

**A Bolyai-Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria felfedezésének és hatásának története**  
**6.**

Tanács János

egy. adj.  
BME Filozófia és Tudománytörténet Tsz.  
MTA-BME Tudománytörténet és Tudományfilozófia Kutatócsoport

nego@filozofia.bme.hu

**Milyen különbségek lehetnek a jelentésre vonatkozó felfogások között?**

**Egyáltalán: mi a jelentés?**

**Frege válasza (Frege-Russell-Carnap stílusú szemantika)**

Minek az azonosságát állítja az

„Alkonycsillag azonos a Hajnalcsillaggal” állítás?

**A jelentés maga a megnevezett dolog, a referencia.**

Mivel az „Alkonycsillag” és a „Hajnalcsillag” ugyanarra az objektumra vonatkozik (uaz. a referenciája), és

a jelentés maga a megnevezett dolog,

ezért az „Alkonycsillag” és a „Hajnalcsillag” jelentése megegyezik.

118.

**Milyen különbségek lehetnek a jelentésre vonatkozó felfogások között?**

**Egyáltalán: mi a jelentés?**

Ha azonban az „Alkonycsillag” és a „Hajnalcsillag” referenciája megegyezik, éspedig

ez, mint objektum azonos önmagával,

akkor a „Alkonycsillag” és a „Hajnalcsillag” jelentése is megegyezik.

Ha azonban így van, akkor az azonos jelentésű kifejezések „*salva veritate*” (az igazságérték megváltozása nélkül) kicserélhetők, felcserélhetők.

**Tehát:**

„Az Alkonycsillag azonos a Alkonycsillaggal” állításra léphetünk.

119.

**Milyen különbségek lehetnek a jelentésre vonatkozó felfogások között?**

**Egyáltalán: mi a jelentés?**

Míg azonban

„Az Alkonycsillag azonos a Alkonycsillaggal”

tautológiának, és ezért semmitmondónak tűnik,

addig az eredeti

„Alkonycsillag azonos a Hajnalcsillaggal”

állítás nem tautológia, és nem semmitmondó,

hanem tartalmaz: egy empirikus tényt fejez ki, mond valamit a világról, amit fel kellett ismerni vagy fedezni.

120.

**Milyen különbségek lehetnek a jelentésre vonatkozó felfogások között?**

A jelentés finomabb szerkezetű, fel kell bontani két komponensre:

**intenzió** – (Frege-nél „értelem”) intraszubjektív, azaz a „fejben van”, introspektív, azaz magadba mélyedve, belső megfigyeléssel ragadható meg azonosságuk.

**extenzió** – (Frege-nél jelentés) referencia, interszubjektív, azaz külsőleg is megnyilvánul, közösségre hozzáférhető és ellenőrizhető, azonosságuk empirikus megfigyeléssel is tetten érhető, megragadható.

Vannak tehát intenzionális és extenzionális kifejezések és kontextusok.

121.

A jelentés két komponense:

intraszubjektív (intenzió, introspektív)

interszubjektív (extenzió, referencia, jelöllet)

Egyes extenzionálisan egyező kifejezéseket (intenzionálisan) azonos jelentésűnek tartunk, másokat nem.

**Egyező extenzió – egyező intenzió:**

1. nős férfi, férj, házas férfi, husband, married man
2. agglegény, nőtlen férfi, unmarried man, bachelor

**Egyező extenzió – különböző intenzió:**

1. Tollatlan kétlábú vs. ember
2. Szíves vs. Vesés

122.

Az abszolút, a hiperbolikus és az euklideszi geometria axiomatikusan felépítésben		123.
I. Illeszkedési axiómák:	$I_1, I_2, \dots, I_9.$	
II. Rendezési axiómák:	$O_1, O_2, \dots, O_8.$	
III. Egybevágósági axiómák:	$C_1, C_2, \dots, C_7.$	
IV. Folytonossági axióma(k):	$Co.$ (Olykor $Co_1, Co_2.$ )	
V. Párhuzamossági axióma:		
V1. Euklideszi párhuzamossági axióma:	$AX_{EP}.$	
V2. Hiperbolikus párhuzamossági axióma:	$AX_{BLP}.$	
A Bolyai-féle abszolút geometria: az <b>I-IV.</b> axiómacsoport.		
Az euklideszi geometria: az <b>I-IV.+ V1.</b> axiómacsoport.		
A BL-féle hiperbolikus geometria: az <b>I-IV.+ V2.</b> axiómacsoport.		

Az abszolút, a hiperbolikus és az euklideszi geometria axiomatikusan felépítésben			124.
BL-féle hiperbolikus geo.	Bolyai-féle abszolút geo.	Euklideszi geo.	
$I_1, I_2, \dots, I_9.$	$I_1, I_2, \dots, I_9.$	$I_1, I_2, \dots, I_9.$	
$O_1, O_2, \dots, O_8.$	$O_1, O_2, \dots, O_8.$	$O_1, O_2, \dots, O_8.$	
$C_1, C_2, \dots, C_7.$	$C_1, C_2, \dots, C_7.$	$C_1, C_2, \dots, C_7.$	
$Co_1, Co_2.$	$Co_1, Co_2.$	$Co_1, Co_2.$	
+		+	
$AX_{BLP}.$		$AX_{EP}.$	

Az egyes axióma-csoportok		125.
I. Illeszkedési axiómák: $I_1, I_2, \dots, I_9.$		
$I_1:$	Két különböző ponthoz mindig tartozik egy egyenes, amely mindkettőhöz illeszkedik.	
$I_2:$	Két különböző ponthoz nem tartozik egynél több olyan egyenes, amely mindkettőhöz illeszkedik.	
II. Rendezési axiómák: $O_1, O_2, \dots, O_8.$		
$O_1:$	Ha a B pont az A és a C pontok között van, akkor A, B, C különböző pontok, és egy egyenes pontjai.	
$O_2:$	Két ponthoz, A-hoz és C-hez létezik az AC egyenesnek legalább egy olyan B pontja, hogy C az A és B között van.	
III. Egybevágósági axiómák: $C_1, C_2, \dots, C_7.$		
(Szakaszok, szögek, valamint szögek és szakaszok egybevágóságnak ax.-i)		
$C_1:$	Ha két szakasz egybevágó egy harmadikkal, akkor egymással is egybevágók.	
IV. Folytonossági axióma(k): $Co.$ (olykor $Co_1, Co_2$ )		
$Co_1:$	Arkhimédész-féle szakaszfelmérési ax.	
$Co_2:$	Cantor-féle egymásbaskatulyázott intervallumok ax.	

A nem-euklideszi geometria elfogadásának kontextusa: a Frege-Hilbert vita		126.
<b>David Hilbert</b>		
➤ A matematikafilozófia formalista irányzatának megalapítója		
➤ A matematika formális tudomány: a formális, de <b>nem</b> jelentés nélküli szimbólumokkal ...		
➤ A matematikai igazság és létezés (egzisztencia) kizárólagos, szükséges és elégséges kritériuma: az axiómák konzisztenciája.		
Hilbert Gottlob Fregehez intézett 1899. december 29-i levele:		
„Ha az önkényesen kiválasztott axiómák nem mondanak ellent egymásnak vagy bármely következményüknek, akkor igazak, és az általuk definiált dolgok léteznek. Ez számomra az igazság és a létezés kritériuma.”		

A nem-euklideszi geometria elfogadásának kontextusa: a Frege-Hilbert vita		127.
Hilbert a <i>Grundlagen der Geometrie</i> -ben is definiálásról beszél, például a második, úgynevezett rendezési axiómacsoport (3. paragrafus)		
„közte levés, közötté van” fogalma kapcsán.		
„Ez az axiómacsoport definiálja azt az ideát [fogalmat], amelyet a 'között' szó kifejez...”		
⇒ Hilbert szerint tehát az axiómák definícióként funkcionálnak		
⇒ ún. <b>implicit</b> definícióként.		
<b>Az axiómák implicit definíciók, amelyek definiálják a bennük szereplő kifejezések (alapfogalmak, primitív kifejezések) jelentését.</b>		

A Frege-Hilbert vita		128.
<b>Frege ellenvetései:</b>		
Különbözőek a Hilbert-féle axiómarendszer egyes részcsoportjai kapcsán.		
A Hilbert-féle <i>Grundlagen</i> második, azaz rendezési axiómacsoportja (3. paragr.) kapcsán azzal érvelt, hogy:		
➤ azt az azért nem tekinthetjük a 'között' fogalom definíciójának, mert az axióma állításai nem képesek megadni a <b>jellemző tulajdonságokat</b> , azaz		
➤ nem teljesítik azt, amit elvárunk a definíciótól, nevezetesen,		
➤ hogy képessé tegyen bennünket annak eldöntésére, vajon egy adott tárgy, dolog az úgynevezett definiált fogalom alá tartozik-e vagy sem.		

### A Frege-Hilbert vita

- A Hilbert-féle *Grundlagen* első axiómacsoportja (2. paragr., az illeszkedés [rajta levés] axiómái) kapcsán pedig az volt a kifogása, hogy
- a 'pont', 'egyenes', ...stb. szavak jelentését nem adhatják meg az axiómák, hanem azoknak már előzetesen ismerteknek kell lenniük.

129.

### A Frege-Hilbert vita

- Hilbert azonban kitartott amellett, hogy
- az egyes axiómacsoportok együttesen képesek meghatározni azon kifejezések jelentését, amelyek bennük szerepelnek, és
- szükség esetén az axiómák elé biggyeszthetnénk pld., hogy „a 'között' olyan reláció, amely az egyenes pontjaira vonatkozik, és amelynek a következő jellemző tulajdonságai vannak:  
II.1. ... II.5.  
(Azaz itt egyszerűen csak fel kell sorolni a szóban forgó axiómákat.)

130.

### A Frege-Hilbert vita

Ha egyszer az axiómák konzisztenciája dönti el, hogy az általuk definiált dolgok léteznek és az axiómák igazak, akkor

az axiómák együttese, mint rendszer határozza meg (definiálja impliciten) a bennük szereplő kifejezések jelentését,

⇒ következőképp: különböző axiómarendszerek különböző (implicit) definíciókat eredményeznek,

⇒ azaz különböző axiómarendszerek formálisan azonos primitív kifejezéseinek különbözőek a jelentései.

131.

### A szemantikai holizmus

- A mondat a legkisebb, önmagában használható nyelvi egység: nem szavakat állítunk, hanem mondatokat, és az, amit le tudunk ellenőrizni, amiben tudunk egyet érteni vagy nem érteni, az a mondat.
- Az első, közvetlenül hozzáférhető szinten a mondatoknak van, a mondatok kapnak jelentést, nem a szavak.
- A szavak jelentése közvetett, „származtatott” ⇒ a mondat grammatikai szegmentálása révén jön, hozható létre a szójelentés.
- A szegmentálhatóság azonban nem egyértelműen meghatározott, alternatív feldarabolások is elképzelhetők, következőképpen a mondatjelentés lebontása szójelentésre nem egyértelmű.

132.

### A szemantikai holizmus

- Ha a szavak címkék a fogalmakon, akkor a szójelentés (azaz az intenzionális komponens) felel meg a fogalomnak, azaz a szójelentés felel meg a fogalmi tagolásnak.
- Mivel azonban alternatív tagolások lehetségesek szavakra, ezért alternatív fogalmi tagolások lehetségesek  
⇒ nincs kivételezett, helyes fogalmi tagolás, amelyhez képest a többi téves, fogalmi ficamokat magában foglaló.

#### Rádásul:

- Amikor egy új, eddig nem használt mondatot alkotunk meg, akkor világos, hogy
- a mondat jelentése a benne előforduló szavak jelentésétől függ: abból hozzuk létre, abból alkotjuk meg (kompozicionalitás).
- Ugyanakkor a mondat használatának, igaznak tartásának körülményei hozzá is járulnak a benne előforduló szavak jelentéséhez.

133.

### A szemantikai holizmus

- A szavak jelentését az határozza meg, hogy milyen igaz mondatokban fordulnak elő.
- A szavak kapcsolóelemek: kapcsolatot teremtenek az egyes formailag, grammatikailag különböző mondatok között.
- Ennélfogva: egy mondat jelentése, igazságértéke a nyelv többi mondatához fűződő viszonyán **is** múlik: a viszonyt a szavak hozzák létre, eredménye pedig az, hogy egy adott mondat jelentését más, logikailag nem független mondatok jelentése, igazságértéke, igaznak tartásának körülményei is befolyásolják.
- Összefoglalva:  
Egy nyelvi egység jelentése a nyelv jelentésrendszerének egészében elfoglalt helyén múlik.  
**Ha tehát egy mondat jelentése, igazságértéke megváltozik, akkor más mondatok jelentése, igazságértéke is változni fog.**

134.

**Az abszolút, a hiperbolikus (nemeuklideszi) és az euklideszi geometria egymáshoz való formális viszonyai**

Bolyai-féle abszolút geometria (AGB) axiómarendszerének jelölése:  $AX_{AGB}$   
 Az euklideszi geometria (EG) axiómarendszere:  $AX_{EG}$   
 A hiperbolikus geometria (BL-geometria) axiómarendszerének jelölése:  $AX_{BLG}$   
 Az euklideszi párhuzamossági axióma jelölése:  $AX_{EP}$   
 A hiperbolikus párhuzamossági axióma jelölése:  $AX_{BLP}$

Az axiómarendszerek közötti viszony:  
 $AX_{EG} = AX_{AGB} + AX_{EP}$   
 $AX_{BLG} = AX_{AGB} + AX_{BLP}$

A párhuzamossági axiómák közötti viszony formálisan:  
 $AX_{EP} \sim AX_{BLP}$   
 $\sim AX_{EP} = AX_{BLP}$

$|AX_{EP}| = |AX_{BLP}| = 1$ , szemben azzal, hogy a klasszikus (kétértékű) logika szerint:  
 ha  $|p| = 1$ , akkor  $|\sim p| = 0$ , és fordítva.

135.

**Az axiómarendszerek holizmusa**

**A szemantikai holizmus az abszolút, a B-L-féle hiperbolikus és az euklideszi geometria axiómarendszereire**

Változás következik be egy axiómarendszer által implicit meghatározott kifejezések jelentésében, ha

- az axiómarendszert új, független (nem levezethető) axiómával bővítjük:  
 $AX_{AGB} \rightarrow AX_{EG} (= AX_{AGB} + AX_{EP})$  átmenet, vagy  
 $AX_{AGB} \rightarrow AX_{BLG} (= AX_{AGB} + AX_{BLP})$  átmenet.
- megváltozik az adott axiómahalmaz valamely elemének igazságértéke:  
 $AX_{EG} \leftrightarrow AX_{BLG}$  átmenet oda-vissza.

136.

**Az axiómarendszerek holizmusa**

**Jelentésváltozás áll elő egy adott axiómarendszer független axiómával történő kiegészítése következtében:**

Mivel az euklideszi, illetve a BL-féle hiperbolikus geometriát az abszolút geometria kiterjesztéseiként kapjuk, ezért az új (párhuzamossági) axiómák hozzáadása következtében az alapfogalmak formális azonossága ellenére jelentésük megváltozik;

az euklideszi, illetve a BL-féle hiperbolikus geometria alapfogalmainak jelentése az abszolút geometria alapfogalmainak jelentéséhez viszonyítva különböző.

**Jelentésváltozás az adott axiómahalmaz valamely elemének igazságérték-változása következtében:**

Mivel a párhuzamossági axiómák egymásnak formális tagadásai, ezért minden további egyezés ellenére az euklideszi és BL-féle hiperbolikus geometriában az alapfogalmak jelentése egymáshoz viszonyítva a kifejezések formális azonossága ellenére különböző.

137.

**A Frege-Hilbert vita**

**Frege:**

Ha az axiómák definiálják a kifejezések jelentését, akkor az axiómarendszer egy elemének eltávolítása, például a párhuzamossági axióma eltávolítása az euklideszi geometria axiómarendszeréből, elkerülhetetlenül megváltoztatja az általuk definiált kifejezések jelentését.

**Hilbert:** (Pontosan erről van szó.)

„ (...) felfogásom szerint lehetetlenség megkísérelni megadni a pont definícióját három sorban, mivel csak az axiómák teljes rendszere eredményez teljes definíciót.

Minden axióma hozzájárul a(z implicit) definícióhoz, és ezáltal minden új axióma változtat a fogalmon. A 'pont' az euklideszi, a nem-euklideszi, az arkhimédészi és a nem-arkhimédészi geometriák mindegyikében valamelyest különbözik.”

138.

**A Frege-Hilbert vita**

Frege álláspontjának rekonstrukciója	Hilbert álláspontjának rekonstrukciója
<ul style="list-style-type: none"> <li>Az alapfogalmak jelentése az axiómarendszeren kívülről származik, kívülről adott.</li> <li>A fogalmak jelentése meghatározott, rögzített és végérvényes (mire belépünk az ax. rsz.-be).</li> <li>A jelentés „képesé tesz” annak eldöntésére, hogy adott kifejezés mire vonatkozik.</li> <li>(Ha a jelentés, ahogy Hilbert mondja változik, akkor a BL-féle hiperb. és az eukl. geo. kifejezései pl. az „egyenes” különbözőek, ergo nem ugyanarra vonatkoznak, nem ugyanazt írják le.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Az alapfogalmak jelentése nem az axiómarendszeren kívülről származik, nem kívülről adott, hanem az axiómák határozzák meg impliciten a jelentést.</li> <li>Az (alap)fogalmak jelentése csak annyiban meghatározott, amennyiben az ax. rsz. meghatározni képes.</li> <li>Különböző ax. rsz.-ek különböző jelentést határoznak meg: a jelentés változik.</li> <li>(Hogy mennyire változik/ különböző, azt az ax. rsz. interpretáción keresztül vizsgálható: jelentést ténylegesen az interpretációban /modell/ nyerek el.)</li> </ul>

139.

**Hogyan alkossunk újabb geometriákat? Nem is egyet, hanem mindjárt kettőt!**

- Az abszolút geometria eszközeivel bizonyítható, hogy:
  - Ha adott egy  $e$  egyenes és egy hozzá nem illeszkedő  $P$  pont, akkor az általuk meghatározott síkban létezik legalább egy olyan  $f$  egyenes, amely átmegy  $P$ -n, és nem metszi  $e$ -t.
  - Bizonyítható tehát a nem metsző egyenesek létezése.
  - Miért nem kell tehát esetszétválasztást csinálnunk a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómájának állításakor, amely
  - az euklideszi geometria párhuzamossági axiómájának formális tagadása, és helyesen a következőképpen hangzana:
 

Nem igaz, hogy ha adott egy  $e$  egyenes és egy hozzá nem illeszkedő  $P$  pont, akkor az általuk meghatározott síkban létezik pontosan egy (egy és csak egy) olyan  $f$  egyenes, amely átmegy  $P$ -n, és nem metszi  $e$ -t.

140.

**Hogyan alkossunk újabb geometriákat? Nem is egyet, hanem mindjárt kettőt!**

➤ Az abszolút geometriában (a formális tagadás) tehát csak az hagyja nyitva, hogy pontosan egy nem metsző létezik, vagy egynél több nem metsző létezik.

➤ Következésképpen, az absz. geo.-ban hamis az az állítás (ellentmondásra vezet), hogy:

**(R) Nincsenek nem metsző egyenesek.**

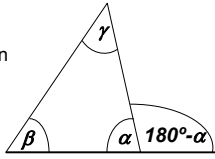
Ha adott egy  $e$  egyenes és egy hozzá nem illeszkedő  $P$  pont, akkor az általuk meghatározott síkban létezik nem létezik olyan  $f$  egyenes, amely átmegy  $P$ -n, és nem metszi  $e$ -t.

Nézzük meg vázlatosan, hogyan lehetne bebizonyítani, hogy  $R$  hamis!

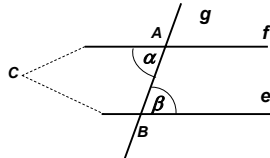
141.

**Hogyan alkossunk újabb geometriákat? Nem is egyet, hanem mindjárt kettőt!**

**Külsőszög-tétel (T1):**  
Az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög minden háromszögben nagyobb, mint a két szemközti belső szög.  
 $180^\circ - \alpha > \beta;$   
 $180^\circ - \alpha > \gamma.$



**T2:**  
Ha két, ugyanabban a síkban fekvő  $e$  és  $f$  egyenest úgy metsz el egy harmadik  $g$  egyenes, hogy azoknak az  $e$  és  $f$  egyenesekkel alkotott ellentétes irányítású (alternáló) belső szöge egyenlő, akkor az eredeti két  $f$  és  $g$  egyenes nem metszi egymást.

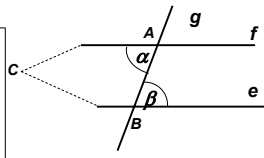


142.

**Hogyan alkossunk újabb geometriákat? Nem is egyet, hanem mindjárt kettőt!**

T. f. h., hogy  $f$  és  $e$  metszi egymást a  $C$  pontban úgy, hogy a  $g$  által létrehozott  $\alpha$  és  $\beta$  szögek egyenlők.

Ha  $f$  és  $e$  metszené egymást a  $C$  pontban úgy, hogy a  $g$  által létrehozott  $\alpha$  és  $\beta$  szögek egyenlők lennének, akkor az egyik külső szög ( $\beta$ ) egyenlő lenne egy másik belső szöggel ( $\alpha$ ):  $\Rightarrow$  ellentmondás. **Tehát:  $f$  és  $g$  nem metszi egymást.**



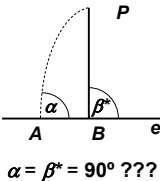
**T3:**  
Ha két  $e$  és  $f$  egyenes merőleges ugyanarra a  $g$  egyenesre, akkor a két egyenes nem metszi egymást.

143.

**Hogyan alkossunk újabb geometriákat? Nem is egyet, hanem mindjárt kettőt!**

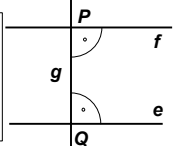
**T4:**  
Egy adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő pontból csak egyetlen merőleges egyenes húzható.

Ha a  $P$  pontból lehetne legalább két különböző merőlegest húzni az  $e$  egyeneshez, akkor a  $PAB$  háromszög  $\beta^*$  külső szöge egyenlő lenne a nem mellette fekvő  $\alpha$  belső szöggel  $\Leftrightarrow$  T1 külsőszög-tétel.



$\alpha = \beta^* = 90^\circ ???$

**T5 (konstruktív bizonyítás):**  
 $P$ -ből merőlegest bocsátva  $e$  egyenesre, majd  $P$ -ben az így kapott  $g$  egyenesre merőlegest állítva ( $f$ ),  $f$  és  $e$  egyenesek nem metszik egymást.



144.

**Mit adjunk fel? Mit adhatunk még fel konzisztensen?**

145.

Mit adjunk fel az axiómák közül, ha szeretnénk a következőt állítani és felvenni axiómáink közé?

**(R) Nincsenek nem metsző egyenesek.**

➤  $AX_{AGB} + R$  együtt inkonzisztens rendszert alkotnak.

➤ El tudunk-e távolítani csupán egyetlen axiómát úgy, hogy a megmaradók együtt konzisztens rendszert alkossanak, azaz összeférjenek az  $R$  állítással?

➤ Ki tudjuk-e jelölni, vissza tudjuk-e fejteni az az axiómát (vagy axiómákat), amely(ek)től  $R$  igazsága közvetlenül függ?