Kedves Ferenc!

Mindenekelõtt gratulálok az elõadásodhoz, mert − noha a beígért filozófiai vonatkozásokra kevés idõ maradt, a technikai részletek elvitték az idõt − a felvetett kérdések engem azóta is foglalkozatnak. Engedd meg, hogy pontosítsam és kiegészítsem az elõadások tett két hozzászólásomat.

1.
A minden n−re vonatkozó tételek "egyszerre" vagy "egymásután" történõ bizonyításával kapcsolatos észrevételem csupán technikai, de azért pontosítom. Azt nem tudom, mit mondott és gondolt errõl Hilbert, és vele már nem is lehet ezt megbeszélni, ezért mindezeket Neked mondom.
Nevezetesen: ha egy állítás minden n természetes számra igaz, azt vagy teljes indukcióval szokás bizonyítani, vagy pedig annak bebizonyításával, hogy állításunk igaz volta független n−tõl − amibõl azt a következetést vonjuk le, hogy akkor tehát "minden" n−re igaz. Talán van egyéb mód is, mindenesetre akárhogyan is bizonyítunk egy "minden n" re igaz állatást, azt úgy kezdjük, hogy BIZ, és úgy fejezzük be, hogy QED, és a két jel között véges sok jel szerepel. Tehát EGYSZERRE bizonyítottuk minden n−re. Egymásután nem is lehetne, hiszen az végtelen hosszú bizonyítás lenne.
Ha ezt a gondolatmenetet elfogadod, akkor viszont nincs értelme annak az állításnak (axiómának?, konvenciónak?), amit az elõadás elsõ részében Hilbertnek tulajdonítva felírtál, hogy F(0), F(1),.. külön−külön történõ levezethetõségébõl következik a "minden n−re igaz F(n)" állítás. Hiszen úgyis csak az utóbbit tudjuk bizonyítani (ha tudjuk.).

2.
A második megjegyzésem az elõadáson elhangzott megjegyzésem részletesebb kiegészítése.
Én az utóbbi években a kognitív tudomány bizonyos területeivel foglalkozom, és ennek kapcsán egyre gyakrabban hallok kollégáimtól (és az irodalomból) "Gödel tételre", "Turing gépekre" stb. vonatkozó, eldönthetetlenségrõl és kiszámíthatatlanságról szóló kijelentéseket, melyek sokszor rendkívül pontatlanok, üresek, és az eredeti tételek érvényességi körénél jóval többre kívánják õket használni. Ezért is érdekel engem ez a dolog. (Egy példa, amit egy kezembe került írásból szó szerint idézek: "Minden rendszerben vannak olyan értelmes kijelentések, melyek nem vezethetõk le. Ez Gödel híres−neves tétele. Az benne a fontos a mi szempontunkból, hogy olyan állításokra, amire a logika nem tudja megadni a megfelelõ levezetést (mert nincs ilyen levezetés), az ember képes választ adni." Nos, ez meglehetõsen meredek eszmefuttatás. Egy másik könyvben ezt olvasom: "Mint azt Gödel (1931) magának a logikának az eszközeivel megmutatta, egyetlen adott rendszerben sem lehet a rendszerben megfogalmazható összes igazságot levezetni." Hm.)
Az én egyik gondom az egész Gödel és Turing divattal (a kognitív tudományokban nagy divat ezekre hivatkozni) kapcsolatban − azon túl, hogy meglehetõsen pongyolán szokták idézni − az, hogy az eldönthetetlenségrõl ill. levezethetetlenségrõl szóló levezetések, ismereteim szerint, mindig ugyanazt az *önreflexiós trükköt* alkalmazzák. Nevezhetjük akár Berry trükknek, akár Russel trükknek, sõt, akár Cantor trükknek (ld. késõbb), de én inkább úgy nevezném: " a pénztártótól való távozás utáni reklamáció" trükkje. Minden ilyen esetben arról van ugyanis szó, hogy elõször definiálunk egy halmazt, *majd erre alapozva ugyanennek a halmaznak megadjuk egy újabb definícióját*. (Egy elemét újradefiniáljuk, tehát ezáltal az egész halmazt újradefiniáljuk, hiszen a halmazt elemi határozzák meg.) Ez a "pénztártól való távozás utáni reklamáció’" tipikus esete.
Tisztában nagyok azzal, hogy hasonló kérdésfelvetésekkel rengeteget foglalkoztak a múlt század elsõ felében. Kialakult a három fõ irányzat (logicista, intiucionista, formalista, nem tudom ma hol tart ez, vajon lecsengett−e már, gondolom nem), melyek különféle módon igyekeztek feloldani a halmazelméleti ellentmondásokat. A egyik "hivatalos" választ is ismerem, amit Te is

válaszoltál erre a kérdésemre: "ha megtiltanánk az önreflexiós definíciókat, akkor nagyon kevés maradna meg a matematikából". Csakhogy eleddig én ennél többet sehol sem olvastam és hallottam: ex cathedra kijelentésként elhangzott és leíródott, de sehol senki nem részletezte számomra, nem indokolta ezt az állítást.

Kérdésem − kérésem a következõ: részletezd nekem, légy szíves, legalább néhány példával, hogy mi veszne el a matematikából, ha a fenti "pénztár" tulajdonságú önreflexiós definíciókat kizárnánk a megengedhetõ definíciók közül. (Természetesen itt azt nem illene felsorolni, ami éppen ezen ellentmondások elemzésével foglakozik immár 130 éve, hiszen ez ismét csak egy erõs önreflexió volna.). Mi veszne el a geometriából, mi az algebrából, mi az analízisbõl? (Felteszem, hogy legelsõként a mértékelméletet fogod említeni, de itt is pontosítani kellene konkrét tételekre. Engem az gyõzne meg igazán, ha valaki mutatna egy halmazelméleten kívüli jelentõs matematikai tételt, amit csak ugyanezzel az önreflexiós trükkel tudunk bizonyítani. Azt az esetleges érvet, hogy a matematika minden ágának a halmazelmélet lenne az alapja, nem fogadom, el, mert az ilyen maglapozás általában utólag történik.)

A probléma, sejtésem szerint, számodra is létezõ, amit azért gondolok, mert a handautodba beleírtad a Berry és a Krétai paradoxonokat. Azonban mégsem derült ki számomra, hogy ezzel mit akartál mondani? **Kérlek, pontosítd ezt.**

A zavaró számomra az egész témában az, hogy ha e paradoxonokat úgy oldjuk fel, hogy azt mondjuk: ilyen definíciókat nem szabad megfogalmazni, mert eleve ellentmondáshoz vezetnek, akkor miért fogadjuk el pl. Gödel levezetését hiszen az is ezt a trükköt alkalmazza, sõt tovább megyek: miért fogadjuk el Cantor−féle átlós eljárást a valós számok nem megszámlálhatóságának bizonyítására. Utóbbi is pontosan ugyanazt az önreflexiós trükköt alkalmazza, mint az említettek. Itt a következetességet kérem számon.

Ahogy a Cantor féle bizonyítással kapcsolatos következetlenséget megvilágítsam, álljon itt egy kis játékos paradoxon a Cantor−féle átlós eljárás és a Berry paradoxon módosításának öszekapcsolásából. (Saját kútfõbõl merítve 31 évvel ezelõtt, de ha elõttem már más is felvetette és kielemezte, kérném a referenciát.)

Kis játékos paradoxon:

Azt mindenki elfogadja, hogy vannak valós számok, melyek a matematikában használatos véges ábécé karaktereibõl alkotott véges mondatokkal definiálhatók. (Pl. 1,2,3, Pi, bizonyos sorozatok, sorok, stb.). Az is nyilvánvaló, hogy azok a valós számok, melyek e véges ábécé véges mondataival definiálhatók, megszámlálható számosságú halmazt alkotnak. Az általánosság megszorítása nélkül korlátozhatjuk vizsgálódásunkat csak a (0,1) intervallumban található ilyen valós számokra, ugyanis ha egy ilyen szám 1 nél nagyobb , akkor annak reciproka az ’1/ ’ karaktersorozat elérakásával (0,1) be konvertálható (és vizsont), és szintén véges hosszúságú lesz a definíciója.
Rendezzük sorozatba e halmaz elemeit, és végezzük el a Cantor féle átlós eljárást. Az eredmény: kaptunk egy új valós számot, melyet *szintén véges hosszságú mondattal definiáltunk*, de nincs benn az eddigi felsorolásban!
Szerinted hogyan oldható fel ez a paradoxon? Mert azt ugye *most nem* lehet mondani, amit az eredeti Cantor féle bizonyításnál, hogy "tehát a véges ábécé véges mondataival definiálható valós számok halmazának számossága nem egyenlõ a természetes számok számosságával."
Ha következetesek akarunk maradni, akkor mindkét esetben (az eredeti Cantor féle átlós eljárásban, és az itt leírt, módosított példában) azonos *elveket* kell alkalmaznunk az ellentmondás feloldására!

Ennyit találós kérdésként, és végül még egy utolsó megjegyzés

3.
Az én nézõpontomból tehát a fõ kérdés az, hogy ám legyen igaz és helyes minden, amit a Gödel tétellel kapcsolatban mondanak (formálisan mindenképpen igaz, de az értelmezése már problémás), de akkor sem mindegy, mekkora annak érvényességi köre. Mert ha csak az ilyen önreflexiós trükkel lehet eldönthetetlen tételeket konstruálni (nem is konstruálni, hanem "létezésüket" bizonyítani), akkor el kellene különíteni az ilyen típusú megoldásokat, és azt megnézni, hogy ami marad, ott mi helyzet. Azaz például van e "valódi" eldönthetetlen állítás, amint azt handaoutodban írod és elõadásodban is beszéltél róla. Az m szám n alapú reprezentációjával kapcsolatos tételrõl van szó. Kár, hogy ezt a levezetést te magad sem ismered (rábízod nálad okosabb emberekre és a folyóiratokra, ami hozzáállással én nagyon nem értek egyet), így errõl nem tudok kérdezni. Bár gyanús az a mondat, amit odaírtál: "a második tételben a szóban forgó állítást kódoló aritmetikai formula szerepel". Lehet, hogy akkor ez is valami önreflexiós trükkön alapul? Erre a bizonyításra (mindkettõre) nagyon kíváncsi vagyok, mert az állítást egyelõre (mivel nem ismerem a bizonyításokat, hogy ott mit használnak fel) úgy is tudom értelmezni, hogy eszerint a Peano rendszer hiányosan írja le a természetes számok struktúráját. Nézetem szerint ugyanis a természetes számok a PA nélkül is léteznek−léteztek, hiszen véges halmazok ekvivalencia−osztályinak a megnevezései.
(Kronecker szerint "A természetes számokat Isten teremtette, minden egyéb az ember mûve:")
Kérésem: meg tudnád adni a Goodstein 1944, ill Paris, Kirby, 1982 pontos referenciáját?

A vastagon szedettekre kérném a válaszokat. És persze a többire is.

Budapest, 2001.03.12.

Üdvözlettel
Geier János