal rendelkező függvényre alkalmazható legyen. Némiképp meglepő, hogy noha Dirichlet sem 1829-ben, sem 1837-ben nem oldotta meg a problémát, még 1853-ban is olyannyira magától értetődőnek tartotta a megfejtést, hogy Gauss felszólítására válaszoló levelében rögtönözve fel is vázolta.[2] Megoldásának lényege a következő. Az a feltétel, hogy a maximumok és minimumok halmazának a vizsgált intervallumban egyetlen torlódási pontja se legyen, voltaképpen bizonyításának elégséges feltétele. Dirichlet már első, 1829-ben megjelent írásában megállapította, hogy *második* — a véges sok szakadási helyről

1 Ennek felfedezésében ismét Du Bois-Reymond volt az előfutár (*P. D. G. Du Bois-Reymond:* Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationrechnung. *In:* „Mathematische Annalen”, 1879. 282—315., 564—576. o. és Über den Begriff der Länge einer Curve. *In:* „Acta Mathematica”, 1885. 167—168. o.), és ismét a bámulatosan éles eszű Jordan a tényleges felfedező (*C. Jordan:* Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Párizs 1887. III. k. 594—598. o. és Ua. 1893. I. k 100—108. o.).
2 *P. L. Dirichlet:* Levél Gausshoz. 1853. február 20. *In:* L. Kronecker (szerk.): Werke. II. k. Berlin 1897. 385—387. o.

szóló — feltétele módosítható. Ebben a dolgozatában azt állította, hogy bizonyítása ténylegesen csak akkor alkalmazható, ha a szakadási helyek halmaza sehol sem sűrű. Ezek a korrekciók elárulják, hogy Dirichlet sokat foglalkozott bizonyítása elemzésének problémájával, és meg volt győződve arról, hogy bizonyítása más függvényekre is alkalmazható, nemcsak azokra, amelyek kielégítik óvatos feltételeit; ezeket később „Dirichlet-feltételeknek” nevezték el. Jellemző, hogy 1837-ben megjelent írásában[1] egyáltalán nem fejti ki a tételt. Amint Gausshoz írt levele mutatja, és ahogy személyesen mondta a valószínűleg szkeptikus Weierstrassnak, mindig meg volt győződve arról, hogy tétele minden folytonos függvényre érvényes.[2]

Mármost a tétel eredeti formájában[3] tényleg magában foglalja a „természetben előforduló” függvények minden fajtáját. A további, finomabb elemzés már igazán a „tiszta” analízis birodalmába vezet. Szerintem Dirichlet bizonyításának — elsősorban Riemann által elvégzett — elemzése volt a modern absztrakt analízis kiindulópontja, és túlzásnak tartom Jourdainnek azt az utóbbi időben széles körben elfogadottá vált nézetét, hogy Fourier-nak volt döntő szerepe. Fourier-t nem érdekelték a közvetlen alkalmazhatóságon túlmenő matematikai okfejtések. Dirichlet gondolkodásmódja csakugyan eltért ettől. Homályosan érezte, hogy bizonyításának elemzése új fogalmi keretet igényel. Dolgozatának utolsó mondata valóságos prófécia: „De ehhez az elképzelhető legnagyobb világossággal elvégzendő feladathoz szükség van az infinitezimális számítás alapelveivel kapcsolatos néhány részletre; ezeket majd egy másik jegyzetben adom elő...”[4] Az ígért jegyzetet azonban sohasem publikálta. Riemann volt az, aki — a Cauchy-féle integrálfogalmat bírálván — tisztázta ezeket az „infinitezimális számítás alapelveivel kapcsolatos részleteket”. Ő volt az, aki — kifejezve Dirichlet homályos érzéseit, és bevezetve egy forradalmi technikát — a matematikai analízist, sőt, tulajdonképpen az ésszerűséget érvényesítette azoknak a függvényeknek a területén, amelyek a természetben nem fordulnak elő, és amelyeket korábban torzszülötteknek, vagy legjobb esetben érdektelen kivételek-

1 *P. L. Dirichlet:* Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Id. kiad.
2 Vö.: *W. Ostwald* „Klassiker der exakten Wissenschaften”-je. 186. sz. 1913. 125. o.
3 *P. L. Dirichlet:* Sur la convergence des séries trigonométriques que servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Id. kiad.
4 Uo. 169. o.

nek, „szingularitásoknak" tekintettek. (Ez volt Dirichlet-nek az imént idézett munkájában és Gausshoz írt levelében kifejezett álláspontja.)

Néhány – a tévedhetetlenség eszméjét valló – matematikatörténész itt olyan történelmietlen eljárást alkalmaz, hogy egy küzdelemmel és kritikával teljes hosszú fejlődést a tévedhetetlen felismerés egyetlen aktusába sűrít, és Dirichlet-nek a későbbi analitikusok érettségét tulajdonítja. Ezek a történelemellenes történészek a valós függvény modern általános fogalmát Dirichlet-nek tulajdonítják, s ennek megfelelően Dirichlet-féle függvényfogalomnak nevezik. Bell azt állítja, hogy „P. G. L. Dirichlet definíciója, amely szerint egy (valós, számértékű) változó (számértékű) függvénye két számhalmaz közti »táblázat«, vagy megfeleltetés, vagy korreláció, a ponthalmazok ekvivalenciájának elméletére utalt".[1] Bell jegyzete: Dirichlet: *Werke*. I. k. 135. o. Ott azonban semmi ilyen jellegű megfogalmazás nincs. Bourbaki a következőt írja: „Ismeretes, hogy – pontosabban megfogalmazva Fourier gondolatait – Dirichlet definiálta a függvény általános fogalmát úgy, ahogy azt ma használjuk".[2] „Ismeretes", mondja Bourbaki, de hivatkozásának forrását nem nevezi meg. A legtöbb klasszikus kézikönyvben az a megjegyzés található, hogy a valós függvénynek ez a fogalma „Dirichlet-nek tulajdonítható."[3] Mármost Dirichlet munkáiban egyáltalán nem szerepel ilyen definíció. Viszont van elegendő bizonyíték arra, hogy fogalma sem volt erről a fogalomról. Például a szakaszosan folytonos függvények tárgyalásakor azt mondja, hogy a szakadáspontokban a függvénynek *két értéke van:* „A görbe, amelynek x és y koordinátáit β-val, illetve $\Phi(\beta)$-val jelöljük, több darabból áll. Bizonyos β értékeknek megfelelő, x tengely feletti pontokban a görbe egymást követő darabjai nem összefüggők, és minden ilyen x koordinátának tulajdonképpen két y koordináta felel meg, amelyek közül az egyik ahhoz a darabhoz tartozik, amely abban a pontban végződik, a másik pedig ahhoz, amely ott kezdődik. A továbbiakban meg kell különböztetni $\Phi(\beta)$-nak ezt a két értékét, amelyeket $\Phi(\beta-0)$-val illetve $\Phi(\beta+0)$-val jelölünk."[4] Ezek az idézetek minden ésszerű kétséget kizáróan bizonyítják, milyen messze volt Dirichlet a „Dirichlet-féle függvényfogalomtól".

1 *E. T. Bell:* The Development of Mathematics. Id. kiad. 293. o.
2 *N. Bourbaki:* Éléments d'histoire des mathématiques. Id. kiad. 247. o.
3 Például *J. Pierpont:* The Theory of Functions of Real Variables. I. k. New York 1905. 120. o.
4 *P. L. Dirichlet:* Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Id. kiad.

Azok, akik Dirichlet-t összekapcsolják a „Dirichlet-definícióval", általában arra a Dirichlet-függvényre gondolnak, amelynek értéke 0, ha x racionális szám, és 1, ha x irracionális szám.[1] Megint az a baj, hogy Dirichlet továbbra is úgy vélte, hogy minden valódi függvény tényleg Fourier-féle sorba fejthető, ezt a „függvényt" pedig kifejezetten torzszülöttnek szánta. Dirichlet szerint ez a „függvény" nem „közönséges" valós függvény, sőt, nem is érdemli meg igazán a függvény nevet.

Érdekes, hogy azok, akik sikeresen felfedezték a nem létező Dirichlet-féle függvénydefiníciót, nem figyeltek fel két írásának bármely „teljesen tetszőleges" *(ganz willkürliche)* függvény Fourier-féle sorba fejthetőségére utaló címére. Ez azonban – Dirichlet-hez híven – azt jelenti, hogy a Dirichlet-függvény nem tartozik a „teljesen tetszőleges függvények" családjához, hogy ő maga torzszülöttnek tekintette függvényét, mert egy „közönséges" függvénynek integrálhatónak kell lennie, ez viszont nyilvánvalóan nem integrálható. Riemann tulajdonképpen Dirichlet szűk függvényfogalmát kritizálta, amikor Cauchy integrálfogalmát s annak Dirichlet-ről származó *ad hoc* módosítását bírálta. Riemann bebizonyította, hogy az integrál fogalmának bővítésével még egy olyan torzszülött is integrálható, mint az a függvény, amely minden $p/2n$ alakú racionális helyen nem folytonos, ahol p páratlan, n-hez relatív prím, bár ez a függvény egy mindenütt sűrű halmazon nem folytonos. Következésképpen, ez a Dirichlet torzszülöttjéhez olyannyira hasonló függvény közönséges. (Semmi „önkényes" nem volt abban, ahogy Riemann kibővítette az integrál fogalmát. Forradalmi lépése abból állt, hogy azt kérdezte, milyen függvényeket állítanak elő a trigonometrikus sorok, ahelyett, hogy azt kérdezte volna, milyen függvények fejthetők Fourier-féle sorba. Célja az integrál fogalmának olyan kibővítése volt, hogy minden trigonometrikus sorok összegéből adódó függvény integrálható, s ennélfogva Fourier-féle sorba fejthető legyen. Ez a fogalmi instrumentalizmus egyik legszebb példája.)

Most már talán meg kell nevezni annak a mesének az értelmi szerzőjét, hogy Dirichlet állította fel a „Dirichlet-féle függvény-definíciót". Hankelről van szó, aki a függvényfogalom fejlődését elemezve elmagyarázza, hogyan

1 *P. L. Dirichlet:* Sur la convergence des séries trigonométriques que servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Id. kiad. 169. o.

rombolták le Fourier eredményei a régi függvényfogalmat,[1] majd így folytatja: „Nincs más hátra, mint, először is, elhagyni azt a feltételt, hogy a függvénynek analitikusnak kell lennie, mivel ennek a feltételnek nincs jelentősége, másodszor pedig, elhárítván ezt a nehézséget, kifejteni a következőket: y-t akkor nevezzük x függvényének, ha az x változó egy bizonyos intervallumba tartozó minden értékének y meghatározott értéke felel meg, tekintet nélkül arra, hogy y azonos törvény értelmében függ-e x-től az egész intervallumban, és hogy ez a függés kifejezhető-e matematikai műveletekkel. Ezt a tisztán nominális definíciót Dirichlet-nek tulajdonítom, mert ez szolgál a Fourier-féle sorokról írt munkája alapjául, amelyben bebizonyította a régebbi fogalom tarthatatlanságát..."

c) A mérhető halmaz Carathéodory-féle definíciója

Bizonyára nehéz lesz a váltás a deduktivista megközelítésről a heurisztikus megközelítésre, de a modern matematikát tanítók közül néhányan már felismerik ennek szükségességét. Nézzünk egy példát! A mértékelmélettel vagy valószínűségelmélettel foglalkozó modern kézikönyvekben gyakran találkozunk a mérhető halmaz Carathéodory-féle definíciójával: „Legyen $\mu^\star$ egy külső mérték egy **H** öröklődő σ-gyűrűn. Egy **H**-beli E halmaz **$\mu^\star$-mérhető**, ha bármely **H**-beli A halmazra

$$\mu^\star(A)=\mu^\star(A\cap E)+\mu^\star(A\cap E')."[2]$$

Így, ahogy van, a definíció feltétlenül rejtélyes. Persze, mindig megvan a könnyű kibúvó lehetősége: a matematikusok tetszésük szerint definiálják fogalmaikat. Komoly mesterek azonban nem keresnek ilyen könnyű menedéket. Azt sem állíthatják, hogy éppen ez a mérhetőség *helyes*, *igaz* definíciója, és az érett matematikai intuíció szükségképpen érti is. Tulajdonképpen rendkívül homályosan arra szoktak utalni, hogy a definícióból később levonandó következtetéseket kell

1 *H. Hankel:* Untersuchungen über die unendlich oft Oscillierenden und unstetigen Functionen. *In:* „Mathematische Annalen", 1882. 63—112. o.
2 *P. Halmos:* Measure Theory. New York—London 1950. 44. o.

nézni: „A definíciók dogmák; csak a belőlük levont következtetések vezetnek új felismerésre."[1] Vagyis a bizalom alapján el kell fogadnunk a definíciókat, azután meg kell várni, mi történik. Bár ez sem mentes az önkényességtől, legalább jelzi a probléma felismerését. Apológia, ha mégoly önkényes is. Idézzük Carathéodory definíciójának Halmostól származó apológiáját: „Meglehetősen nehéz intuitíven megérteni a $\mu^\star$-mérhetőség jelentését, hacsak meg nem ismerkedünk következményeivel, amelyeket az alábbiakban szándékozunk kifejteni."[2]. Ezután így folytatja: „A következő magyarázat azonban segíthet Egy külső mérték nem szükségszerűen megszámlálhatóan és még csak nem is végesen additív halmaz-függvény. Amikor megpróbálunk eleget tenni az additivitás ésszerű követelményének, azokat a halmazokat választjuk ki, amelyek az összes többi halmazt additíven osztják; a $\mu^\star$-mérhetőség definíciója ennek a meglehetősen elnagyolt leírásnak a pontos megfogalmazása. Ennek a látszólag bonyolult fogalomnak a legfőbb igazolása viszont az az esetleg meglepő, de teljesen átütő siker, amellyel eszközként alkalmazható a 13. § fontos és hasznos kibővítési tételének bizonyításában."[3]

Nos, ennek az igazolásnak az első, „intuitív" része kissé félrevezető, mert — ahogy a második részből megtudjuk — ez a fogalom a mértékek kibővítésére vonatkozó Carathéodory-tétel (amelyet Halmos csak a következő fejezetben vezet be) bizonyításából származik. Vagyis egyáltalán nem érdekes, hogy intuitív-e vagy sem: logikai alapja nem intuitivitásában, hanem ősbizonyításában van. Soha ne szakítsunk el egy bizonyításból származó fogalmat ősbizonyításától, és ne vezessük be szakaszokkal vagy fejezetekkel korábban, mint azt a bizonyítást, amelyhez képest heurisztikusan másodlagos.

Loeve nagyon helyesen könyvének a mértékek kibővítésével foglalkozó részében adja meg a definíciót mint a kibővítési tételhez szük-

1 *K. Menger:* Dimensionstheorie. Berlin 1928. 76. o. Egyetértően idézi *K. R. Popper:* The Logic of Scientific Discovery. Id. kiad. 55. o.
2 *P. Halmos:* Measure Theory. Id. kiad. 44. o.
3 Uo.

séges fogalmat: „Különböző fogalmakra lesz szükségünk, amelyeket itt gyűjtünk egybe."[1] De honnan a csudából tudja, hogy ezek közül a lehető legbonyolultabb eszközök közül melyikre lesz szüksége a művelet elvégzéséhez? Biztosan van már valami elképzelése arról, hogy mit fog találni és hogyan jár el. Akkor viszont mire való ez a misztikus felépítés, a bizonyítás elé tenni a definíciót?

Könnyen lehetne további példákat hozni, amelyekben a primitív sejtés, a bizonyítás, az ellenpéldák heurisztikus rend szerint vezetnek el a tételhez és a bizonyításból származó definícióhoz, s így eloszlatják az elvont matematika tekintélyelvi miszticizmusát, fékezőleg hatnak az elkorcsosulásra. Igen jót tenne a matematikának néhány ezzel az elkorcsosulással foglalkozó esettanulmány. Sajnos a deduktivista stílus és a matematikai ismeretek atomizálódása komoly védelmet nyújt a „korcs" írásoknak.

1 *M. Loeve:* Probability Theory. New York 1955. 87. o.

UTÓSZÓ

Lakatos Imre 1922-ben született Magyarországon. Egyetemi hallgatóként az Eötvös-kollégiumban élt, s ez bizonyára komoly szerepet játszott a személyét, tevékenységét jellemző sokoldalú érdeklődés és szellemi frisseség kialakulásában. A felszabadulást követő időszakban a Magyar Kommunista Párt tagjaként nagy energiával kapcsolódott be a politikai küzdelmekbe, fontos munkát végzett a művelődésügy, oktatásügy állami irányításában. A személyi kultusz időszakában letartóztatták, elítélték. Kiszabadulása után matematikusként dolgozott, s ez idő tájt fordította magyarra Pólya György *How to Solve It?* („A gondolkodás iskolája") című művét.

1956-ban elhagyta az országot, Angliában telepedett le. A cambridge-i egyetemen doktori fokozatot szerzett, majd a *London School of Economics* professzora volt 1974-ben bekövetkezett korai haláláig.

Lakatos Imre egész tudományos munkásságában széles látókör, mély műveltség, rendkívül eredeti gondolkodásmód nyilvánult meg. Matematikán kívül főleg tudományelmélettel, tudománytörténettel, tudományfilozófiai kérdésekkel foglalkozott. Különösen a tudományos gondolatok, elméletek fejlődéstörvényei érdekelték. Érdekes és gondolatgazdag tanulmányt írt Newton tudományos eredményeinek hatásáról. Matematikai munkássága elsősorban a matematikai logikára, a matematika filozófiájára, a metamatematikára irányult. Különösen nagy hatással voltak rá Pólyának a matematikai heurisztika területén végzett kutatásai és Karl Popper személyisége, írásai. A logikán belül mindenekelőtt az induktív logikát művelte.

Az euklideszi hagyományok szerint a matematikai cikkekben, monográfiákban, sőt, a matematika oktatásában is általános, szinte kötelező a szigorú deduktív tárgyalásmód. Lakatos ezt a hagyományos stílust ironikusan így jellemzi: „Az e stílusnak megfelelő okfejtés az *axiómák*, *lemmák* és/vagy *definíciók* pedáns felsorolásával kezdődik. ...Az axiómák és definíciók felsorolását gondosan megszövegezett *tételek* követik. ...A tételt a bizonyítás követi. ...Ha a diák... egyszerűen kíváncsi lesz arra, hogyan előzhetik meg ezek a definíciók, lemmák és a tétel a bizonyítást, akkor a matematikai éretlenség fitogtatása miatt a bűvész kiközösíti."

A „deduktivista" felfogás a matematikát örök, változatlan, történelemfölötti „épületnek" tekinti, s ez a szemlélet hatja át a mai matematikai szakirodalom zömét, ez uralkodik a felsőfokú és rendszerint a középfokú oktatásban is. A matematika története nem szerves része az oktatásnak, legfeljebb mint „érdekességek", egyes felfedezések történetének „külső" — tehát nem logikai-heurisztikai — leírása jut szerephez. Így gyakran helytelen, torz, metafizikus kép alakul ki a matematikáról. Lakatos az élő, fejlődő matematika izgalmas történetét, fejlődéstörvényeit kutatta, s e vizsgálatainak néhány eredményéről számol be ebben a munkájában, amelyet halála után rendezett sajtó alá két volt tanítványa és munkatársa, s magyar nyelven most jelenik meg először, bár több nyelvre (például oroszra) már jóval előbb lefordították.

A „Bizonyítások és cáfolatok" a matematikai felfedezés logikáját mutatja be, igen világos formában, gazdag történeti anyagra támaszkodva. Jól megválasztott matematikai problémákat boncolgató „esettanulmányai" — Lakatostól egyáltalán nem idegen filozófiai kifejezéssel — a konkrét általános szintjén elemzik a témát, határozott, gyakran éles, de többnyire találó és szellemes polemikus hangnemben.

A poliéder fogalmát és az Euler-féle poliédertételt taglaló dialógusokban támadásának elsődleges célpontja a matematikai formalizmus. Az euklideszi hagyományokon alapuló matematikai dogmatizmus végső bástyáit nem támadja, de a vitából, az elhangzó érvekből, bizonyításokból kibontakozik a kiválasztott fogalom és a tétel dialektikája, hosszú fejlődéstörténete, pontosabban, annak racionális rekonstrukciója. (Az igazi történelem az egyébként kissé nehezen kezelhető lábjegyzetekben kísérhető nyomon.)

A bizonyítások és cáfolatok módszerének alkalmazását szemléltető két további esettanulmány nem véletlenül került függelékbe. Ezek már jóval kevésbé kidolgozottak, mondhatjuk, vázlatosak. Pedig témájuk — az egyenletes konvergencia fogalma és, ehhez kapcsolódva, a hatványsorokra vonatkozó Abel-tétel, illetve a deduktivisztikus és a heurisztikus tárgyalásmód szembeállítása — igen alkalmas arra, hogy a szerző jellemezze a matematika történetének azt az izgalmas korszakát, amikor kialakultak az analízis fogalmai, módszerei, és élesen bírálja a matematikaoktatás mai gyakorlatát. Itt már lényegesen több technikai részlet kifejtésére volna szükség, viszont a könyv nemcsak matematikusok számára íródott. Nyilván ezért — és Lakatos hirtelen halála miatt — találhatunk ezekben az elemzésekben elnagyolt részeket, s joggal hiányolunk — egy matematikai monográfiában elengedhetetlen — pontosabb, szigorúbb megfogalmazásokat. Az itt kifejtett gondolatok azonban így is komoly hozzájárulást jelenthetnek a függvényfogalom oktatásának módszereiről folyó vitákhoz, és sok, az analízis oktatásában nagyon jól hasznosítható ötletet tartalmaznak.

A mű gondolatmenete bizonyítja, hogy Lakatos — aki végső soron történelmi, társadalmi termékként fogja fel a matematikát, és mint ilyent, fejlődésében vizsgálja — milyen új, eredményes vizsgálati módszert alakított ki. A dialógusbeli vitában érdekesen fogalmazódnak meg a mai matematikai filozófia legfontosabb irányzatai: a formalizmus, az intuicionizmus, a logicista filozófia, a nyelvfilozófia felfogása. A matematikus számára nagyon tanulságos, ahogyan a szerző rávilágít a matematikai szigorúság, valamint a „háttérismeretek", az alapfogalmak gyakori, olykor forradalmi változásaira. Ez is jól érzékelteti a matematika fejlődését. Figyelemre méltó, hogy a „bizonyítás" terminust többnyire nem a mai matematikai értelemben használja, azaz nem deduktív levezetést ért rajta. A bizonyítás nála: a nyilvánvalóvá, evidenssé tevés folyamata. (A XVIII—XIX. századi matematikában is gyakran ebben az értelemben szerepelt ez a kifejezés. Utalhatunk ezzel kapcsolatban Szabó Árpád matematikatörténeti kutatásainak eredményeire is. Például: *Szabó Árpád:* A görög matematika kibontakozása. Bp. 1978.)

Nem hallgathatjuk el, hogy elfogadhatatlannak tartjuk Lakatos Imrének az ideológiára, politikára s főleg a marxizmusra vonatkozó, e munkájában csak utalásszerűen, lábjegyzetekben közölt álláspontját. Semmi esetre sem tudjuk helyeselni a politikai ideológiákat, magát a politikát illető általános szkepszisét (80—81 o.), ha tudjuk is, hogy ez az 1950-es években Magyarországon elkövetett hibákra, saját keserű tapasztalataira vezethető vissza. Indokolatlannak, méltánytalannak ítéljük, hogy az egyébként általa is ragyogóan alkalmazott dialektikát egy szovjet szerző tanulmányából kiragadott idézet alapján (88. o. 1. lj.) dogmatikusnak bélyegzi és elveti. Végül, nincs igaza Marxra vonatkozó kritikájában sem (213. o. 1. lj.), arról nem is szólva, hogy ez a hasonlata nem helyénvaló.

*

Lakatos Imre könyve — említett és egyéb hibái, tévedései ellenére — egyik kiemelkedő eredménye a Pólya által kezdeményezett modern matematikai heurisztikai kutatásoknak. Reméljük, nálunk is olyan kedvező fogadtatásra talál majd, mint számos más országban.

DR. URBÁN JÁNOS

NÉVMUTATÓ

TÁRGYMUTATÓ

16

16*

Műszaki Egyetem
Marxizmus-Leninizmus
Intézet
KÖNYVTÁRA