A Bolyai-Lobacsevszkij-féle nem-euklideszi geometria felfedezésének és hatásának története 8.

Tanács János

egy. adj.
BME Filozófia és Tudománytörténet Tsz.
MTA-BME Tudománytörténet és Tudományfilozófia Kutatócsoport

nego@filozofia.bme.hu

Az euklideszi bizonyítások görög terminusai

- **Az *axiómák:*** Arisztotelésznél a bizonyítás nélkül elfogadott elvek – *axiómata.*

  Az eredeti görög terminus Euklidésznél: '*koinai ennoiai',* feltehetően későbbi eredetű.

- Az axiómák:
  aritmetikai-algebrai jellegűek (?),
  a görögöknél még az aritmetikai-algebrai összefüggések is geometriai vizuális reprezentációt kaptak: számolókavicsok.

- **Arisztotelész:** az axiómák olyan állítások, amelyeknek igaz voltát „józaneszű ember nem vonhatja kétségbe".

- De: korábban éppenhogy kétségbevonták őket, pld. az *eleaták* – *"az egész nagyobb, mint a rész".*

Az euklideszi bizonyítások görög terminusai

A Zénon-paradoxonok:
az eleai *Zénón* három paradoxonja.
1. Akhilleusz és a teknősbéka,
2. A fának hajított kő

Zénón nyolc lábnyira áll egy fától, kezében egy követ tart. A követ a fa felé hajítja. Ahhoz, hogy a kő eltalálja a fát, először meg kell tennie a köztük lévő távolság, azaz a nyolc láb felét, ehhez pedig valamennyi időre van szüksége. Ezután még mindig hátra van négy láb, ennek megtételéhez pedig először ennek a felét, vagyis további két lábat kell repülnie, és ehhez ismét adott idő kell. Ezután további egy, majd fél, majd negyed lábat kell megtennie, és így tovább a végtelenségig. Zénón következtetése: a kő sohasem éri el a fát.

3. A mozgó nyílvessző mozdulatlansága

Egy repülő nyílvessző bármely időpillanatban a nyíl a levegő egy ismert pontján tartózkodik. Ha ez igaz ezért akkor nyugalomban kell, hogy legyen, tehát nem mozoghat. Következésképpen minden tovább pillanatban is nyugalomban van. Mivel ez az idő bármelyik pillanatára igazolható, a nyílvessző egyáltalán nem mozoghat: a mozgása csak illúzió.

Az euklideszi bizonyítások görög terminusai

- **A posztulátumok:** latin fordítása a megfelelő görög „aitéma" terminusnak.

  Az első három posztulátum a vonalzó és a körző használatát teszi lehetővé.

  Általánosabban: a posztulátumok a tárgyalásra kerülő geometriai idomok megszerkeszthetőségét biztosítják,
  és így a matematikai egzisztencia problémájához kapcsolódnak.

A terminus jelentése: „követelmény": nem kézenfekvő elfogadni, hanem meg kell követelni ahhoz, hogy a bizonyítás lehetségessé váljék.

Valójában a mozgás lehetőségét követelik meg: „válasz" az eleai filozófiára, amely tagadta a mozgás lehetőségét.

Az euklideszi bizonyítások görög terminusai

A definíciók:
a görög dialektikus vitakultúra előírása, hogy a vita résztvevőinek mindenekelőtt vita tárgyáról kellett egyezségre jutniuk.
Ehhez olyan állításokat kellett keresniük, amelyeket a vitában egymással szemben álló résztvevők egyaránt elfogadnak.
Ez a szerepük a definícióknak a geometria kifejtésében.

Általánosan: a bizonyításigény, és így a bizonyítás módszerei, például a *reductio ad absurdum*, valamint a terminusok is a görög demokratikus (jogi) érvelésekre vezethetők vissza (lásd Fehér Márta, Kutrovátz Gábor, Szabó Árpád írásait).

Abszolút tételek – azaz az euklideszi párhuzamossági axiómától független tételek

Abszolút módon bizonyítható:

✓ **Nem metsző egyenes létezése:**
Van legalább egy olyan egyenes, amely egy adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton keresztül húzható (az általuk meghatározott síkban) és nem metszi azt.

De: az **unicitást** (azt, hogy pontosan egy nem metsző van), nem lehet bizonyítani.

✓ **Nem metsző egyenesek szerkeszthetősége:**
Egy adott *e* egyenesre merőleges síkbeli *f* és *g* egyenesek nem metszők.

De: nem lehet például bizonyítani, hogy *f* és *g* egyenesek távolsága mindvégig állandó marad.

Az *Elemek* I. könyvének szerkezete, felépítése a párhuzamosság szempontjából

- A párhuzamosság 23. definíciója: a párhuzamosság „esszenciális" tulajdonsága (?): csak nem metszést (nem találkozást) állít.
- A párhuzamosok egzisztenciája – az *Elemek* I. 27. Tétel:

  nem használja fel az *ÖP*-t.

  „Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos egymással."
- Az *Elemek* I. 28. Tétel:

  „Ha (…) az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon a két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos."

180.

Az *Elemek* I. könyvének szerkezete, felépítése a párhuzamosság szempontjából 2.

- **Az *Elemek* I. 29. Tétel**

  az első olyan tétel, amely felhasználja az *ÖP*-t,

  a I. 27. és I. 28. Tételek megfordítása.

  „Ha párhuzamosakat metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon (együtt) két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek."
- **Az Elemek I. 30. Tétele – a párhuzamosság tranzitivitása:**

  felhasználja az I. 29. Tételt, és így közvetve az *ÖP*-t.

  „Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak."

181.

Az *Elemek* I. könyvének szerkezete, felépítése a párhuzamosság szempontjából 3.

- **Az *Elemek* I. 31. Tétel – a párhuzamosok megszerkeszthetősége:**

  konstruktív: ténylegesen is megmutatja a létezést;

  nem használja fel sem az I. 29., sem az I. 30. Tételeket, és így *ÖP*-t sem, még közvetve sem.

182.

Az *Elemek* I. könyvének szerkezete, felépítése a párhuzamosság szempontjából 4.

Összefoglalva: 183.

Az *Elemek Első könyv*ében az első huszonnyolc tétel az ún. abszolút geometria körébe tartozó tétel,

- az első tétel, ahol a párhuzamossági posztulátumot felhasználja, az I. 29.Tétel,
- de ezt megelőzően már bebizonyítja a nem metszők (párhuzamosok) független, abszolút tulajdonságát (létezés) a 28. tételben,
- az I. 31. Tételben az *ÖP*-től és az I. 29.Tételtől független „konstruktív bizonyítás".
- Azután sem használja minden esetben az ÖP-t vagy következményét, ahol logikailag joggal tehetné.
- Ahol csak lehetséges, az *ÖP* mellőzése, akár bonyolultabb bizonyítás árán is.
- **Az *ÖP*-től függő és független tételek gondos elkülönítése.**

Az *Elemek* I. könyve a párhuzamosság fogalma szempontjából

Fogalmilag tekintve: 184.

- **Az I. 27., I. 28. és I. 31. tételekben:**

  a párhuzamosságnak csupán az esszenciális tulajdonságát, a nem metszést használja ki és/vagy bizonyítja be.
- **Csak az I. 29. és I. 30. tételek azok, amelyekben**

  a „párhuzamos egyenesek" „ekvidisztáns egyenesek" értelemben szerepelnek, és

  ezt a többlet tulajdonságot bizonyítja be róluk, de az *ÖP*, vagy az *ÖP*-től függő I. 29. Tétel segítségével.
- **A „párhuzamos" két értelme,**

  a „nem metsző" és az „ekvidisztáns" nem keveredik össze, hanem figyelembe veszi, szem előtt tartja a különbséget:

  ⇒ **elkerüli az összekeveredésből fakadó körbenforgási hibát, azaz a fogalmi hibát!**

Az *Elemek* I. könyve mint a „párhuzamosok problémájának" megoldása?

A Nem-standard nézet 185.

- Képviselők:Tóth Imre, Hans Freudenthal, Charles Mugler
- Az *ÖP* nem „axióma", és nem „tétel", hanem „követelmény":

  amely nem bizonyítható, és

  amely nélkül az *Elemek* (az „euklideszi geometria") nem fejthető ki,

  de amelynek formális tagadását felvetették,

  esetszétválasztás szerint diszkutálták,

  a „tompaszög-hipotézisnek" megfelelő esetet megcáfolták,

  a „hegyesszög-hipotézisnek" megfelelő esetet azonban nem tudták megcáfolni, és ezért került az *Elemek* azon helyére, ahová került.

Felsejlett az euklideszi geometriával ellentétes, ún. „anti-euklideszi" (kontra-euklideszi) geometria lehetősége, egy „nem-geometriai geometria" alternatívája.

Az *Elemek* I. könyve mint a „párhuzamosok problémájának" megoldása?

186.

A Nézet plauzibilitása mellett szóló érvek

1. **Az *Elemek* eddig megfigyelt szerkezete, gondos felépítése a párhuzamossági posztulátumot illetően.**

2. Arisztotelészhez köthető szöveghelyek:

- A háromszög 180°-os szögösszegére univerzális tulajdonságként, de nem szükségszerűségként hivatkozik: több mint 50 hivatk.
- Szükségszerűség tulajdonságára példa: a négyzetátló inkommenzurábilitása az oldalával (irrac. számok): több mint 40 hivatk.)
- Euklideszivel formálisan ellentétes, anti-euklideszi állítás: 11 idézet.
- Kör négyszögesítése: 3 id., összes többi példa 1-2 id.
- Az anti-euklideszi állítások nem lehetetlenségként, és nem olyan állításokként szerepelnek, amelyeknek logikai ellentmondásra kellene vezetniük.

Az *Elemek* I. könyve mint a „párhuzamosok problémájának" megoldása?

187.

További érvek:

- A háromszög létezése szempontjából a szögek összegét jelöli meg a lényeget meghatározó okként, a háromszögű idom szubsztanciájaként,

  ám ez az összeg lehet egyenlő két derékszöggel,

  vagy lehet nem egyenlő vele!!! (Hiperbolikus, vagy másként nem-euklideszi azaz BL-geometria tétele!)

  „A tudományos kutatás feladata, hogy megállapítsa, a két szemben álló tétel közül melyik alkotja a háromszög logoszát, az-e, amelyik azt állítja, hogy szögeinek összege egyenlő, vagy pedig az, amelyik azt állítja, hogy szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel."

A helyettesítési kísérletek

188.

Más elnevezéssel: egyszerűsítési (szimplifikációs) kísérletek

Az *ÖP*-nél egyszerűbb, a szemlélet számára könnyebben felfogható, evidensebb axiómát kell találni, és azzal kell helyettesíteni.

Például olyannal, amely nem hivatkozik (nem támaszkodik) a végtelenre, a végtelen meghosszabbítás során létrejövő jelenségekre.

Néhány példa:

„Az egyenestől egyenlő távolságra elhelyezkedő pontok helye két egyenes." (Clavius, 1574)

„Nincs maximális területű háromszög." (Gauss, 1799.)

„Nincs olyan háromszög, amelyben mindhárom szög kisebb tetszőlegesen megadott kis szögnél." (Bolyai Farkas, 1820.)

„Bármely három pont közös egyenesen vagy közös körön van." (Bolyai Farkas, 1851.)

„Van legalább két hasonló, de nem egybevágó háromszög." (Wallis, 1663.) (Azaz vannak hasonló, de nem egybevágó háromszögek.)

Az axiómák önevidens állítások?

- Az axióma (vagy az axiómák) igazságaikkal együtt önmagukban evidens, önmagukban további igazolás nélkül belátható állítások (igazságok)?
- Azaz: az igazságaikban való hitek olyan „alapvető hitek" (az ún. Igazoláselméleti fundácionalizmus „alapvető hitei") lennének, amelyek nem kívánnak további igazolást?

o **A helyettesítő axióma: csak akkor megoldás, ha <u>mindenki</u> egyöntetűen elfogadja egyszerűbb, evidensebb axiómaként.**

Önevidencia:
önmagában, önnönmagam számára evidens?
Uram, az Ön számára is evidens?

189.

A helyettesítő axiómák önevidenciájának, egyszerűségének problémája

- Nem mindegy tehát, hogy hányan vagyunk mindenki: egy vagy több megismerő?
- Ha nem mindenki számára ugyanaz „evidens ön", akkor fennáll a végtelen regresszus közösségi visszatérésének veszélye: az „önevidencia" csak akkor megoldás, ha „közevidencia".
- Hasonlóan helyettesítő axiómákra: az, ami egyetlen szinguláris matematikus mint „megismerőközösség" számára megoldás, nem lesz feltétlenül megoldás egy többszereplős megismerő közösségben.
- Lehet, hogy a megismerő-közösségbeli tevékenységet nem lehet szinguláris megismerők tevékenységére redukálni, mert valami menthetetlenül elvész?
- Lehet, hogy a megismerés lényegileg közösségi tevékenység?
- Bolyai Farkas saját maga 44, azaz *negyvennégy* helyettesítő axiómát fedezett fel és terjesztett elő!

190.

A direkt bizonyítási kísérletek

191.

Célja:

az ötödik posztulátum <u>közvetlen bebizonyítása, levezetése</u> az ún. ***maradék axiómarendszer*ből**,

azaz az *ÖP* nélkül megmaradó axiómarendszerből,

➢ Ha a kísérlet sikeres, akkor megmutatásra került, hogy az *ÖP* nem axióma, nem posztulátum, hanem levezethető tétel.

Problémák:

A bizonyítás addig érvényes, amíg mindenki hibátlanként elfogadja. Ha valaki hibát talál, kezdődhet elölről a bizonyítás keresése.

Abszolút tételek –
azaz az euklideszi párhuzamossági axiómától <u>független</u> tételek 192.

Az abszolút tételek az euklideszi párhuzamossági axióma felhasználása nélkül bebizonyítható tételek:

- ✓ Adott egyeneshez egy külső pontból csak egyetlen merőleges húzható.
- ✓ Az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög minden háromszögben nagyobb mind a két szemközti belső szögnél.
- ✓ A háromszög bármelyik két belső szögének összege kisebb 2R-nél.

Történetileg az abszolút geometria formális megfelelője az ún. **maradék axiómarendszer:**

- Ha Euklidész *Elemek* c. művének Heiberg-féle kiadásának, vagy az erről készült Mayer Gyula-féle magyar *Elemek Első könyv*ére vonatkoztatjuk, akkor
- az euklideszi párhuzamossági posztulátum (vagy axióma) elhagyásával kapott, így megmaradó axiómák (9 db), posztulátumok (1- 4.) és definíciók (23 db) rendszere.

A direkt bizonyítási kísérletek tipikus történeti sémája 193.

1. A geométer előállít egy közvetlen bizonyítást, és boldogan hal meg abban a tudatban, hogy megmutatta: az *ÖP* levezethető a maradék axiómarendszerből.
2. Jön egy másik matematikus, aki megmutatja, hogy a bizonyítás során hallgatólagosan feltételezett egy olyan axiómát, ami maga is bizonyításra szorul, azaz ekvivalens az *ÖP*-vel.
3. Majd előállít egy közvetlen bizonyítást…

A hiba: a körben forgó okoskodás, azaz a *petitio principii* hibája.

- A bizonyítás során hallgatólagosan felhasznált állítás „feltételezi" a bizonyítandót (vagy egy vele ekvivalens állítást).
- Ennélfogva a bizonyítás nem bizonyítja a bizonyítandót (v. ö. a helyettesítő axiómákkal: ezek közül bármelyik hallgatólagos feltételezése, használata ekvivalens az *ÖP*-vel!!!)

A direkt bizonyítási kísérletek 194.

- Probléma: egy bizonyítás addig bizonyítás, azaz addig „érvényes", elfogadott, amíg a közösség ilyenként fogadja el.
- Nem mindegy tehát, hogy hányan vagyunk a közösség: egy vagy több megismerő?
- Egyszemélyes, egyetlen matematikai megismerőt feltételező közösségben („univerzumban") ezek a megoldási kísérletek mind helyes bizonyításként, végérvényes, bizonyított, objektív matematikai igazságként konzerválódtak volna, holott „objektíve" hamisak.
- Lehet, hogy a megismerő-közösségbeli tevékenységet nem lehet szinguláris megismerők tevékenységére redukálni, mert valami menthetetlenül elvész? Például, hogy a fallibilitást csak a közösség tudja produkálni, az egyén nem?
- Lehet, hogy a megismerés lényegileg közösségi tevékenyég?

A direkt bizonyítási kísérletek

Ráadásul teljesíteni látszanak azt a hármas követelmény két elemét, azaz hogy:

1) *S* hiszi, hogy *ÖP*, és

2) *S* hite *ÖP*-ben igazolt.

De hogyan fér hozzá a harmadik feltételhez, nevezetesen, hogy

3) *ÖP* igaz?

Azaz: hogyan tudja első személyű perspektívájából megkülönböztetni, hogy *ÖP* igaz-e?

- ➢ Ezen fog ugyanis múlni, hogy rendelkezik-e tudással vagy sem?
- ➢ A probléma az, hogy *ÖP* igazságához csak az igazoláson keresztül fér hozzá, az igazolást azonban helyesnek látja és elfogadja.
- ➢ Az igazságok jelentős részéhez végül is csak igazolási eljáráson, módszeren keresztül férünk hozzá, ahhoz van kötve. 195.

És egy még komolyabb probléma 196.

Vajon az Appel-Haken-Koch-féle számítógépes bizonyítása a térképszínezési négyszín-problémának vajon a mi emberi tudásunk részének tekinthető-e?

1) Hisszük, hogy a tétel igaz (abban a formában, ahogyan meg van fogalmazva), de vajon
2) a számítógép hardverén lefutó szoftver a mi igazolási eljárásunknak tekinthető-e, hiszen nem bennünk fut le?

   A szoftverrel azonosítsuk az igazolást, vagy a hardverrel, vagy a kettő együttesével?
3) És végül: vajon tényleg, objektíve igaz? Nem lehet, hogy csak valami hiba következtében jön ki igaznak a tétel?
4) És ha a szoftver- vagy hardverhiba következtében jön ki ez az eredmény, de egyébként, egy másik, helyes eljárás során is igaznak jönne ki, akkor vajon most aktuálisan tudjuk, vagy nem tudjuk a tételt?
5) Hogyan tudhatjuk megkülönböztetni, hogy tényleg igaz, vagy hogy hamis, vagy igaz, de hibás eljárás következtében?

Vannak-e (voltak-e) empirikus kísérletek a matematikában?
Van-e (volt-e) induktíve megalapozott tapasztalati általánosítás? 197.

A matematikai indukció valójában dedukció!

Indukció: egyediről az általánosra következtetés:

véges számú empirikus adatból, megfigyelésből, szinguláris állításból

⇒ univerzális igazságra, általános állításra.

- Szerepet játszhat –e, szerepet játszhatott-e a matematika, egészen speciálisan a nem-euklideszi geometria felfedezésének történetében olyan módszer,
- amelyet tipikusan a kemény tapasztalati, természettudományos tevékenységet jellemzőnek, és nem a matematikai igazságokat, elméleteket megalapozónak (vagy erősen valószínűsítőnek) szokás tartani?

Induktív általánosítás, induktív következtetés

198.

Formai oldal	Tartalmi oldal
(P1) Ez (a t_1-kor megfigyelt élőlény) hattyú$_1$, és fehér.	(igaz)
(P2) Ez (a t_2-kor megfigyelt élőlény) hattyú$_2$, és fehér.	(igaz)
(P3) Ez (a t_3-kor megfigyelt élőlény) hattyú$_3$, és fehér.	(igaz)
(Pn) Ez (a t_n-kor megfigyelt élőlény) hattyú$_n$, és fehér.	(igaz)
(K) Minden hattyú fehér.	(nagyon valószínű)

Ha az ilyen eljárást is következtetésnek tekintjük, akkor nem lehet logikailag helyes (érvényes), hiszen a premisszák igazsága sem alapozza meg kétséget kizáró módon a konklúzió igazságát.

Ha elfogadjuk következtetésnek, akkor a 'következtetés' fogalma tágabb, mint a 'logikailag helyes következtetés' fogalma.

$\Rightarrow$ induktív következtetés (induktív általánosítás)

A Párhuzamossági Posztulátum (*PP*) levezethetetlensége

199.

(P1) A *PP-nek* ez a K_1 direkt bizonyítási kísérlete sikertelen, a biz. hibás.
(P2) A *PP-nek* ez a K_2 direkt bizonyítási kísérlete sikertelen, a biz. hibás.
(P3) A *PP-nek* ez a K_3 direkt bizonyítási kísérlete sikertelen, a biz. hibás.

(Pn) A *PP-nek* ez a K_n direkt bizonyítási kísérlete sikertelen, a biz. hibás.

(K) A Párhuzamossági Posztulátum direkt módon nem bizonyítható, a maradék axiómarendszerből levezethetetlen.

Georg Simon Klügel 1763-as göttingeni disszertációja:

- a *Párhuzamosok Problémájának* több mint harminc megoldási kísérletét tette vizsgálat tárgyává, kimutatva egyúttal hibáikat is,
- probléma története folyamán először ő fejezte ki azt a kétséget, hogy az euklideszi ötödik posztulátum egyáltalán bizonyítható volna,
- továbbá azt állította, hogy az euklidészi hipotézis igazságába vetett hitünk, az erre vonatkozó bizonyságunk sokkal inkább az empirikus megfigyelések eredménye, mintsem a szigorú deduktív levezetésé.

Falszifikációs játékok?

200.

- Szász Károly 1818-tól (Bolyai Jánosnak az Akadémiára történt felvételétől) 1820 végéig vagy 1821 elejéig volt Bolyai társa.
- Bolyai János *A Tér Tudománya* című műve egyik tervezetének – amely az *ÖP* direkt bizonyítási kísérletét és utólag felismert hibáját is tartalmazza – 1851-ből származó bevezetőjében a Szász Károllyal folytatott közös munkáról a következőket írja:

„...a két barát »ösztönszerűleg sejtette a végtelen sugarú kör természetének és a XI. axióma igazsága kérdésének szoros összefüggését, és nem kételkedtek benne, hogy a XI. axióma szigorúan igazolható, mihelyt e végtelen sugarú körnek egyenes voltát sikerül kimutatni«, valamint, hogy »nagy ügyességre tettek szert a szóban forgó esetben elégtelen tételek használhatatlan voltának felismerésében.«"

Kollektív Falszifikációs Játékok?

201.

A szöveg egy lehetséges, és erősen valószínű értelmezése:

- Bolyai János és Szász Károly nagy jártasságra tettek szert a helyettesítő axiómák,
- illetve a hallgatólagosan vagy explicite felhasznált, és az *ÖP*-vel ekvivalens segédtételek kimutatásában
- az *ÖP* minden olyan direkt bizonyítási kísérletében,
- amelyet a másik előállított, és mint a probléma egy potenciális megoldási javaslatát adott elő.
- Ez a bizonyítási kísérletek egyfajta kollektív falszifikációs játékok keretében történő érvénytelenítése, cáfolása.

A KFJ lecsapódása: a Bolyai-Bolyai vita

202.

„Azt is tette hozzá [mármint Bolyai Farkas – T.J.], hogy a parallelákat úgy, a mint az kívánatos volna, nem fogom soha sem feltalálni. Akkor is, mikor mindenféle szép és a XI. axióma lényegének kipuhatolására nézve fontos és nélkülözhetetlen dolgot, mint pl. az *Appendix* 23.§-át, bebizonyítás nélkül vele közöltem, még inkább folytatta ezen a hangon, mert semmiképen sem értett meg engem, sőt szavaimban kételkedni kezdett. **Én azonban kijelentettem neki, hogy azon az úton, melyet követni kezdtem, a nélkül, hogy valamelyik bebizonyítását velem közölné, képes vagyok bármelyik axiómájából a XI. axiómát levezetni.** Ámde ő, a nélkül, hogy ennek értékét felismerte és a csomó kioldódását remélte volna, inkább azt válaszolta, hogy eddig még az ő saját bebizonyításait tekinti a legjelesebbeknek, és tovább is közléseimet kicsinyléssel fogadta és csak felületesen nézte át."

Utólagos okosság

25.

Utólag tudjuk, hogy a bizonyítási-levezetési kísérletek hiábavalóak voltak, mert az *ÖP* a maradék axiómarendszerből levezethetetlen.

Honnan tudjuk?

- Hát az ún. „relatív ellentmondásmentességi" bizonyításokból, amelyek lényege, hogy az egyik geometriát a másikban modellezik.
- Ezek segítségével megmutatható, hogy ha az egyik ellentmondást tartalmaz, akkor a másik is.

Ezek után két eset lehetséges:

1. Az egyik ellentmondásos, ergo a másik is.
2. Egyik sem ellentmondásos. (Reméljük, ez a helyzet).

Utólagos okosság

26.

Ez azonban feltételez olyan

fogalmakat, ismereteket és módszereket, mint „relatív ellentmondásmentesség”, „(axiómák) függetlensége”, modellmódszer,

és feltételezi a B-L-féle nem-euklideszi geometriát, amelyet és amelyben modellezni kívánunk.

Ezekhez pedig el kell, és történetileg is el kellett jutni.

Ugyanakkor úgy tűnik, hogy

az indirekt bizonyítások fontosabb szerepet játszottak, sőt:

csak ezek játszottak szerepet/voltak termékenyek a nem-euklideszi geometria felfedezésének szempontjából,

szemben a fogalmi-újradefiniálási, a helyettesítési és a direkt bizonyítási kísérletekkel.

A „párhuzamosok problémájának” indirekt bizonyításai

27.

A közvetett vagy indirekt bizonyítási kísérletek:

az *ÖP* **tagadásának cáfolása**, azaz

annak megmutatása, hogy az *ÖP* tagadása belső ellentmondáshoz vezet (*reductio ad absurdum*)

következésképp *ÖP* (indirekt bizonyítás).

Az indirekt bizonyítások tipikus történeti sémája (a változatosság kedvéért):

1. A geométer előállít egy indirekt bizonyítást, és boldogan hal meg abban a tudatban, hogy megmutatta: az *ÖP* tagadása cáfolható a maradék axiómarendszer segítségével (pld. Saccheri 1733: az egyenes természetének ellentmond, hogy vég nélkül közeledjék egy másik egyeneshez…)
2. Jön egy másik matematikus, aki úgy látja, hogy a cáfolat nem kényszerítő erejű.
3. Majd előállít egy másik indirekt bizonyítást…

Hol itt a különbség?

28.

Egy axiómarendszer *deduktíve zárt*:

ha minden, az axiómarendszer fogalomkészletével megfogalmazható állítás levezethető az axiómákból.

- Deduktíve zárt axiómarendszer esetében a tétel direkt vagy indirekt bizonyításait,
- bár konkrétan különböző levezetési lépésekből állnak,
- az igazságértéket tekintve egyenrangúaknak és ekvivalenseknek, módszertanilag pedig konvergenseknek tekinthetjük.

Deduktíve nem zárt (nyitott) axiómarendszer esetében a direkt és az indirekt bizonyítások módszertanilag divergensek: eltérő eredményeket szolgáltatnak.

Hol itt a különbség?

29.

Az indirekt bizonyítások a történet előrehaladtával egyre hosszabbak, egyre több lépésből állnak, mire valaki ellentmondást vél felfedezni.

Kibontakoznak a hiperbolikus geometria tételei és geometriai objektumai

$\Rightarrow$ konstruktív módszer (anélkül persze, hogy ennek eredendően is a tudatában lennének)

1733: Gerolamo Saccheri (1667-1733): a leghosszabb indirekt út, „majdnem” nem-euklideszi geometria.

A módszertani tanulság

30.

- Mindaddig, amíg nem tudjuk, hogy az *ÖP* független a maradék axiómarend-szertől, nem tudjuk, hogy deduktíve nyílt vagy zárt rendszerben dolgozunk-e.
- Mindaddig, amíg nem tudjuk, hogy deduktíve nyílt vagy zárt rendszerben dolgozunk-e, nincs előzetes alapunk módszertani különbséget tenni közöttük a módszertani konvergencia vagy divergencia szempontjából, sem előny, sem hátrány tekintetében.
- Ahhoz, hogy különbséget tudjunk tenni közöttük, és azt mondhassuk, hogy

  a direkt bizonyítás keresése hiábavaló,

  és, bár az indirekt bizonyítás keresése szintén hiábavaló, de legalább termékeny, mert segítségével előállnak a hiperbolikus geometria tételei és geometriai objektumai,

  már előzetesen tudnunk kellene, hogy az *ÖP* független a maradék axiómarendszertől, azaz a rendszer nyitott.

A módszertani tanulság

31.

- Az *ÖP*, azaz az euklideszi párhuzamossági axióma függetlensége mellett azonban azok a relatív ellentmondás-mentességi bizonyítások szólnak, amelyek a két kidolgozott geometria ismeretét feltételezik,
- és amelyekhez (világos szétválasztásukat is beleértve) éppen az indirekt módszerrel lehet(ett) eljutni,
- ám hogy ezt ilyen világosan megfogalmazhassuk és láthassuk, el kellett ide jutni, ahol most vagyunk.

Egyfelől a módszertan jelentőségét látjuk, anélkül azonban, hogy e jelentőség előzetes ismeretét elvárhatnánk!

A végső tanulság: ismerj minél több módszert és dolgozz több, esetleg redundánsnak tűnő módszerrel (hátha mégsem redundánsak!).

A „párhuzamosok problémája”- fogalomtörténeti vetület

Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak. **(Euklidész, *Elemek*, I. könyv, 23. Definíció)**

„Esszenciális” definíciója: párhuzamosság mint nem metszés.

„Teljes” definíció:

párhuzamosság mint ekvidisztancia (implicite magában foglalja nem metszést),

vagy ekvidisztancia&nem metszés.

„Konstruktív” definíció: párhuzamosok (nem metszők) szerkeszthetőség: *Elemek* I. könyv 31. Tétele.

A „párhuzamosok problémája”?

172.

Euklidész *Elemek* c. műve *Első könyv*ének 5. (párhuzamossági) posztulátuma által felvetett probléma és az általa inspirált megoldási kísérletek.

„És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.”

Lehetséges magyarázatok

- Mivel az egyenesek egyenközűségéből **következik** a nem metszés,
- de az egyenesek nem metszéséből **nem következik** egyenközűségük, ezért

  aki „párhuzamos”-on „egyenközű”-t ért, az hallgatólagosan belefoglalja a bizonyítandó tulajdonságot, és

  fogalmi hibát követ el.

•szükségszerűen adja a „párhuzamosok problémájának” látszólagos, objektíve helytelen megoldását,

• következésképpen belül marad az euklideszi geometrián,

• tehát nem fedezheti fel a nem-euklideszi geometriát.

A történeti magyarázat

A nem-euklideszi geometria felfedezéséhez vezető „párhuzamosok problémájának”,

azok a megoldási kísérletei, amelyek a „párhuzamos” „ekvidisztáns” értelemére támaszkodtak közvetlen vagy közvetett módon, egytől

Mi lehet a *horror aequidistantiae* magyarázata ?

Azok a többnyire direkt bizonyítási kísérletek, amelyekben a „párhuzamos” „ekvidisztáns” értelemben jutott szerephez, *petitio principi*ben voltak vétkesek.

A hallgatólagosan elkövetett és észrevétlenül maradt körbenforgás következménye, hogy az euklideszi párhuzamossági axiómát bizonyítottnak hitték.

A nem-euklideszi geometriát azonban nem lehet úgy felfedezni, hogy valaki közben az euklideszi geometriát bizonyítottnak hiszi.

Az ekvidisztáns-elméleti indíttatású kísérletek, amennyiben szükségszerűen látszanak körbenforgáshoz vezetni, egyben a nem-euklideszi geometria felfedezésének csírájában elvetélt kísérletei.

A „párhuzamosok problémájának” megoldási kísérletei

174.

A megoldási kísérletek tipológiája

fogalmi: a párhuzamosság fogalmának értelmezésével, definiálásával,újradefiniálásával összefüggő kísérletek,

lényegében a direkt bizonyításokhoz hasonló kísérletek

módszertani:

az *Ötödik Posztulátum* bizonyításával összefüggő kísérletek:

1.) helyettesítési kísérletek

2.) direkt bizonyítási kísérletek

3.) indirekt bizonyítási kísérletek

Mi a „párhuzamosok problémája”?

173.

1. A Standard Matematikatörténeti Nézet

A „párhuzamosok problémája” Euklidész művéből származtatható: a kommentárok által felvetett kérdés, amely a párhuzamossági posztulátum státuszát (tétel?) feszegeti, és amely negatív megoldás nyert a B-L-geometria révén: axióma!

2. A Nem-standard nézet: Tóth Imre

Az euklideszi 5. párhuzamossági posztulátum megoldás – a „párhuzamosok problémájának” megoldása a görögöknél.

A párhuzamossági posztulátum *Elemek*beli elhelyezését figyelembe véve, a felépítésben betöltött szerepe szerint, valamint a *corpus Aristotelicum* szövegtöredékeinek figyelembe vételével: a „párhuzamosok problémájának” megoldása! A probléma nem innen származik, hanem ez maga a megoldás!

Az *ÖP* nem „axióma”, nem „tétel”, hanem „követelmény”, amely nem bizonyítható, de amely nélkül az euklideszi geometria nem fejthető ki.