Tudománytörténeti viták az ógörög matematikáról

TDK dolgozat

Harkai Alexandra Dóra

ELTE

Témavezető:

Kutrovátz Gábor

Tanársegéd

ELTE Tudománytörténet és tudományfilozófia tanszék

Tartalomjegyzék

Bevezető

Dolgozatomban az ókori görög matematikával, illetve annak történetével kapcsolatban felmerült két vitát vizsgálok meg. Az egyik vita kiemelkedő matematikatörténészünk, Szabó Árpád munkásságához kapcsolódik, s a ’70-es években bontakozott ki. A második vitát Sabetai Unguru izraeli történész-tudománytörténész cikke indította el 1975-ben, 1979-ben pedig már lezajlottnak tekinthetjük.
Áttekintem a korabeli görög matematika főbb ismérveit, valamint felvetődő két kérdést, melyekből a dolgozatom középpontjába helyezett két vita kibontakozott.
Elsőként a Szabó Árpád-féle vitát vizsgálom meg, mely a görög matematika deduktív tudománnyá válásának és axiomatizálásának kiváltó okait és körülményeit taglalja.
Másodikként az Unguru-féle vitát mutatom be, mely a geometria térhódítását, illetve az algebra geometrizálásásának elméletét járja körbe.
Ezenkívül összehasonlítom a két vita lefolyását, kiemelve a köztük fennálló hasonlóságokat. Ennek érdekében több szempontból is körüljárok egy-egy felmerülő kérdést, ismételten visszatérve rá a különböző megközelítésekkel.
Végül megvizsgálom a viták gerincét képező írások nem pusztán tartalmi, hanem stilisztikai jellegzetességeit is, ezáltal rávilágítva azok esetleges összefüggéseire fogadtatásukkal és az elméletek utóéletével kapcsolatban.

Történeti áttekintés, a görög matematika főbb ismérvei

Az ókori görögöket sokáig a matematika megteremtőinek tartották. Döntő változás következett azonban be akkor, amikor kiderült, sok más ókori kultúra is rendelkezett már abban a korban a görögök által birtokolt felismerésekkel. A babiloniak, az egyiptomiak és a kínaiak is már évszázadokkal a görögök előtt birtokában voltak egy olyan jelentős tudásnak, melyek létrehozását sokáig a görögök érdemének tekintették. Számos matematikai témájú írás is létezett már ekkor (például a kínai Kilenc fejezet a matematikáról), valamint a görögök által rendszerezett tudás gyakorlati alkalmazások, empirikus ismeretek formájában közismert volt.

Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a görögök ne alkottak volna valami újat, valami „forradalmit”. Bár rendelkezésükre állt az említett kultúrák tudásanyaga, mégis egészen másképpen álltak hozzá ezekhez a matematikai tapasztalatokhoz. A matematika nem fejlődött tovább egyenesen, ugyanakkor visszaesésről sem beszélhetünk. Erre az időszakra tehető ugyanis a matematika deduktív, levezető, bizonyító tudománnyá válása. Meglepő ez a fordulat akkor, amikor nagy mennyiségű empirikus ismeret állt rendelkezésükre módszerek, eljárások, afféle „receptek” formájában. Tudjuk, hogy ez a „bizonyítási vágy”, „mindent mindenáron bizonyítani akarás” nagyon is tudatos és elterjedt gyakorlat volt a kor görög matematikusai között.

Mégis miért merülhetett fel az ókori görögökben a bizonyításra, az ilyen jellegű bizonyosságra való igény? Ezt a kérdést egyelőre nyitva hagyom, sok más hasonló problémával együtt keresünk majd rá válaszokat.

A bizonyítások és levezetések során már tudatos axiomatizálással találjuk szembe magunkat. A görögök felismerték, hogy a matematikát ilyen, mindenki által igaznak elfogadott állításokból kell levezetniük, és ezáltal azt minden kétséget kizáróan megalapozhatják.

Felmerül a kérdés: vajon honnan tudhatták ezt? Honnan tudták a kor matematikusai, hogy szükség van ilyen kijelentésekre? Ezen kérdés-, illetve problémakörrel foglalkozik a Szabó Árpád által elindított vita (*Anfänge der griechischen Mathematik*. Bp., 1969.)

A másik jellegzetesség, ami feltűnhet a korabeli matematikai könyvek olvasásakor, hogy a görögök matematikai tudása túlnyomórészt geometriai ismeret volt. A mai olvasó sokszor egy-egy algebrai összefüggés geometriai interpretációját vélheti felfedezni ezen írásokban, például az $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ összefüggés igazolását is „beleláthatjuk” egy geometriai tartalmú állítás bizonyításába. A fogalmazás szándékos: egyelőre még nem állíthatjuk, nem tudhatjuk biztosan, hogy itt valóban egy geometriai példával állunk szemben, vagy pedig egy geometriai formába öltöztetett algebrai állítással. Ezen, geometriai úton szemléltetett összefüggések az esetek döntő többségében valóban felfoghatók bizonyos másod- és magasabb fokú egyenletekként, illetve ilyen formába írhatók. Ez persze nem biztos, hogy egyértelműen azt is jelentené, hogy a geometria csupán egy eszköz, egy másik, talán szemléletesebb nyelv a problémák megragadására. Bár a görögöket megelőző kultúrák igen fejlett aritmetikai

ismeretekre tettek szert, és a görögség mindezt átvehette, korántsem egyértelmű az, hogy ezen felismeréseket a görögök „geometriai ruhába” öltöztették, vagy inkább a geometria művelése során olyan példákhoz jutottak, melyek ily módon nagy hasonlóságot mutattak a már meglévő aritmetikai-algebrai összefüggésekkel.
A viták során leggyakrabban *Euklidész Elemek* című művéből származó példákkal találkozunk majd, ugyanis ez a rendelkezésre álló, az ókori görögök matematikai ismeretanyagát rendszerezett, összefoglalt formában megörökítő korabeli forrás.

A két vita problémafelvetése

Axiomatizálás, levezetés, bizonyítás

Emlékszünk még a felvetett kérdések első csoportjára, mely az axiomatizálás és a levezető tudomány megszületése köré csoportosult:
Hogyan, mikor és miért lett a görögöknél a matematika deduktív tudománnyá?
Hogyan és mikor jöttek rá, hogy a matematika egésze be nem bizonyított állításokra épül?
Hogyan fedezték fel, hogy első alapelveiket nem szükséges bizonyítaniuk?
Ezeken kívül természetesen más problémák is szorosan ehhez a kérdéskörhöz kapcsolódnak:
A sokat vizsgált indirekt bizonyítás módszerének kialakulásáról, használatáról, illetve használatának feltételeiről is szó lesz. Ugyanakkor ezen módszer filozófiai, logikai háttere is fontos, eredetének feltárása közelebb vihet az „eredeti” kérdések megválaszolásához. Az ellentmondásra visszavezetés módszere ugyanis egyértelműen logikai tartalom fontosságát jelzi, a matematika ilyen megalapozásának vizsgálatát tehát bizonyos szempontból a logika korabeli rekonstrukciója is segítheti.

Geometria, geometrizálás

A második kérdéskör a geometriát, illetve a geometrizálás kényes kérdését érinti:

Valóban algebrai-aritmetikai ismereteket fogalmaznak meg ezek a geometriai formában kimondott tételek?
Vagy a kérdéses felismeréseknek nincs is semmiféle más ”mögöttes” tartalma, pusztán geometriai?
Kell-e, szabad-e a geometriai összefüggéseket esetlegesen szimbolikus, algebrai alakban is felírni, megfogalmazni egy másik nyelven?
Ezen kérdések megválaszolásában segít az ókori görögök matematikai írásainak vizsgálata. Sokszor támaszkodunk majd mi is *Euklidész: Elemek* című munkájára, mint a korabeli matematikai ismeretek megbízható, rendszerezett összefoglalására.
A „geometriai algebra” vizsgálatának szempontjából fontos momentum az irracionális mennyiségek, az inkommenzurábilitás problémája, az összemérhetetlenség kezelése. Ez ugyanis a görögök akkori számfogalma szerint nem volt megfogható, aritmetikailag nem tudták kezelni, azonban geometriailag mégis szemléltethető – ezt ők maguk is észrevették. Ez a probléma a geometriában meglehetősen sokszor merül fel, néhány gyakori eset ezek közül:

- a négyzet oldala és átlója közötti arány meghatározásakor

- adott négyzet területének megkettőzésekor a két négyzet oldalának, illetve azok arányának meghatározásánál

- adott kocka térfogatának megkettőzésekor szintén nem szerkeszthető meg eulklideszi eszközökkel a nagyobb kocka élhossza, hasonlóképpen „nem fogható meg” a két élhossz közötti arány sem

Az négyzet oldala és átlója közti arány meghatározása, valamint a négyzet területének megkettőzése természetesen közel állnak egymáshoz, azonban ezek különálló problémaként merültek fel.
Az arányszámok alkalmazásával a görög matematika számos összefüggése felírható másod-, vagy ritkábban magasabb fokú egyenletekkel. Ezek az „átalakítható” állítások szolgáltak azon nézet alapjául, miszerint a görög geometria valójában algebrai ismeretek reprezentálása geometriai eszközökkel, s mi több: ez a geometria tulajdonképpen nem más, mint az algebra geometriai köntösbe történő „beöltöztetése”. Felvetődik tehát a kérdés, hogy milyen mértékben szabad „hozzányúlni” ezekhez a felismerésekhez, illetve azok formájához.

A görögök egyik kedvelt problémája volt a területek egymásba alakíthatóságának vizsgálata. Ez a problémakör is a fentebb már említett összefüggésekkel áll szoros kapcsolatban.

A viták vizsgálata

Az első vita:
„Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?”

Ennek megválaszolására számos eltérő elképzelés látott napvilágot. A legérdekesebb kérdés az, hogy mi volt az a bizonyos kiváltó ok, ami miatt megváltozott a matematikához való hozzáállás, miért kellett megváltoztatni az addig bevett módszert.
Bartel Leendert van der Waerden arra válaszol, hogy miért lehetett a görögök célja a matematikai bizonyítás „megalkotása”, miért érezhették szükségét az egzakt matematika, és ezáltal pedig a precíz, levezető bizonyítások megalkotásának. Elgondolása szerint éppen azért, mert rendelkezésükre állt a többi ókori kultúra matematikai témájú ismeretanyaga, ugyanis egyes felismerések, módszerek kultúránként néhol eltérőek voltak. Ésszerűnek tűnik ilyen esetben, egymásnak ellentmondó tényekkel találkozva, hogy módszert keresünk annak eldöntésére, hogy vajon melyik lehet a helyes. Tekintsük például a kör területének kiszámítására alkalmazott módszereket, ahogy maga van der Waerden is teszi! Az egyiptomiak a kör átmérőjének 8/9-szeresének négyzetével határozták meg, míg a babilóni módszer szerint a sugár négyzetének háromszorosával egyenlő. Látható, hogy a két eredmény igen jó pontossággal közelíti a tényleges arányt a kör sugarának négyzete és a kör területe között. Valószínűsíthető, hogy a gyakorlatban nagyon jól működhetett mindkét módszer, azonban tudjuk azt is, hogy egyik helyen sem volt cél az aprólékos, precíz, levezetés. A két módszer tehát a görögöknél került szembe egymással: a sugár négyzetének 256/81-szerese, illetve 3-szorosa közül nyilván legfeljebb csak az egyik lehet helyes. Valóban lehetséges, hogy ez motiválhatta az ógörög matematikusokat a kör területének pontosabb meghatározására. Azonban hamar felvetődhet a kérdés: valóban megindokolja ez a magyarázat a rájuk jellemző „mindent mindenáron

bizonyítani akarást?”. Elég akár az Elemeket tekintenünk, és szembetűnik, hogy a közismert és vitathatatlan tényeket is bizonyítani akarták. Az, hogy a matematikát szigorú axiómákra építették fel, illetve ezekre vezették vissza, már nyilvánvalóan túlmutat azon, hogy pusztán a téves ismereteket akarták volna kiszűrni. Ezzel tehát nem indokolhatjuk meg ilyen „egyszerűen” a görög matematikusok motivációját.

Kurt von Fritz már egészen más irányból közelíti meg ezt a kérdést. Vélekedése szerint a bizonyítandó tételek igazolásához utólag kereshettek megfelelő premisszákat, vagyis ezekre az „egyszerű” (vagy „egyszerűbb”) állításokra vezették vissza a „bonyolultabb” tételeket. Valóban, a matematika az állításokat a már elfogadott premisszákra vezeti vissza, illetve ezekből a premisszákból vezeti le a tételeket. Von Fritz ezenkívül felhívja a figyelmet a dialektika (itt ezen a „vitatkozás művészetét” értjük) és a matematika ilyen módszereinek párhuzamára. A viták során ugyanis azt az állítást, amit igazolni akarunk, hasonlóan vezethetjük vissza: a bizonyítandó állításhoz keressük tehát a premisszákat, melyeket a vitapartner is elfogad, majd innen „visszafelé” építve igazolhatjuk az eredeti állításunkat. Teljességgel lehetséges tehát, hogy sok tétel bizonyításához hasonlóan jutottak el az ókori görög matematikusok, ugyanakkor számos tételt megkaphattak úgy is, hogy az eredmény egy levezetésből vagy bizonyításból „sarjadt”, nem keresték kifejezetten. Egyébként von Fritz elgondolását támasztja alá az is, hogy Arisztotelész már kifejezetten a matematikára hivatkozik, amikor a „bizonyító tudományok”-ról ír. Von Fritz ezzel ugyan nem ad explicit választ arra a kérdésünkre, hogy miért és mikor lett a matematika deduktív tudománnyá, azonban ráirányítja figyelmünket a matematikai bizonyítás és a dialektika által alkalmazott bizonyítási módszer közötti párhuzamokra.

Szabó Árpád vitába száll a már meglévő elméletekkel:

Van der Waerden elképzelését nem ítéli jelentős eredménynek a kérdés megválaszolására tett kísérletben, ugyanakkor elismeri, hogy az általa felvetett motiváció kezdetben kétségtelenül jelen lehetett, mint a bizonyításra való törekvés egyik kiváltó oka. Von Fritz dialektikára alapozó elméletét elfogadja, azonban a deduktív matematika kialakulásának lehetséges okairól jóval többet mond Szabó Árpád magyarázata.

Az elmélet szerint az eleai filozófiai iskola tanításaiból eredeztethetjük nem csak a bizonyítások módszerét és terminológiáját, hanem magát az axiomatizálás megjelenését is, az eleaták hatására válhatott tehát a matematika olyan deduktív tudománnyá, amilyennek ma is ismerjük.
Két kérdésre keressük a választ: Mikortól és honnan tudták a görög matematikusok, hogy be nem bizonyított állításokra kell felépíteniük a matematika egészét?
Platón már az *Állam* című művében leírja, hogy a matematikával foglalkozók alapul vesznek bizonyos dolgokat, mint például a párosat, a páratlant, a szögek különböző fajtáit. Ezekről nem adnak számot és nem is gondolják, hogy bárkinek is számot kellene adniuk róluk. Arisztotelész is rámutatott, hogy minden tudományt ilyen bizonyíthatatlan, mégis igaz alapállításokra kell felépíteni. Ezzel választ kaptunk az első kérdésre: a görögök már az időszámításunk előtti IV. század elején tudhatták, hogy a matematika megalapozásához ilyen be nem bizonyított állításokra van szükség.
Az eleai dialektikára vezeti vissza Szabó Árpád a matematika axiomatizálását is, e tekintetben az elmélete hasonlóságot mutat von Fritz elképzelésével. A viták során ugyanis az a fél, aki be akart bizonyítani egy állítást, olyan érvelést kellett, hogy használjon, melynek minden lépését a másik fél elfogadja. Ennek felépítéséhez pedig szükség volt olyan állításokra, melyeket mindketten igaznak fogadnak el és melyekre az érvelés további részében támaszkodni lehet. A dialektika és a matematika hasonló terminusainak részletes filológiai elemzése során rámutat ezek lehetséges, sőt, valószínűsíthető létrejöttére. Ezen terminusok, például az *aitéma* és a *hypotheseis* jelentését és funkcióját is behatárolja. A *hypotheseis* szó például feltevést, illetve „alátétet" jelent, olyasmi, melyre, mint alapra a későbbiekben építhetünk. Ugyanez a szó szolgál a matematika alapjául vett definíciók, posztulátumok és axiómák jelölésére is. A eleai filozófia és a matematika terminológiájának ilyen szintű hasonlósága is azt a feltevést látszik alátámasztani, hogy e két tudomány kibontakozása szorosan összefügg.
A matematika alapjainak ilyen filozófiai eredete pedig azt mutatja, hogy az a bizonyosság tehát, melyre a levezetések és bizonyítások során a görög matematikusok törekedtek, az pusztán a gondolatok útján, az értelemmel, elmélkedéssel megszerezhető ismeret.
Az indirekt bizonyítás alkalmazását ismételten az eleai filozófusok módszerei között találjuk: Parmenidész tankölteményében így érvel a *„létező"* létezése, valamint a

„nemlétező” nemléte mellett. A bizonyítási „eljárás” lényege, hogy az igazolni kívánt A állítás helyett a $\neg A$ állítást cáfoljuk meg. Az indirekt bizonyítással ily módon egy állítás ellentmondásosságát tudjuk igazolni, ami így, mint ellentmondáshoz vezető kijelentés, nem lehet igaz. Ha tehát a kiinduló A állításról feltesszük, hogy hamis, majd $\neg A$-ból kiindulva egy olyan B állításhoz jutunk, melynek tagadását már korábban beláttuk, akkor azt kaptuk, hogy mind A, mind pedig $\neg A$ hamis. De vagy A-nak, vagy $\neg A$-nak igaznak kell lennie, *harmadik lehetőség nincs*. Ez a kizárt harmadik elve. Ez a felfogás egyszersmind azt is mutatja, hogy egy kijelentés igazságának kritériuma logikailag pontosan az ellentmondásmentesség. Az indirekt bizonyításnak csak így van „értelme”, csakis ennek tudatában alkalmazhatjuk.

Kalmár László jegyezte meg, hogy az indirekt bizonyításnak több módja ismeretes és ezek közt van olyan, mely nem igényli a „kizárt harmadik” elvének használatát. Ha ugyanis az A állítás hamis voltát szeretnénk igazolni, akkor eljárhatunk a következőképpen: ha sikerül A-t egy olyan B állításból levezeti, melynek tagadását már korábban bizonyítottuk, akkor ezzel A hamis voltát igazoltuk. Az indirekt bizonyítás ilyen formája pedig valóban nem igényli a kizárt harmadik elvének használatát.

Paul Bernays hívja fel a figyelmet arra, hogy a levezető bizonyítás metódusát már az eleai filozófusok tevékenysége (melynek kezdete i.e. 500 környékére tehető) előtt is ismert lehetett, mégpedig Thalész által, vagyis körülbelül egy évszázaddal korábban. Az észrevétel alapjául az szolgált, hogy az a felismerés, amhez a Thalész-kör segítségével jutunk, bonyolultabb felismerés annál, minthogy levezetések nélkül, „egyszerűen rájöhettek” volna.

A második vita:
Algebrai geometria – pro és kontra

A második vita alapját képező „algebrai geometria” szemléletének eredete valamivel korábbra vezet minket vissza: már a XIX. században is többen osztották azt a nézetet, hogy az ógörög matematika geometriája nem más, mint „geometriai algebra”, azaz algebrai-aritmetikai összefüggések geometriai fogalmakkal és eszközökkel történő kifejezése. Paul Zeuthen és Hieronymus Georg Zeuthen matematikatörténészek szerint az euklideszi *Elemek* számos könyve leginkább ilyen geometriai algebraként értelmezhető, közülük is a II. és VI. könyveket emelték ki. Máig ezeket tartják mások is a legszebb példáknak az elmélet alátámasztására.

Folytatva ezt a gondolatmenetet, Otto Neugebauer, majd később van der Waerden mindketten azt állították, hogy az úgynevezett görög geometriai algebra tulajdonképpen nem más, mint geometriai ruhába öltöztetett babilóniai algebra. Neugebauer például a babilóni algebra továbbfejlődését látta a görögök matematikájának ezen részeiben.

Sir Thomas Little Heath is osztotta az említett nézetet. Az *Elemek* fordítójaként írt magyarázataiban amellett érvel, hogy geometriai formában mutatták be az algebrai összefüggéseket.

Az elmélet hívei közül néhány jelentősebbet mutattam be, még számos matematikatörténészt sorolhatnánk fel, ugyanis a görög geometriát illetően alapvetően ez volt az elterjedt nézet.

Sabetai Unguru vitatja mindezt, sőt, ennél többet is. Határozottan érvel amellett, hogy az ókori görögség geometriája mögött nincs semmiféle, a matematikatörténészek által geometriai algebrának hívott algebrai tartalom, pusztán geometriai jelentésük van és ilyen értelemben a tartalom nem mutat túl a formán. Elsőként azt igyekezett kimutatni, hogy a görögöknek egyáltalán nem is volt célja az algebra geometrizálása. Számos példát sorakoztatott fel, melyekben rámutat, hogy sem maga a probléma, sem annak kimondása, kezelése, megoldása nem mutat túl a geometria határain. Megkérdőjelezte, hogy a görög matematikusok egyáltalán gondoltak-e ilyenkor bármi másra, mint geometriára. Ugyanitt felveti a kérdést, hogy egyáltalán miért lett volna a görögök célja az algebra geometrizálása. Valóban érdekes gondolat: miért nem foglalkoztak „nyíltan" algebrával? Miért kellett volna elkendőzniük az algebrai gondolatmenetet? Azonban a meglévő felfogásban nem ez az egyetlen pont, amit Unguru támad, más területeket is erős kritikával illet. Felhívja a figyelmet arra, hogy milyen veszélyeket rejt magában például ezen antik szövegek „lefordítása", átírása például a modern matematika nyelvére. Továbbá kifejtette azt a nézetét, miszerint a matematika történetével nem a matematikusoknak kellene foglalkozniuk. Gondolatmenetéből arra következtethetünk, hogy éppen a matematikusok hibájának tartja azt, hogy a görög geometriai felismeréseket sokan a modern matematika szimbolikájával és fogalmaival kívánták megragadni. Természetesen számunkra egyszerűbb így gondolkodni róluk, de ez nem jelenti azt, hogy az ókori görög matematikusoknak is biztosan így volt könnyebben kezelhető a matematika. Unguru tovább megy, azt is lehetségesnek tartja, sőt valószínűsíti, hogy egyáltalán nem is ismerték a matematikai gondolkodás ilyen módját. Felhívja a figyelmünket arra, hogy a görögök a hasonló problémák kezelésekor alapvetően arányokban gondolkodtak és ez a kritikus pont, ami miatt nem alakíthatóak át ezek az összefüggések másod-, illetve magasabb fokú egyenletekké, holott az algebrai gondolkodás számára ez természetes lenne. Bemutat egy példát annak illusztrálására, hogy az óvatlan „algebrizálás" nem is mindig vezethet eredményre: Euklidesz X. könyvéből a 22. tétel geometriai összefüggése az algebrai kifejezésekben gondolkodva szinte semmitmondó. Miért lett volna tehát szükség rá? Hangsúlyozza továbbá, hogy az algebra maga a modern idők terméke, a XVI-XVII. Században bontakozott ki igazán, így a görög ilyen formában semmiképpen nem művelhették. Ezt meggondolva nem tűnik annyira hihetőnek, hogy a geometria mögé bújtatott algebra ilyen sokáig megmaradhatott volna ebben az „álruhában".

Érthető tehát, hogy miért fogadta a matematika történetével foglalkozók többsége megdöbbenéssel és felháborodással Sabetai Unguru írását.

Van der Waerden ingerült választ írt erre a cikkre, melyben nemcsak saját, de egyúttal Tannery, Zeuthen és Neugebauer álláspontját is védi. Hangsúlyozza, hogy a vitatott felismerések mögötti gondolatmenet rekonstrukciója során elképzelhetőbbnek tartották, hogy a probléma nem a geometria, hanem inkább az algebra területén vetődhetett fel. Mind ő, mind a szintén reagáló Hans Freudenthal és André Weil teljes egészében elutasítják Unguru felvetését, inkább globálisan, mint a kétséges pontokon ingatva meg azt.

A két vita – más nézőpontból

Tekintsünk a két vitára egy kicsit más szemszögből!

A tudománytörténetírásban ebben az időben jelen levő vita az internalisták és az externalisták között kétségtelenül megnyilvánul a most vizsgált két vitában is. A két, egymással szembenálló fél a tudomány belső, illetve külső történetét tartotta lényegesnek. Az internalista nézetek szerint a tudomány a saját, belső „törvényei" szerint fejlődik, a végbementő változások okai saját magában a tudományban

keresendők. Az externalista felfogás a külső hatásoknak tulajdonítja mindezt: gazdasági, politikai, társadalmi, összességében irracionális tényezők eredményének.
A vitákban résztvevő ilyen nézőpontból tehát abban állnak szemben egymással, hogy az internalizmus és externalizmus közül ki melyiket tekintik fajsúlyosabbnak, kinél merre billen a mérleg nyelve…

Az első vita:
A korabeli filozófia hatása

Az axiomatizált, deduktív matematika kibontakozásának vizsgálatakor joggal feltételezhetjük, hogy a korabeli filozófiának hatása lehetett a matematikai gondolkodásmód változására, a matematikához való hozzáállásra. Mivel az euklideszi *Elemek* már a kiforrott, bizonyos tekintetben már a végleges axiomatizálást tárja elénk, ezért a szóban forgó szemléletváltás ez előtt , vagyis i.e. 300 következhetett be.
Parmenidész tanköltemény e megbízható forrásként szolgál az eleaták gondolkodásának megismerésében.
Az eleai filozófiai iskola tanításai közül érdemes kiemelni néhány olyat, melynek köze lehet a korabeli, illetve valamivel későbbi matematikai gondolkodáshoz. A Parmenidész és egyáltalán az eleaták által oszthatatlannak tartott „egy” gondolata bizonyos tekintetben a matematikában is megfogalmazódott: „Pont az, aminek nincs része.” - olvashatjuk az *Elemek* legelső definícióját. Úgy tűnhet, az „oszthatatlan egy” mindkét területen alapvető fontossággal bírt.
Szintén az eleaták tanításai között találjuk azt az elvet, hogy a valóság megismeréséhez, vizsgálatához vezető két út - a *tapasztalati*, az *érzéki*, illetve a *gondolkodás* – közül a gondolati úton megszerzett ismeretek vezetnek, az érzékeinkben nem bízhatunk. A megismerés ilyen absztrakciója a mindenek felett álló bizonyosságra való törekvést látszik alátámasztani.
Amennyiben elfogadjuk azt a nézetet, miszerint az ókori görög matematikában a bizonyosságra való törekvés, illetve a logikai igazságra való törekvés ennyire szoros kapcsolatban állnak, felmerül a kérdés, hogy a filozófiában, illetve a matematikában megmutatkozó közös logikai alap egymástól függetlenül alakult-e ki, vagy pedig az egyik létrejötte motiválta a másik kibontakozását?

Miért merült fel a matematika ilyen, logikai és axiomatikus megalapozására való igény? Miért akartak mindenáron mindent bebizonyítani?

A második vita:
Az algebra „keresése” a geometria mögött

Az ókori görög geometriáról szóló viták során két jól elkülöníthető tábor áll egymással szemben: a „geometriai algebra” nézet hívei, valamint azok, akik pusztán geometriát olvasnak ki a vitásnak ítélt ismeretanyagból. E két oldal alapvetően abban tér el, hogy a görög matematikusok gondolkodását másképpen ítélik meg, illetve mennyire tartják helyesnek a forrásokban olvasható levezetések modernebb matematikai formulákra való „lefordítását”. Eltér az is, hogy miként ítélik meg a görögök matematikáról kialakult elképzelését, hozzáállását például a vitatott indíttatású tételekhez.
Euklidesz Elemeinek említett részeit (például II. és VI. könyveit) olvasva a mai, matematikával foglalkozó ember számára természetesen körülményesnek, nehézkesnek tűnhet az akkori geometriai módszer és terminológia. Ilyenkor természetesen nem kerülhetjük el azt, hogy az olvasott görög (illetve „görögös”) kifejezéseket „leegyszerűsítve”, saját magunk számára bizonyos mértékben átalakítva, lefordítva olvassuk. Nem meglepő az sem, hogy a görögök által akkor megfogalmazott összefüggéseket meg lehet fogalmazni nem csak a geometria, hanem az algebra kifejezéseivel és eszközeivel is.
Unguru a történeti kontextus jelentősége mellett érvel és mereven visszautasít minden olyan, általa túl prezentistának ítélt törekvést, mely algebrát vél felfedezni a geometriai összefüggések mögött, s minden óvatosság nélkül a modern algebra szimbolikájára kívánja átültetni azt.
Meggondolandó az is, hogy az emlegetett összefüggésekben szereplő mennyiségek a görögök számára valószínűleg csak szakaszokként és területekként voltak megfoghatóak, így egy olyan kifejezést, melyet a mai algebrai eszközökkel az $xy+x$ alakban írnánk fel, vélhetőleg nem is tudnának értelmezni. Lehetséges, hogy ilyen kifejezések fel sem merültek bennük, vagy lehet, hogy egyszerűen csak nem tudták kifejezni?

Hasonló vonások

Mindkét vita indító írása egy-egy, a matematika történetének korai szakaszát, az ókori görög matematikát érintő kérdésre keres választ. A már meglévő, elterjedt és elfogadott nézettel, illetve elképzelésekkel helyezkedtek szembe mindketten, ezzel teremtve meg a lehetőséget egy-egy új felfogás létrejöttének.
Mind Szabó Árpádról, mind Ungururól elmondhatjuk, hogy elsősorban az ókori görög matematikusok szemszögéből közelítették meg a problémákat, de természetesen nem ugyanazt a kérdést helyezték középpontba – így a vizsgált felfogások is eltérnek.
Mind Szabó Árpád, mind Sabetai Unguru a görögök korabeli gondolatmenetét kísérelte meg rekonstruálni, ennek megközelítésére történeti módszereket alkalmazva.

Különbségek

Nagy különbségeket mutat a két vita lefolyása. Mind számban, mind hangvételben jelentősen eltértek a reakciók.
Szabó Árpád elmélete visszafogottabb fogadtatásra talált. Az új, összetettebb elképzelés elfogadtatásra lelt. Természetesen sokan nem értettek egyet, ők azonban leginkább egy-egy momentumot ragadtak ki, ezeket a kiemelt részleteket illették kritikával. Ezek között több olyat is találunk, amelyet később maga Szabó Árpád is elfogadott és a megkérdőjelezett ponton számos alkalommal változtatott is az eredeti elképzeléseken, illetve kijelentéseken. Ilyenek például a már említett, Kalmár László és Paul Bernays által megfogalmazott kommentárok.
Unguru cikkére (1975) mindössze néhány feldúlt reakció érkezett. Van der Waerden (1976-ban) és Hans Freudenthal (1977-ben) egy-egy ingerült hangvételű cikkben védték meg álláspontjukat és támadták a „geometriai algebra” ellenzőjét. André Weil nem sokkal később (1978-ban) a lap szerkesztőjéhez írt levelet, melyben kifejezte az iránt érzett megdöbbenését, amit Unguru cikke jelentett. Véleménye szerint az írás mind tartalmát, mind stílusát tekintve színvonaltalan volt, mi több, a szerzőjére pedig egyszerűen csak „Z”-ként hivatkozik – úgy látszik, arra sem méltatta, hogy nevén

nevezze. Figyelmet érdemel ezenkívül a címe is, „Ki árulta el Euklidészt?”. Mindez az *Archive for History of Exact Sciences* lapjain történt. Később Unguru természetesen válaszolt az őt ért kritikákra, ám cikkét a folyóirat ezúttal nem jelentette meg, így az *Isis*-ben (1979-ben) látott napvilágot. Unguru cikke nem hagyott maga után olyan nagy visszhangot, mint Szabó Árpád, a vitának hamar vége szakadt azzal, úgy érezhetjük, mintha „agyonütötték”volna.

Felmerül a kérdés, hogy a két vitának vajon miért lehetett ennyire eltérő lefolyása. Amíg Szabó Árpád munkája sokáig ráirányította a figyelmet az ógörög matematika ezen fejezetére és ezzel további kutatások alapjául szolgált, addig Unguru „próbálkozását” már a kezdetekkor is erőteljes ellenszenv fogadta. Míg az első vitában az elmélet egyes pontjaihoz külön-külön fűztek kritikákat, megjegyzéseket a kortársak, addig a másodikban az új elképzelést teljes egészében visszautasították. Úgy gondolom, hogy pusztán a tartalom önmagában nem váltott volna ki ekkora felháborodást. Jelentős stilisztikai különbségeket fedezhetünk fel a két vitát képező írások figyelmes olvasásával.

Szabó Árpád munkáiban már igen hamar felfedezhetjük van der Waerden nevét: leszögezi ugyanis, hogy az ő úttörő munkája nélkül maga sem tudta volna elkezdeni ezen terület kutatását. Később ugyan hamar látható, hogy számos helyen kettejük véleménye eltér, Szabó itt idézi ugyan, rámutat azokra a pontokra, ahol nem ért egyet, kifejti és megindokolja saját véleményét, de ami lényeges: nem minősíti azt. Később látni fogjuk, ez miért fontos. Láthatjuk, minden őt ért kritikára egyrészt teljesen tárgyilagos hangnemben válaszol, teljesen nyitott a saját elméletének megváltoztatására, helyesbítésére, ugyanakkor az általa biztosnak ítélt pontokban megingathatatlan, a megjegyzések hatására ezeket másképpen próbálja megmagyarázni, alátámasztani.

Unguru cikkét olvasva feltűnhet, hogy meglehetősen határozott véleménnyel van a vele ellentétes álláspontot képviselő matematikatörténészekkel szemben – és ezeknek igen hamar hangot is ad. Weilnek teljesen igaza van abban, hogy az írás hangneme szokatlan: még a „buta” szót is használja a számára nem elfogadható elképzelésekre, többek között van de Waerden, Heath és Tannery munkáját minősíti le. Azonban nem ez az egyetlen merészség, amit Unguru „elkövet”. Felveti ugyanis a kérdést, hogy kinek feladata a matematika történetének írása, ki foglalkozzon matematikatörténettel. A merészség ebben az, hogy a matematikusokat alkalmatlannak tartja erre a feladatra.

Indoklása szerint azért, mert a történetírás számukra túl idegen és ismeretlen, míg a matematika túl ismert. Ezzel az állásponttal nem szándékozom hosszan vitázni, azt azonban fontosnak tartom megjegyezni, hogy a matematika bizonyos szintű ismerete természetesen szükséges ahhoz, hogy a történetét megfelelően megérthessük.

Köztes álláspontok

Szabó Árpád elméletének fogadtatása nem volt egyöntetű. Sokan nem értettek egyet egy-egy momentummal, azonban magát az elképzelést globálisan nem kérdőjelezték meg. Érdekes azonban, hogy a lecsengése során több olyan hozzászólás is született vele kapcsolatban, mely az eltérő nézetek közé helyezkedik és egyértelműen az építő jellegű vita pártjára áll.

Filippo Franciosi észrevétele Wilbur Richard Knorr és Szabó Árpád vitája kapcsán az, hogy annak ellenére, hogy egyikük platonista, másikuk arisztoteliánus, mindkettejüknek lehet igaza, hogy közöttük igazságot tegyünk, már nem a mi feladatunknak tartja.

F. A. Medvedev fogalmazza meg, hogy az érdeklődés felhívása, a figyelem ráirányítása az adott területre önmagában ártalmatlan. Mi több, kiváltképp hasznos is lehet, ha nem válik ellenkező nézetek csataterévé.

Az Unguru-féle rövid vita során csak szélsőséges álláspontokkal találkozhatunk, merőben kiélezettebb vitáról van szó.

Konklúzió

A Szabó Árpád által elindított vita vitathatatlan érdeme, hogy felhívta a figyelmet a matematika megalapozásának esetleges filozófiai motivációjára. A mindkét területen alkalmazott logikai módszerek és használt terminusok valóban szoros kapcsolatra engednek következtetni.

Unguru vitájának nincsenek ilyen látványos következményei. Újító elképzelését hamar lehurrogták, ezért sajnos nem válhatott olyan nagy érdeklődés tárgyává, nem képezte konstruktív viták alapját, mint elődе. Azonban ha Medvedev észrevételét észben tartjuk, miszerint az érdeklődés puszta ráirányítása önmagában veszélytelen, akkor beláthatjuk, hogy Unguru érdeme is az, hogy egy merőben újszerű elképzelésnek hangot adott, lehetőséget adva egy, a valóságnak történetileg jobban megfelelő kép kialakulásának.

A lényeges pont egyrészt az, hogy hol vonjuk meg a határt a saját meglátásunk, illetve azon felfogás között, mely az akkori görögök fejében élhetett. A másik fontos kérdés pedig az, hogy mit mondhatunk mindezek után arról, hogy a matematika axiomatizálói valójában mit alkottak, amikor ezeket a sokat vitatott felismeréseket megfogalmazták. Úgy érzem, a felmerülő kérdéseket ezen a ponton ugyan nem lehet lezárni, de úgy hiszem, nem is szükséges.

Irodalomjegyzék

Pais István, *A filozófia története* (Budapest, 2005)

Szabó Árpád, *The Beginnings of Greek Mathematics* (Budapest, 1978)

Szabó Árpád, *A görög matematika* (1997)

Szabó, A., 1967, 'Greek dialectic and Euclid's axiomatics', in Lakatos, I., (ed.) *Problems in the philosophy of mathematics, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science,* Vol. I, London, 1965, Amsterdam, North-Holland, 1-8.

W. C. Kneale, 'Priority int he use of *reductio ad absurdum*', in Lakatos, I., (ed.) *Problems in the philosophy of mathematics, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science,* Vol. I, London, 1965, Amsterdam, North-Holland, 9-10.

L. Kalmár, 1967, 'The Greeks and the excluded third', in Lakatos, I., (ed.) *Problems in the philosophy of mathematics, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science,* Vol. I, London, 1965, Amsterdam, North-Holland, 10-11.

W. R. Knorr, 1978, 'On the Early Histoy of Axiomatics: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity', in Hintikka, J., Gruender, D. and Agazzi, E., (ed.) *Theory Change Ancient Axiomatics and Plato's Cosmology,* Vol. I, Dordrecht, D. Reidel, 145-186.

F. Franciosi, 1978, 'Some Remarks ont he Controversay between Prof. Knorr and Prof. Szabó', in Hintikka, J., Gruender, D. and Agazzi, E., (ed.) *Theory Changm Ancient Axiomatics and Plato's Cosmology,* Vol. I, Dordrecht, D. Reidel, 187-192.

F. A. Medvedev, 1978, 'On the Role of Axiomatic Method int he Development of Ancient Mathematics', in Hintikka, J., Gruender, D. and Agazzi, E., (ed.) *Theory Change Ancient Axiomatics and Plato's Cosmology,* Vol. I, Dordrecht, D. Reidel, 223-225.

Sabetai Unguru, „On the need to rewrite the history of Greek mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, 1975, 67--114.

B. L. van der Waerden, „Defense of a `shocking' point of view", *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, 1976, 199--210.

Hans Freudenthal, „What is algebra and what has been its history?", *Archive for History of Exact Sciences*, **16**, 1977, 189--200.

André Weil, „Who betrayed Euclid?”, *Archive for History of Exact Sciences*, **19**, 1978, 91--93.

Sabetai Unguru, „History of Ancient Mathematics: Some reflections on the state of the art”, *Isis*, **70**, 1979, 555--565.

Reviel Netz, „Introduction: The History of Early Mathematics – Ways of Re-Writing”, *Science in Context*, **16**(3), 275-286 (2003).

Köszönetnyilvánítás

Itt szeretném megragadni az alkalmat arra, hogy köszönetet mondjak témavezetőmnek, Kutrovátz Gábornak azért, amilyen lelkesedéssel a görög matematika történetéről beszélt, és ezzel folyamatosan erősítette növekvő érdeklődésemet iránta. Köszönettel tartozom neki ezen kívül türelméért és készséges, mindig inspiráló hozzáállásáért, mellyel munkám során segített.