Kedves János!

Elnézést a késlekedésért. Nincs mentségem. Vannak könnyebb kérdések és vannak nehezebbek.

1. A kért hivatkozások: Laurie Kirby és Jeff Paris, 'Accessible Independence Results for Peano Arithmetic', *Bull. of London Math. Soc.*, 14 (1982), 285-293. R. L. Goodstein, 'On the restricted Ordinal Theorem', *J. of Symbolic Logic*, 9 (1944), 33-41. Paris azóta írt egy könyvet, én nem ismerem, de biztos, hogy magyon jó: *The Uncertain Reasoner's Companion*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 39.

2. A „kis játékos paradoxonod" a Richard-paradoxon.

3. A Berry- és hazug-paradoxon szerepéről Gödel azt mondja: „Bármely episztemológiai antinómia felhasználható eldönthetetlen állítások létezésének bizonyítására." Mindkét paradoxon ilyen jellegű „feloldása" azon alapul, hogy az aritmetika mondatainak (pl. a PA rendszerben) bizonyíthatókra és cáfolhatókra való felosztásában vannak, az igaz és a hamis megkülönböztetésben viszont nincsenek „rések".

4. Hilbert híres szabálya egy félig-formális rendszer végtelen sok premisszás következtetési szabálya. Hogy mit jelenthet az, hogy az $F(x)$ formula minden „instanciája" ($F(0)$, $F(1)$, dots, $F(n)$, dots) *finit* módszerekkel bizonyítható, arról valószínűleg soha senkinek nem volt precíz elképzelése. (Gondolhatunk valami komplikált, nem az indukción alapuló bizonyítás-sémára – az általános verdict azonban az, hogy efféle következtetési szabály „emberi fogyasztásra alkalmatlan").

5. „Ha megtiltanánk az önreflexiós definíciókat, akkor nagyon kevés maradna meg a matematikából." Nem mondtam. Úgy gondolom, meg kellene különböztetni az erős és a gyenge „önreflexiós trükköt". (1) A Gödel-számozás alapján alkalmazhatunk egy predikátumot önmagára (önmaga kódjára), ez (és rokonai) lenne az erős értelmezés. (2) Úgy tűnik azonban, mintha inkább valami másról, a predikativitás (vagy impredikativitás) fogalmáról lenne szó. Impredikatívnak mondunk például egy definíciót, amennyiben benne olyan kvantifikáció szerepel, amelynek tárgyalási univerzumában a definiálandó objektumok is benne vannak, azaz olyan kötött változók szerepelnek, amelyek lehetséges értékei

között a definiendum is előfordulhat. Vagy: akkor predikatív egy halmaz definíciója, ha az őt definiáló formula jelentése nem függ attól a feltevéstől, hogy a szóban forgó halmaz létezik-e vagy sem. (Nincsen bevett, mindenki által elfogadott, precíz értelmezés.) A természetes számok Frege-féle definíciója például impredikatív; ha a természetes számokat a Peano-axiómákkal vélnénk „definiálhatónak", akkor az indukciós axióma (minden olyan *természetes számokból álló* halmazra, amelynek a 0 eleme, és amelynek valamennyi elemével együtt a rákövetkezője is eleme, stb) miatt megint csak ez a helyzet. Persze ha a számokat eleve egy *létező* (bármit jelentsen is ez), absztrakt univerzum elemeinek gondoljuk, akkor ez nem probléma: a Peano-axiómák ekkor csupán *leírják*, nem pedig *definiálják* a szóban forgó struktúrát. Másrészt, a természetes számok impredikativitása is kiküszöbölhető a véges halmazok bizonyos axiómarendszereiből kiindulva. (Ez viszonylag újabb keletű eredmény.) Az „erős önreflexiós trükk" alkalmazásai főként a logika területére korlátozódnak, az impredikatív definíciók azonban a matematika más területein is megjelennek (például a felső határ axiómájában, az analízis egyik alapfeltevésében). Weyl szerint az (impredikatív, klasszikus) analízis „homokra épített ház a logikus paradicsomában". De áll.

6. A Paris-Kirby tételben a szóban forgó állítást *kódoló* állítás szerepelhet csak, de nem azért, mert valamiféle önreferenciális trükk lenne. Az elsőrendű Peano-aritmetika nyelvében még a hatványozás sem szerepel, a hatványozás explicit definíciója már eleve a szintaxis aritmetizálásán alapul. A tétel ezen felül bizonyos szám-sorozatokra mond ki valamit, s ezek megint csak egy Gödel-számozás alapján kerülhetnek be a tárgynyelvbe. A példa nevezetessége, hogy az első valódi, *könnyen megragadható, aritmetikai tartalmú* eldönthetetlen állítást mutatja be; korábban az ismert konkrét (tehát nem az eredeti gödeli módszerrel megkapott) eldönthetetlen állítások mind kombinatorikai jellegű problémák (aritmetizált „fordításai") voltak. De ez semmiképpen nem jelenti, hogy az eredeti Gödel-mondat nem aritmetikai állítás – az, méghozzá olyan, amely többváltozós diofantikus egyenletek bizonyos paraméterek értékeitől függő megoldhatóságát mondja ki: „A szóban forgó diofantikus problémák a következőképpen jellemezhetők: Legyen $P(x_1, dots, x_n, y_1, dots, y_m)$ $n+m$ változós, egész együtthatós polinom; tekintsük az x_i változókat ismeretleneknek, az y_i-ket pedig paramé-

tereknek; a kérdés ezek után így szól: van-e a $P = 0$ egyenletnek a paraméterek tetszőleges egész értéke esetén megoldása az egész számok körében, vagy vannak-e a paramétereknek olyan értékei, amelyek mellett az egyenlet nem oldható meg? A halmazelméleti axiómák mindegyikéhez megadható egy fenti típusú polinom, amelyre vonatkozóan a megoldhatóság kérdése éppen az illető axióma alapján válik eldönthetővé. Mindig elérhető továbbá, hogy az illető polinom fokszáma ne legyen 4-nél nagyobb." (Gödel)

Budapest, 2001. 03. 28.

Üdvözlettel:
Csaba Ferenc