Pauli és a valószínűség

Szabó Gábor

ZSKF, Filozófia és Vallástudományi Tanszék

ELTE BTK, Logika Tanszék

Email: gsz@szig.hu

Pauli filozófiája

A „leválasztott megfigyelő” (detached observer) kritikája

- koppenhágai értelmezés
- *physis* és *psyche*
- *unus mundus*
- szinkronicitás mint általános kauzalitás
- archetípusok – „rendező erők, amelyek neutrálisak a pszichikai-fizikai distinkció szempontjából, de amelyek, ellentétben az alkémia konkretisztikus pszichofizikai egyesített nyelvével, ideálisak és absztraktak, vagyis természetüknél fogva nem szemléletesek (unanschaulich)”

Valószínűség és fizika, 1954

Az érv:

- valószínűség
- a nagy számok matematikai törvénye
- a nagy számok fizikai törvénye
- a megfigyelő lényegi szerepe
- a „leválasztott megfigyelő” (detached observer) kritikája

Valószínűségszámítás

- „A valószínűség matematikai fogalma abból a törekvésből származik, hogy, amennyira csak lehetséges, objektívvá tegyük az egyedi eseményekhez fűződő várakozásainkat.”
- (van der Waerden, Dirac)
- Bernoulli-tétel

Bernoulli-tétel

„’Minden’ (ε, δ) pozitív számpárhoz ’mindig létezik’ egy nagy N szám a következő tulajdonságokkal: ’annak valószínűsége, hogy azon alkalmak számaránya, ahol a esemény bekövetkezik, N számtól felfelé ε-nál jobban különbözzék p-től, kisebb, mint δ.

Vegyük észre, hogy ez az állítás nem egy határértékről szóló állítás. Ez csak akkor lenne így, ha δ helyébe 0-t írhatnánk. A valószínűségi kalkulus azonban kifejezetten megköveteli, hogy az empirikus frekvencia és a p matematikai valószínűség közötti ε-nál nagyobb diszkrepanciának egy nagyon kicsi, de el nem tűnő valószínűsége legyen.”

A Bernoulli-tétel és a tapasztalat

„Ebben a tisztán matematikai formában a Bernoulli-tétel nem alkalmas empirikus próbára. Ehhez még be kell iktatnunk egy a humán megfigyelő, vagy speciálisan a tudós gyakorlati attitüdjére vonatkozó szabályt, amely számításba veszi azt a szubjektív faktort is, hogy egy nagyon valószínűtlen egyedi esemény realizációját, akár csak egyetlen alkalommal is, egy bizonyos ponton túl lehetetlennek tekintjük. Elméletileg meg kell persze engedni, hogy még mindig van egy nullától különböző esély a hibára; de a gyakorlatban ezen e ponton egy aktuális döntéshez érkezünk a fizikai vagy a természettudományos elméletek statisztikus kijelentéseinek tapasztalati helyességére vonatkozóan. Ezen a ponton végül elérjük azt a határt, amely eredeti programunk kivihetőségét illeti, hogy t.i. egyedi szubjektív várakozásainkat racionálisan objektiváljuk.”

A Bernoulli-tétel és a tapasztalat

„Ebben a tisztán matematikai formában a Bernoulli-tétel nem alkalmas empirikus próbára. Ehhez még be kell iktatnunk egy a humán megfigyelő, vagy speciálisan a tudós gyakorlati attitüdjére vonatkozó szabályt, amely számításba veszi azt a szubjektív faktort is, hogy egy nagyon valószínűtlen egyedi esemény realizációját, akár csak egyetlen alkalommal is, egy bizonyos ponton túl lehetetlennek tekintjük. Elméletileg meg kell persze engedni, hogy még mindig van egy nullától különböző esély a hibára; de a gyakorlatban ezen e ponton egy aktuális döntéshez érkezünk a fizikai vagy a természettudományos elméletek statisztikus kijelentéseinek tapasztalati helyességére vonatkozóan. Ezen a ponton végül elérjük azt a határt, amely eredeti programunk kivihetőségét illeti, azt ti., hogy egyedi szubjektív várakozásainkat racionálisan objektiváljuk.”

A nagy számok törvényei

Definíció. Az (Ω, Σ, p) valószínűségi mértéktéren véletlen változók egy $f_1, f_2 \ldots$ sorozata egy f véletlen változóhoz *valószínűségi értelemben konvergál*, jelöléssel $f_i \xrightarrow{p} f$, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számra

$$\lim_{n\to\infty} p(|f_n - f| \leqslant \varepsilon) = 1;$$

illetve *majdnem biztosan konvergál*, jelöléssel $f_i \xrightarrow{m.b.} f$, ha

$$p(\lim_{n\to\infty} f_n = f) = 1.$$

A nagy számok gyenge törvénye

Tétel. Legyen (Ω, Σ, p) valószínűségi mértéktér, és legyen $f_1, f_2 \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változók egy végtelen sorozata, ahol a véletlen változók várható értéke és szórása minden i-re $Exp(f_i) = m$ és $Var(f_i) = \sigma$. Ekkor az

$$s_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_n$$

összeg mint véletlen változó valószínűségi értelemben konvergál a közös várható értékhez, azaz $s_n \xrightarrow{p} m$.

- Bernoulli-tétel, 1713

A nagy számok erős törvénye

Tétel. Legyen (Ω, Σ, p) valószínűségi mértéktér, és legyen $f_1, f_2 \ldots$ független és azonos eloszlású véletlen változók egy végtelen sorozata, ahol a véletlen változók várható értéke minden i-re $Exp(f_i) = m$, és minden véletlen változó véges negyedik momentummal rendelkezik. Ekkor az

$$s_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_n$$

összeg majdnem biztosan konvergál a közös várható értékhez, azaz $s_n \xrightarrow{m.b.} m$.

- Borel *normál szám*-tétele, 1909

Bernoulli-tétel karakterisztikus függvényekre

Szorzatmértéktér: $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma^{\mathbb{N}}, p^{\mathbb{N}})$

Karakterisztikus függvények: $\chi_j^a(\times_{i\in\mathbb{N}} x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_j \in a \\ 0, & \text{ha } x_j \notin a \end{cases}$

Ezek függetlenek, azonos eloszlásúak, ezért alkalmazható rájuk a Bernoulli-tétel:

$$\lim_{n\to\infty} p^{\mathbb{N}}(|\chi_n^a - p(a)| \leqslant \varepsilon) = 1$$

ahol

$$\chi_n^a \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_j^a$$

Bernoulli-tétel karakterisztikus függvényekre

Szorzatmértéktér: $(\Omega^{\mathbb{N}}, \Sigma^{\mathbb{N}}, p^{\mathbb{N}})$

Karakterisztikus függvények: $\chi_j^a(\times_{i\in\mathbb{N}} x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_j \in a \\ 0, & \text{ha } x_j \notin a \end{cases}$

Ezek függetlenek, azonos eloszlásúak, ezért alkalmazható rájuk a Bernoulli-tétel:

$$\lim_{n\to\infty} p^{\mathbb{N}}(|\chi_n^a - p(a)| \leqslant \varepsilon) = 1$$

ahol

$$\chi_n^a \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_j^a$$

Pauli stratégiája

Probléma: A $p^{\mathbb{N}}$ miatt „az állítás nem egy határértékről szóló állítás”. Vagyis a valószínűség nem vezethető vissza a relatív gyakoriságra.

Stratégia: Eliminájuk valahogyan $p^{\mathbb{N}}$-t, hogy a körkörösséget megszüntessük!

- Matematikailag nyilván nem lehet!
- **Pauli stratégiája:** „a tudós gyakorlati attitüdjére vonatkozó szabály[ ], amely számításba veszi azt a szubjektív faktort is, hogy egy nagyon valószínűtlen egyedi esemény realizációját, akár csak egyetlen alkalommal is, egy bizonyos ponton túl lehetetlennek tekintjük.”

Cournot-szabály

Cournot-szabály: ha egy esemény valószínűsége közel van 1-hez, akkor az esemény *gyakorlati szempontból* biztosan bekövetkezik, ha pedig közel van 0-hoz, akkor *gyakorlati szempontból* biztosan nem következik be. Vagyis a valószínűséget két kitüntetett esetben *gyakorlatilag* azonosíthatjuk a bekövetkezéssel: ha $p(a) \approx 1$ és ha $p(a) \approx 0$.

Kolmogorov: „Ha $p(a)$ nagyon kicsi, akkor gyakorlatilag biztos, hogy a $\mathfrak{S}$ feltételek egyszeri megvalósításakor az a esemény nem fog bekövetkezni.”

A valószínűség interpretációi

- **Objektív valószínűség:** A valószínűség a külvilág eseményeinek tulajdonsága.
  - relatív gyakoriság-interpretáció (von Mises)
  - *propensity*-interpretáció (Popper)
- **Szubjektív valószínűség:** A valószínűség egy a külvilág eseményeire vonatkozó intencionális elmeállapot tulajdonsága.
  - klasszikus interpretáció (Laplace)
  - szubjektív-interpretáció (de Finetti)
- **Logikai valószínűség:** A valószínűség egy a külvilág eseményei közötti logikai viszony.
  - logikai interpretáció (Carnap)

A Bernoulli-tétel fizikai jelentése

Relatív gyakoriság-interpretáció: az olyan sorozatok sorozatainak relatív gyakorisága, amelyekben a sorozat kezdőszeletéből számított relatív gyakoriságok egy adott értéknél kevésbé térnek el az aszimptotikus relatív gyakoriságoktól, a kezdőszelet hosszával 1-hez tart.

***Propensity*-interpretáció:** ha egy adott esemény p mértékben hajlamos bekövetkezni, akkor (feltételezve a hajlamok függetlenségét) események egy olyan végtelen sorozatának, amelyben a relatív gyakoriság megegyezik p-vel, 1 lesz a bekövetkezési hajlama.

A Bernoulli-tétel fizikai jelentése

Szubjektív interpretáció: ha az empirikus/racionális hívő egy adott eseményben p mértékben hisz, akkor (ismét csak feltéve a függetlenség által modellezett fizikai feltételek fennállását) határértékben teljes mértékben fog hinni abban, hogy az események relatív gyakorisága egy végtelen sorozatban p.

A Bernoulli-tétel mindhárom értelmezéssel kompatibilis.

- A nagy számok törvényei matematikai tételek, és így teljes mértékben érzéketlenek az interpretációkra.
- A fenti állítások empirikus állítások: vagy igazak vagy hamisak.

A Bernoulli-tétel fizikai jelentése

Cournot-szabály: ha a Bernoulli-tételben szereplő p-t relatív gyakoriságként/racionális hitként/hajlamként interpretáltuk, akkor a $p^{\mathbb{N}}$ szorzatmértéket is kénytelenek leszünk relatív gyakoriságként/racionális hitként/hajlamként interpretálni.

- p: relatív gyakoriság $\longrightarrow$ $p^{\mathbb{N}}$: sorozatok sorozatainak relatív gyakorisága
- p: hajlam $\longrightarrow$ $p^{\mathbb{N}}$: hajlam
- p: racionális hit $\longrightarrow$ $p^{\mathbb{N}}$: racionális hit

Összefoglalás

A nagy számok törvényének fizikai interpretációjától nem vezet út a leválasztott megfigyelő kritikájához.

Ettől persze a kvantumelmélet koppenhágai értelmezésére építő érvek még konkluzívek lehetnek.

Irodalom

- Pauli, W. (1954). "Probability and physics," *Dialectica*, **8**, 112-124; reprinted in Ch. P. Enz, K. v. Meyer (eds.) *Writings on Physics and Philosophy*, Springer, 43-48.
- Szabó Gábor (2011). *A valószínűség interpretációi*, (előkészületben).