

# Newton korai matematikai munkássága

Newton-kurzus, 2005. 03. 30

# Az óra szerkezete

- I. Newton matematikai forrásai  
Avagy milyen keretek között indult a tevékenysége
- II. Kvadrátúrák, binomiális tétel  
Avagy hozzáállás, kiinduló problémák, első sikerek
- III. Az analízis alaptétele  
Avagy egy egységes módszertan születése
- IV. A fluxióelmélet  
Avagy a módszertan elméleti alapvetése és problémái

# I. Newton matematikai forrásai

- ▶ 1661: Cambridge, Trinity College
- ▶ 1664: elkezd matematikával foglalkozni, és egy ideig gyakorlatilag semmi mással. Két év alatt a semmiből valószínűleg kora legügyesebb matematikusává képzi magát. Forrásai:
  - ▶ Descartes: *La Géométrie*  
– (2.) latin kiadás: Franz van Schooten, 1661
  - ▶ Ebben egyéb munkák összefoglalói, főként François Viète
  - ▶ John Wallis: *Arithmetica Infinitorum*, 1655
- ▶ (De a matematika „nagykönyvét”, Eukleidész *Elemekjét* ekkor még nem ismeri → újszerű keretben dolgozik)

# I.1. A „klasszikus” matematika

- ▶ Az antik matematikai tradíció = az *Elemekben* ábrázolt matematika:
- ▶ Kizárólag geometria: minden matematikai probléma geometriai kontextusban lép fel
- ▶ Nem numerikus: nem konkrét mennyiségi viszonyokra kíváncsi, hanem tetszőleges „nagyságok” összefüggéseire
- ▶ Szigorúan demonstratív: minden állítást bebizonyít
- ▶ Axiomatikus-deduktív: az állításokat visszavezeti egymásra és végül néhány közös alapállításra



- ▶ 17. sz.: a csalhatatlan észhasználat és az általa előállított megkérdőjelezhetetlen, biztos mintaképe
- ▶ De: semmit sem tudnak hozzátenni, sőt...

## I.2. A „modern” matematika

- ▶ 15-16. sz.: Főként arab hagyományon alapuló „algebrista” tradíció feléled:
- ▶ Mennyiségek közötti viszonyok kifejezése mennyiségek manipulációjának segítségével
- ▶ Gyakorlat által motivált számítások, számmisztika és -szimbolika
- ▶ „Barkácsolás”: nincs egységes módszertan, nincsenek bizonyítások, hiányzik az egyetemesen érvényes „igazságok” kimutatásának igénye



- ▶ 17. sz. (főként eleje): alantas, megbízhatatlan, mesterségbeli ügyeskedés, nem tudomány
- ▶ De: rohamosan fejlődik

## I.2/a. Franois Viète (1540-1603)

- ▶ 16. sz. vége: minden fennmaradt antik matematikai mű feldolgozásra kerül + az arab matematika is + ezen is túllépnek: harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásai
- ▶ „ars analyticae”: betűalgebra → magánhangzókkal az ismeretlent, mássalhangzóval az ismertet  
→ paraméter-szerű elgondolás: általános megoldások
- ▶ Trigonometrikus megoldások algebrai egyenletekhez  
pl. egy 45-öd fokú egyenlet m.o.-a ilyen úton: nagy siker
- ▶ Másod- és harmadfokú egyenletek gyökei és együtthatói közti összefüggések („Viète-formulák”)
- ▶ Egyenletek általános kezelése, szimbolikus, algebrai jellegű matematikai gondolkodás

## I.2/b. René Descartes (1596-1650)

- ▶ *La Géométrie*: eredetileg az *Értekezés a módszerről* függelékének szánja
- ▶ A legforradalmibb mű a korban (v.ö. pl. Fermat), és a legnagyobb hatással van a század 2. felére
- ▶ Apollóniosz, Papposz stb. belátásainak rendszerezése és egységes keretbe ágyazása: „analitikus geometria” őse
- ▶ „A geometria bármely problémája visszavezethető erre a tételre: bizonyos vonalak hosszának ismerete elegendő a megszerkesztéshez.”
- ▶ → vonalszakaszokat konkrét mennyiségekkel reprezentál, és a probléma megoldását algebrai egyenletekkel végzi el (ahány ismeretlen vonal, annyi egyenlet) + görbék  
→ algebra és geometria egysége



## I.2/c. John Wallis (1616-1703)

- ▶ *Arithmetica Infinitorum*: görbék alatti területek és görbékhez húzott érintők „végtelen kis” részekre való osztás révén (Cavalieri módszere algebrásítva)
  - ▶ Végtelen sorokkal operál
  - ▶ Megmutatja pl.: az  $x^n$  görbe alatti terület  $x^{n+1}/n+1$  egész kitevőkre (az első 9 esetre megnézni, majd általánosít)
  - ▶ Fő problémája: a kör területe
- ⇓
- ▶ Newton pontosan ezekből a problémákból indul ki



## II. Kvadrátúrák, binomiális tétel

- ▶ Eleinte: Kúpszeletek szerkesztése és sokféle algebrai kifejezése Descartes alapján
- ▶ 6 hónap után: görbék vizsgálatára általános algebrai módszereket dolgoz ki
- ▶ „Haveing  $y^e$  nature of a crooked line expressed in Algebr: termes to find its axes, to determin it & describe it geometrically &c.”
- ▶ Görbület vizsgálata közelítő (simuló) körökkel: Descartes + érintő szerkesztése egy adott pontban
- ▶ Kvadrátúrák: görbék „négyszögesítései”, vagyis a görbe alatti terület kiszámítása egyenlő területű téglalap szerkesztésével (Wallis)
- ▶ Nem a klasszikus geometria felől közelít (alig ismeri)

## II.1. A kör „négyszögesítése”

- ▶ A negyedkört kifejező egyenlet:  $y = (1 - x^2)^{1/2}$
- ▶ Wallis problémája: Tudjuk, hogy

$(1 - x^2)^0$  alatti terület  $x$

$(1 - x^2)^1$  alatti terület  $x - x^3/3$

$(1 - x^2)^2$  alatti terület  $x - 2x^3/3 + x^5/5$

$(1 - x^2)^3$  alatti terület  $x - 3x^3/3 + 3x^5/5 - x^7/7$

stb.

Hogyan lehet ebből  $(1 - x^2)^{1/2}$  esetére interpolálni?

- ▶ Wallis adott egy megoldást. Newton egy általánosabbat, amiből elég messzire tudott továbblépni...

## II.1/a. Az együtthatók táblázata

		[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	...
$x$	×	1	1	1	1	1	1	...
$-x^3/3$	×	0	1	2	3	4	5	...
$x^5/5$	×	0	0	1	3	6	10	...
$-x^7/7$	×	0	0	0	1	4	10	...
.		.	.	.	0	1	5	...
.		.	.	.	.	0	1	...
.		.	.	.	.	.	0	...

Milyen szabályosságot látunk? (Pl. az oszlopok 11 „hatványai”)

## II.1/b. A keresett összefüggés

- ▶ Newton *nem* a Pascal-háromszögre mozdul rá
- ▶ Az első tag együtthatója mindig 1, a másodiké mindig  $n$
- ▶ Összefüggés:  $(n - 0)/1 \times (n - 1)/2 \times (n - 2)/3 \times \dots$   
→ ez alapján jönnek ki az együtthatók

Pl.  $n = 4$  esetén

- harmadik együttható:  $(4 - 0)/1 \times (4 - 1)/2 = 4 \times 3/2 = 6$
- negyedik együttható:  $6 \times (4 - 2)/3 = 6 \times 2/3 = 4$
- ötödik együttható:  $4 \times (4 - 3)/4 = 4 \times 1/4 = 1$
- hatodik együttható:  $1 \times (4 - 4)/5 = 4 \times 0 = 0$   
és innentől 0.

- ▶ Honnan tudjuk? Ránézett, és bejött...

## II.1/c. Interpoláció a körre

- ▶ Ez már „nyilván” érvényes törtekitevőkre is, pl.  $\frac{1}{2}$ -re. Így a  $(1 - x^2)^{1/2}$  alatti terület:

$$x - (1/2)x^3/3 - (1/8)x^5/5 - (1/16)x^7/7 - (5/128)x^9/9 - \dots$$

- ▶ Míg az egész kitevők esetén a sor mindig véges, törtekitevőknél végtelen sorokat kapunk  
→ végtelen sorral „közelíthetjük” itt  $\pi$  értékét
- ▶ De Newton egyáltalán nem számolta ki: tökéletesen megbízott módszerében → a jól ismert érték kiszámítása nem lenne kihívás...

## II.2. A logaritmus kvadrátúrája

- ▶ Ugyanígy támadjuk meg a hiperbolát: ez eddig senkinek sem sikerült
- ▶ Az  $y = 1/x$  görbét nem érdemes: az  $x^0, x^1, x^2 \dots$  alatti terület  $x^1/1, x^2/2, x^3/3 \dots$ , de ebből nem látszik, mi lenne a  $x^{-1}$  alatti terület:  $x^0/0$  ???
- ▶ Ehelyett toljuk el egy kicsit:  $y = 1/(1 + x)$
- ▶ Ehhez:

$(1 + x)^0$  kvadrátúrája  $x$

$(1 + x)^1$  kvadrátúrája  $x + x^2/2$

$(1 + x)^2$  kvadrátúrája  $x + 2 x^2/2 + x^3/3$

$(1 + x)^3$  kvadrátúrája  $x + 3 x^2/2 + 3 x^3/3 + x^4/4$

stb.

## II.2/a. Az együtthatók táblázata

---

		[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	...
$x$	×	1	1	1	1	1	1	...
$x^2/2$	×	0	1	2	3	4	5	...
$x^3/3$	×	0	0	1	3	6	10	...
$x^4/4$	×	0	0	0	1	4	10	...
.		.	.	.	0	1	5	...
.		.	.	.	.	0	1	...
.		.	.	.	.	.	0	...

---



## II.2/b. Extrapoláció

- ▶ Itt most nem kettő közé kell interpolálni, hanem „hátrafelé” extrapolálni egyet → ez könnyebb
- ▶ Ha az első sorban 1 lesz (mind mindenütt), akkor a második sorban -1 kell: feltesszük, folytatódik erre a „Pascal-háromszög” (vagyis egy szám és a fölötte lévő összeadva a számtól jobbra lévő adja ki)
- ▶ Ezért a 3. sorban 1 kell, a 4.-ben -1, stb.
- ▶ Tehát  $(1 + x)^{-1}$  alatti terület:  $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$
- ▶ Ismét végtelen sort kaptunk!
- ▶ Itt már érdemes számításokat végezni: 55 jegy pontosságra logaritmus-számítások könnyedén
- ▶ Megj.: egy éve foglalkozik matekkal, teljesen önállóan, nincs még BA-je sem...



## II.3. Az általános módszer

- ▶ Tudjuk, hogy  $x^n$  alatti terület  $x^{n+1}/n+1$  (negatív kitevőkre is)
- ▶ Tudjuk, hogy ha a görbe polinomiális, akkor a kvadrátúra egyenlő a tagok alatti területek összegével
- ▶ Ha  $x$  az első hatványon van a nevezőben, vagy törtkitevős a kifejezés, akkor végtelen sor, és tagonként kell számolni
- ▶  $(b + x)^{m/n}$  együtthatóit eszerint keressük:

$$\frac{1 \cdot m \cdot (m - n) \cdot (m - 2n) \cdot (m - 3n) \cdot \dots}{1 \cdot n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot \dots}$$

- ▶ Később: tovább általánosodik (pl. ha  $x$  és  $y$  ugyanabban a tagban megjelenik, és nem fejezhetők ki egymás explicit függvényeként...)

## II.3/a. A binomiális tétel szerepe

- ▶ Lényeg: görbék kifejezhetők végtelen sorokkal  
→ újabb algebrai reprezentáció a „geometriai” vonalakra
- ▶ A végtelen sorok ugyanolyan törvényeknek engedelmeskednek, mint a véges mennyiségek az algebrában (→ műveletek, egyenletek, stb.)  
→ nem pusztán „közelítések”
- ▶ A binomiális tétel  $[(b + x)^m]$  polinom alakjában az együtthatók meghatározása] általánosítása a dolog motorja
- ▶ Először Leibniz-cel közli egy 1676-os levélben
- ▶ Először Wallis *Algebra*-jában jelenik meg (1685)
- ▶ V.ö.: Newton keveset és vonakodva publikál...

## II.3/b. Végtelen sorok

„Amit a szokásos Analízis képes egyenletek által elvégezni véges számú tagokkal (már amennyiben ez lehetséges), ugyanazt elvégezhetjük végtelen egyenletek által is, ezért nem tettem kérdésessé, hogy ezt is Analízisnek kell nevezni. Ugyanis ezek a gondolatmenetek nem kevésbé bizonyosak, mint a másikkak, sem az egyenletek nem kevésbé pontosak, bár mi, halandók, kiknek gondolkodása szűk keretek közé szorult, sem kifejezni, sem pedig felfogni nem tudjuk ezen egyenletek minden tagját...”

*(De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas)*



### III. „Az analízis alaptétele”

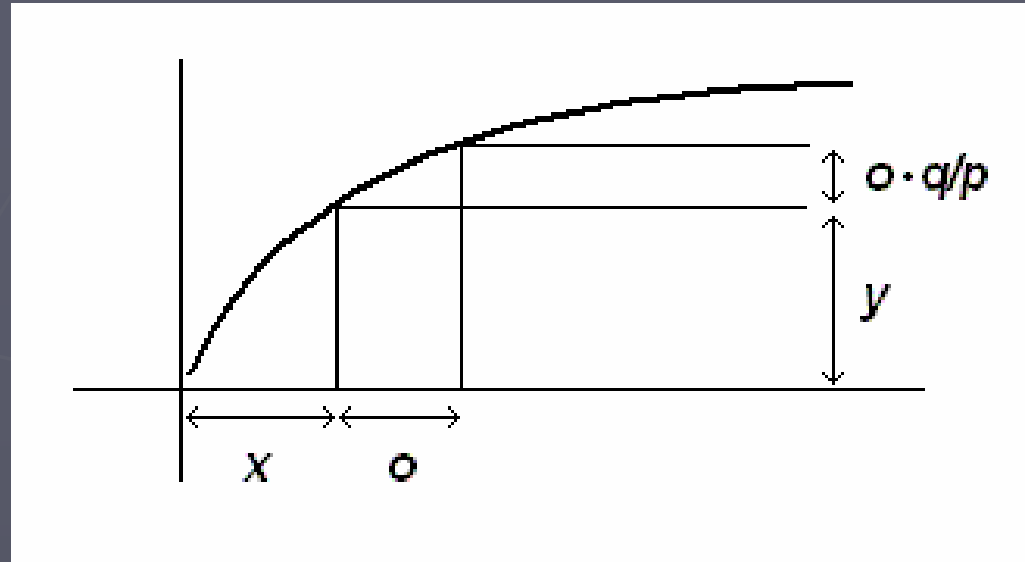
- ▶ Cavalieri, Wallis, stb.: a görbék alatti területet sok, „oszthatatlanul kis” terület összegeként képzelték el („infinitezimálisok”)
- ▶ Newton: hasonló módon, de nála nem statikus kis területek vannak, hanem mozgás által meghatározott dinamikus összegzések → egyre erősödő mechanikai motiváció
- ▶ A „végtelenül kis” szakaszok helyett pillanatnyi sebességekkel dolgozik
  - ↔ ezzel persze nem kerülte ki az infinitezimálisokat: a pillanatnyi sebesség az infinitezimálisan kis idő alatt megtett út
  - az idő a matematikában is alapvetővé válik
- ▶ Semmi ilyesmi nincs: „tart a nullához”, „határérték”, stb.: ezek későbbi fogalmak

# III.1. Az érintő meghatározása

Tfh. (1)  $y = a \cdot x^m$

Ekkor kis  $o$  növekmény:

(2)  $y + o \cdot q/p = a \cdot (x + o)^m$



Tudjuk, hogy (2) jobb oldala:

$$a \cdot x^m + a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„blablabla”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} + \dots$$

(2) – (1):

$$o \cdot q/p = a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„blablabla”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} \dots$$

/o:

$$q/p = a \cdot m \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o \cdot x^{m-2} + \text{„blablabla”} \cdot o^2 \cdot x^{m-3} \dots$$

Mivel  $o$  végtelen kicsi, ezért a meredekség:  $q/p = a \cdot m \cdot x^{m-1}$



## III.2. A növekmények módszere

„Észre kell vennünk: Először, hogy azok a tagok mindig eltűnnek, ahol  $o$  nem szerepel, mert ezek megfelelnek az eredeti egyenletnek. Másodsor, ha a maradék Egyenletet leosztjuk  $o$ -val, akkor azok a tagok szintén eltűnnek, amelyekben  $o$  megmarad, mert ezek végtelenül kicsik. Harmadszor, hogy a végül megmaradó tagok olyan formájúak lesznek, amilyeneknek lenniük kell a kiinduló szabály alapján.”

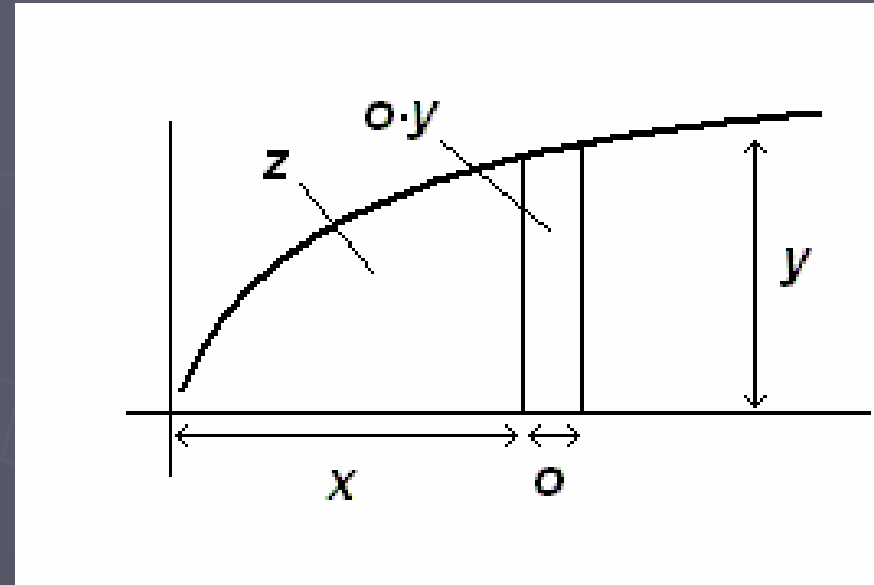
(1665. november 13: „Hogyan találjuk meg testek sebességét azon vonal alapján, amelyet leírnak”  
→ egyike a „rendszerző” jegyzeteinek)

# III.3. A görbe meghatározása területből

Legyen a görbe alatti terület:

$$(1) \quad z = a \cdot x^m$$

$$(2) \quad z + o \cdot y = a \cdot (x + o)^m$$



Ismét (2) jobb oldala:

$$a \cdot x^m + a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„blablalba”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} + \dots$$

(2) – (1):

$$o \cdot y = a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„blablalba”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} \dots$$

/o:

$$y = a \cdot m \cdot x^{m-1} + \text{„blabla”} \cdot o \cdot x^{m-2} + \text{„blablalba”} \cdot o^2 \cdot x^{m-3} \dots$$

Mivel  $o$  végtelen kicsi, ezért a keresett görbe:  $y = a \cdot m \cdot x^{m-1}$

## III.4. Egységes matematikai terület

- ▶ A fenti példák megmutatják: a két probléma (érintő meghatározása és terület kiszámítása) egymás *inverze*  
→ a kettő együtt egy egységes területet körvonalaz („analízis alaptétele”: differenciálás és integrálás kapcsolata)
- ▶ Megjegyzés: bár a fenti ismertetés kicsit csal (III.3 kicsit későbbi (1669), egyszerűbb az 1665-ös próbálkozásoknál), hasonló felismeréseket tesz a korban először konkrét esetekben (parabola, hiperbola, stb.), majd általános megfogalmazásokat dolgoz ki
- ▶ Ezután 3-4 évig alig nyúl matematikához (és ha igen, akkor annak mechanikai motivációja van), és jó ideig erre támaszkodik (bár az alapokat újra és újra próbálja tisztába tenni → igen sokáig nem publikálja)

## III.5. A géniusz Newton

- ▶ „Nincs oly göbe vonal, légyen az bármely háromtagú egyenlettel kifejezett, még ha benne az ismeretlen mennyiségek hatnak is egymásra [...], melyről kevesebb mint egy negyedóra fele alatt meg ne tudnám mondani, hogy négyzetesíthető-e, vagy hogy mely legegyszerűbb figurákkal összevethető, legyenek e figurák kúpszeletek vagy bármi mások. És ekkor közvetlen és rövid úton (megkockáztatom, a legrövidebben, melyet a dolgok természete megenged az általános számára) össze is hasonlítom őket...” (1676, egy Collinsnak írt levél)
- ▶ Ez a zsenitűdát 1666-ra kifejlődik benne, önálló matematikai sikereinek köszönhetően, aztán élete végéig ott is marad...

# IV. Fluxióelmélet

Próbálkozások az új matematikai elmélet letisztázására:

1. *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Analízis végtelen sok tagú egyenletek segítségével), 1669 (publikálva: 1711)
2. *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (A fluxiók és a végtelen sorok módszere), 1671 (publ.: 1736)
3. *Tractatus de Quadratura Curvarum* (Értekezés a görbék kvadraturájáról), 1676 (publ: 1704, az *Opticks* függeléke)
4. Wallis *Algebra*-jában (1685) Newton először publikálta a fluxióelméletet (második kiadás latinul: 1693)
5. *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687

## IV.1. Fluxiók, fluensek

- ▶ 1671:  $o$  már nem  $x$  növekménye, hanem „végtelenül kis időintervallum”  $\rightarrow$  minden változó időfüggő lesz
- ▶ Ha  $x$  és  $y$  a fluens („folyó”) mennyiségek, akkor ezek változásának sebességei, a fluxiók  $\dot{x}$  és  $\dot{y}$  (és ezek változásának sebességei  $\ddot{x}$  és  $\ddot{y}$ , stb.) (Sőt: adott  $x$ -et fluxiónak tekintve a hozzá tartozó fluens  $\acute{x}$ , annak a fluense  $\ddot{x}$ , stb.)
- ▶  $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^m$  - ebből itt is kijön:  $\dot{y} = m \cdot x^{n-1} \cdot \dot{x}$
- ▶ A módszer gyakorlatilag ugyanaz, de a nézet kicsit eltér: időbeli változások mennek végbe  $\rightarrow$  egyre inkább a fizikához közelít az elmélet
- ▶ Cél: megszabadulni az oszthatatlanoktól, de ez sikertelen



## IV.2. Fluxiók és a mozgás

„Itt nem úgy kezelem a matematikai mennyiségeket, mint amit nagyon kis részekből állnak, hanem mint amiket folytonos mozgás határoz meg. A vonalakat nem a részek összetétele, hanem pontok mozgása hozza létre, a felületeket a vonalak mozgása, a testeket a felületek mozgása, a szögeket a szárak forgása, az időtartamokat a folyamatos *fluxio*... A fluxiók nem mások, tetszőleges közelítéssel, mint a folyó mennyiségek idő szerinti növekményei, olyan kicsik és olyannyira egyenlők, mint amennyire lehetséges, és, hogy pontosan fogalmazzunk, a születőben lévő növekmények első arányában állnak, mégis kifejezhetők bármely vonallal, amely arányos velük.”

( *Tractatus de Quadratura Curvarum* )



## IV.3. Az alapprobléma

- ▶ Hiába próbál megszabadulni tőle, a kis  $o$  növekmény ott van, még ha növekmények „születőben lévő arányáról” beszél is: ez az „oszthatatlanok” feltételezése
- ▶ Márpedig mi az az  $o$ , amit egyszer végesnek tekintünk és leosztunk vele, máskor meg végtelenül kicsinek és elhanyagoljuk?
- ▶ Bár az elmélet sikeres és rengeteg problémát jól kezel, az alapok továbbra is kérdésesek maradnak (Leibniz felépítésében hasonló módon)
- ▶ Az alapok tisztázására több mint 150 (!) vet kell várni: határérték-fogalom letisztázása,  $\varepsilon$ - $\delta$  „nyelv” megalkotása, stb. (Cauchy, Weierstrass)

## IV.4. Berkeley kritikája

- ▶ Egy alapos, részletekbe menő filozófiai kritika:  
*Az analizáló, 1734*
- ▶ Az elme számára nehéz, „hogyan világos ideákat formáljon az idő legkisebb részecskéiről, vagy az ezekben létrejövő legkisebb növekményekről; s még inkább, hogy felfogja a momentumokat, azaz a fluens mennyiségek növekményeit *in situ nascendi*, tehát létrejöttük legkezdetén, mielőtt még véges mennyiségekké válnának. Ennél is nehezebbnek látszik felfogni az ilyen születőben levő, befejezetlen entitások elvont sebességeit. A sebességek sebességei, a másod-, harmad-, negyed- és ötödrendű sebességek stb. azonban, ha nem tévedek, teljességgel meghaladják az emberi felfogóképességet.”
- ▶ „De mik ezek a fluxiók? Az eltűnőben levő növekmények sebességei. És mik ezek az eltűnőben levő növekmények? Se nem véges mennyiségek, se nem végtelenül kicsinyek, még csak nem is semmik. Mi mások lennének tehát, mint a kimúlt mennyiségek kísértetei?”

## IV.5. A későbbi matematikai stílus

- ▶ 1670-es évek: fokozatosan elhidegül a „szimbolikus analízis” algebrai stílusától, és ezzel az egész „modern” matektól, miközben beleszeret a görög geometriába
- ▶ „Világos, hogy a módszerük [az ókoriaké] sokkal elegánsabb, mint a kartéziánus. Ő [Descartes] egy algebrai kalkulus segítségével jutott eredményre, melyet ha szavakra íránk át (követve az ókoriak gyakorlatát), akkor oly fárasztó és szövevényes lenne feladatunk, hogy hányinger fogna el bennünket...” (1670)
- ▶ A *Principia* már geometriai úton fejti ki az elméletet: az analízis csak „heurisztika”, felfedezés, de nem biztos tudás
- ▶ Mikor az 1699-ben kezdődő, Leibniz-cel folytatott prioritási vita hatására publikálni kezdi korábbi eredményeit, azokat meghamisítja, geometrizálja, átírja a gyanús részeket
- ▶ A fontos eredmények „algebrista” korszakából származnak, de befolyásos korában antimodernista, „reakciós” attitűd