A görög matematika

Jegyzet Kutrovátz Gábor előadásai alapján

Készítették: Laczkó Ágnes és Tamaga István

1. előadás

Miért fontos a matematika története?

- mikor, hogyan alakultak ki a fogalmak;
- történész nézőpontja: A történelem része a régebbi matematika. Más részét tartja fontosnak, mint egy matematikus.
- matematikus nézőpontja: „Mi az, ami megelőlegezi az én tudásomat?”
- görögök: Geometriai nézetbe akarják helyezni az algebrát. Az algebrai tudást Mezopotámiából vették át.
- Szabó Árpád magyar világszínvonalú tudománytörténész szerint a görögök geometriát csináltak, és nem geometriába burkolt algebrát.
- Mezopotámia: rutinszerű receptek alakultak ki.

Miért pont a görög matematika?

Eukleidész: Elemek (Sztoikheia)

- kb. i.e. 300
- a korabeli matematikai tudás összegzése és rendszerezése
- 467 matematikai tétel
- kb. a 17. századig a nyugati matematikai tradíció mintaképe, a legtöbbet tanulmányozott és oktatott matematikai mű

Kilenc fejezet a matematikáról (Jiuzang Szuansu) (Kína)

- kb. i.e. 250-150 (+ későbbi betoldások)
- a korabeli matematikai tudás összegzése
- 246 matematikai probléma
- kb. a 16. századig (nyugati tudomány hatása) a legalapvetőbb matematikai kézikönyv, ebből tanulnak a kereskedők, hivatalnokok, stb. matekot

Feladat:
Hasonlítsd össze a két fontos matematikai mű egy-egy „véletlenszerűen” kiválasztott problémáját! Miben látod a legfontosabb hasonlóságokat és különbségeket?

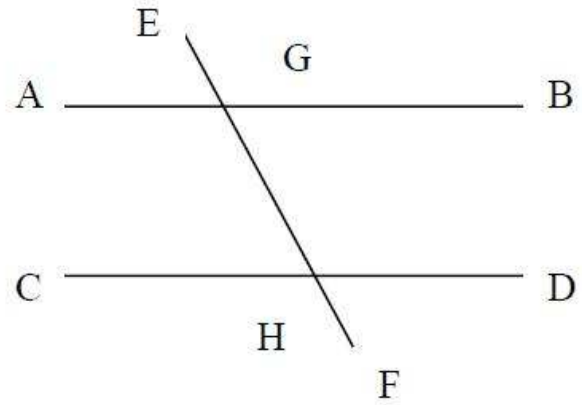
9 fejezet I. 28.

Kérdés: Adott egy újabb trapéz alakú mező. A merőleges szélesség 65 bu. Az egyik oldal 100 bu, a másik 72 bu. Mekkora a területe?
Válasz: 23 mu és 70 bu-négyzet.
Módszer: Add össze a két oldalt és oszd el az összeget kettővel. Ezt szorozd meg a merőleges szélességgel. Másképpen, szorozd össze a merőleges magasság felét és a két oldal összegét. A szokásos módon váltsd át mura.

(Megjegyzés: A „Módszer” általában hiányzik. Az I. könyv 38 problémája közül 14 esetén van megadva.)

Elemek I. 28.

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.



Messen ugyanis két egyenest, AB-t és CD-t, egy EF egyenes úgy, hogy a szemközti GHD belső szöggel egyenlő EGB külső szög keletkezzék, vagy az ugyanazon az oldalon keletkező BGH és GHD belső szögek (együtt) két derékszöggel legyenek egyenlők. Azt állítom, hogy AB párhuzamos CD-vel. Minthogy ugyanis az EGB szög egyenlő GHD-vel, az EGB szög pedig AGH-val egyenlő (I. 15), így az AGH szög is egyenlő GHD-vel (Ax. 1). És váltószögek, AB párhuzamos tehát CD-vel (I. 27).
Másrészt, minthogy BGH és GHD (együtt) két derékszöggel egyenlő, és AGH meg BGH is két derékszöggel egyenlő (I. 13), AGH meg BGH egyenlő BGH meg GHD-vel (Ax. 1). Vonjuk le a közös BGH-t, így a maradék AGH egyenlő a maradék GHD-vel (Ax. 3). És váltószögek, AB párhuzamos tehát CD-veI (I. 27).
Ha tehát két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy az ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos. Éppen ezt kellett megmutatni.

Mi a különbség és hasonlóság a két mű között?

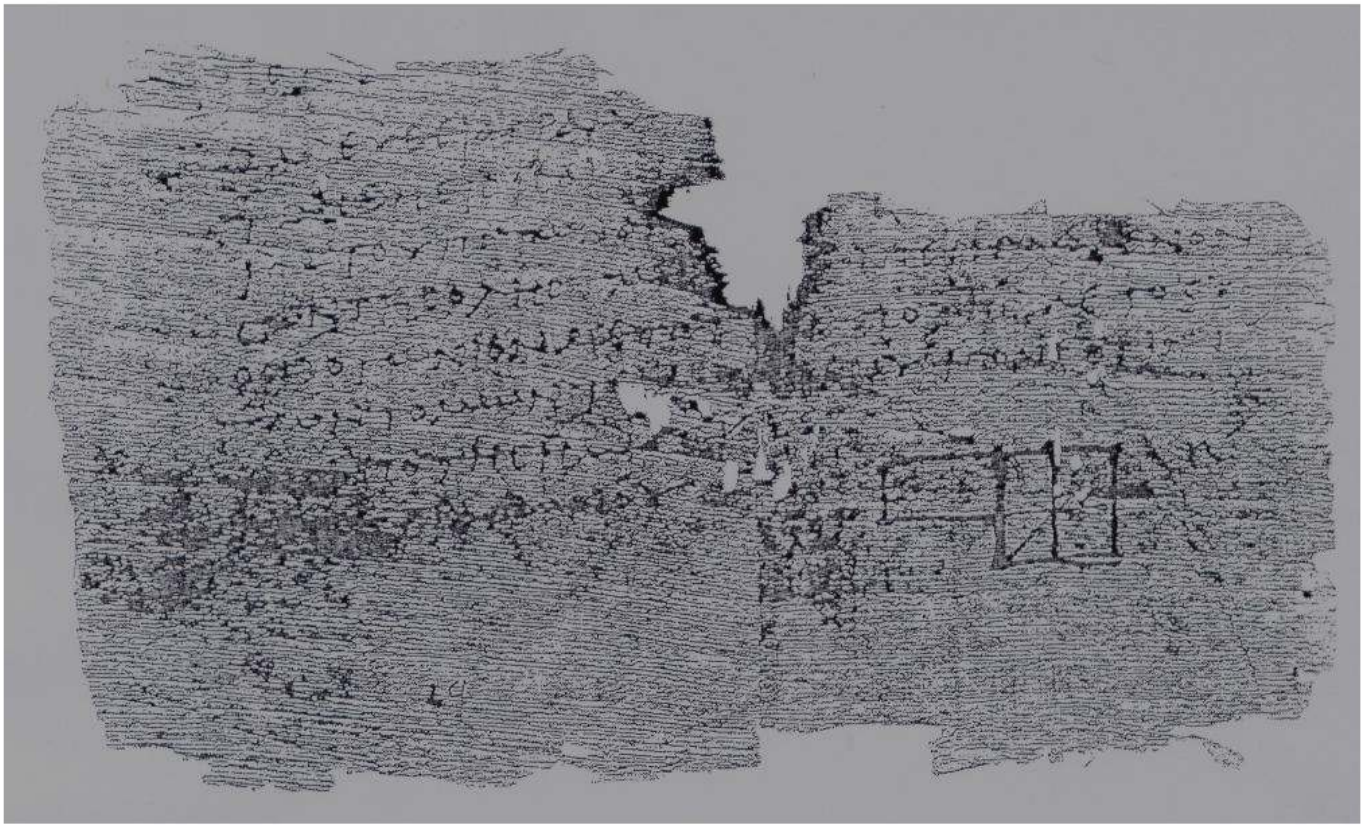
- az egyik csak menetet ad, míg a másik elmagyaráz (görög)
- van ábra, ami segít megérteni
- a kínai kiszámolja, vannak számok, míg a görög nem számol
- a kínai gyakorlatias problémákat ír, a görög eltér ettől
- a görögöknél hivatkoznak más fejezetekre, a kínainál is van említés, de nem hivatkozik
- a görög matematika axiomatikus
- a kínai tipikus a többi kultúrában felmerülő kérdésekkel, amire hasonló választ adnak (pedig egymással nem kommunikáltak)
- A görög tisztán bizonyító matematika: kisebb látható dolgokat is bizonyít (pl.: az átmérő metszi a kör középpontját). Elemek: az első görögöknél fennmaradt teljes könyv.
- előbb-utóbb a matematikának bizonyítóvá kellett válni. A görögök találták ki ezt.
- A görögök óta csak a 19. században lettek újból ilyen bizonyító művek, amik szigorúbb bizonyításokká váltak. De még akkor sem voltak axiómák.

- Az első axiómák a 19. sz. végén lettek.
- 20. sz. első felében minden matematikai dolgot axiomatikussá kellett tenni.
- Eukleidész óta senki sem alkalmazta az axiomatikus matematikát, annak ellenére, hogy felnéztek rá.
- görög: nem tartottak „isteni tiszteletűnek” egy művet (pl.: Egyiptomban a matematikai szövegeket Thot-hoz kapcsolták, így hitelességük kérdése fel sem merülhetett)
- Később csak az Elemeket tartották matematikának

Hogyan tudjuk a görög matematikáról, amit tudunk?

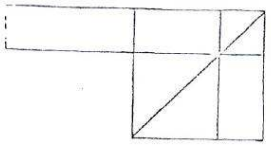
- a görögök papirusztekercsekre írtak, ami egy idő után elrohadt (két ókori tekercs maradt fenn Görögország területéről)

P. Oxy. i 29 (Oxyrhynchus Papyri)
– Eukleidész *Elemek*-jének II.5 tételét tartalmazó papirusz (Kr.u. 1-2. század, Egyiptom)



Az átirat:

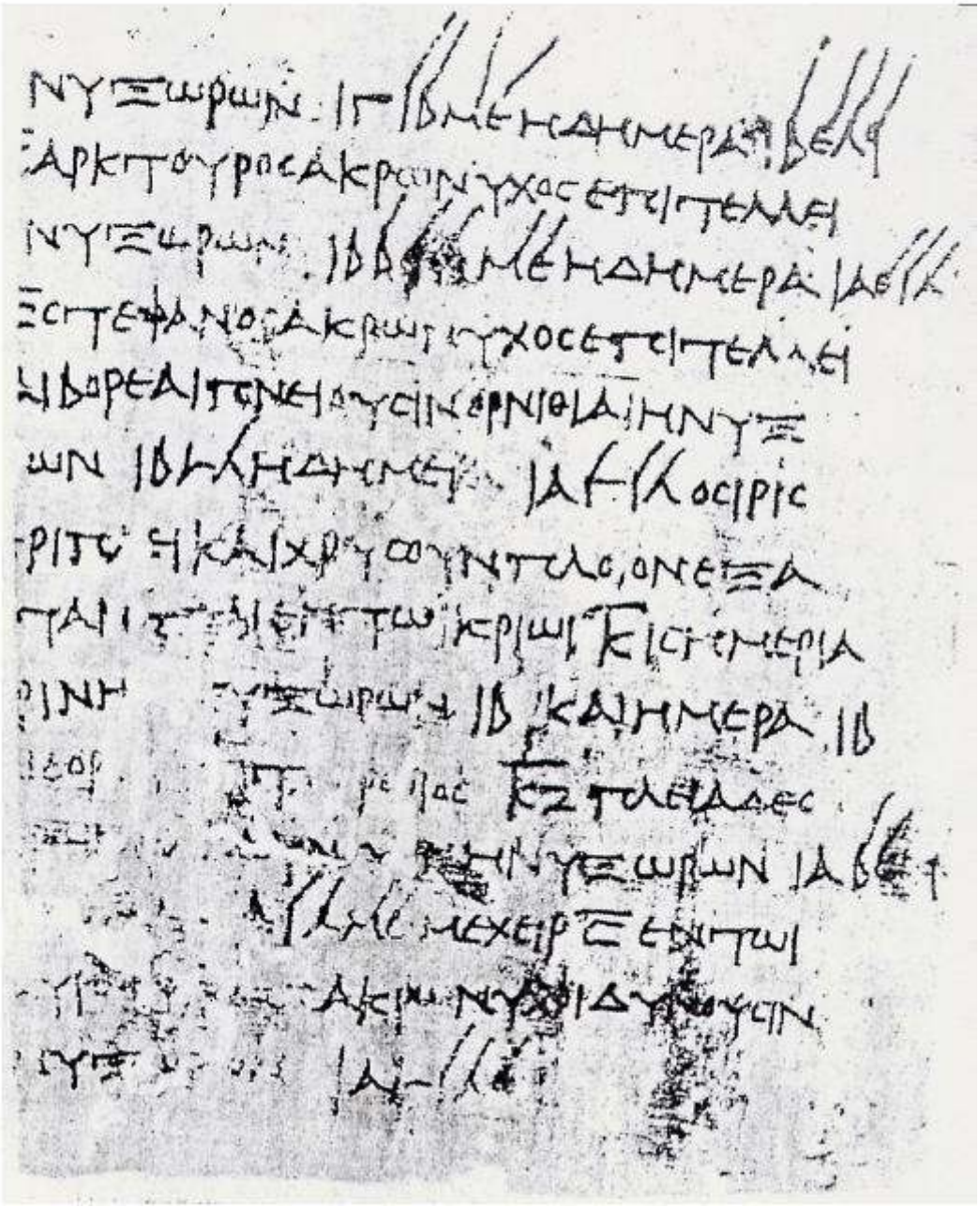
. . . . . .
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕ[ΝΩ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩ . . . . . .
Є ΕΑΝ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ
ΤΜΗΘΗ ΕΙC ΪCA ΚΑΙ ΑΝ [
ΪCA ΤΟ ΥΪΠΟ ΤΩΝ ΑΝΙ [
5 CΩΝ ΤΗC ΟΛΗC ΤΜΗΜ[ΑΤ]ΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΜΕΤΑ Τ[Ο]Υ ΑΠΟ ΤΗC ΜΕΤΟΞΥ
ΤΩΝ ΤΟΜΩΝ ΤΕΤ[ΡΑ]ΓΩΝΟΥ ΪCΟΝ ΕCΤΙΝ
ΤΩ ΑΠΟ ΤΗC ΗΜΙCΕΙ
ΑC ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ



Є

- Ellentétben Egyiptommal, ahol a szárazabb klíma miatt fennmaradtak (i. e. 2000-1200).
- Mezopotámiában agyagtáblára írtak, több ezer maradt fenn (túl sok is).
- A görög kultúra (így a matematika is) Nagy Sándornak köszönhetően megjelent Egyiptomban, és meg is maradt.
- i. e. 300 körül: Egy múmia mellett feltehetően legrégebbi, eredeti formában maradt fenn egy görög tudományos szöveg részlete a naptárszámítással kapcsolatosan. Nincs szóköz, írásjel, kis- és nagybetű. Alfabetikus számírást használtak, azaz az Abc-t használták és felülvonással jelölték a számokat.

P. Hib. i 27 (Hibeh Papyri)
– a feltehetőleg legrégebbi eredetiben fennmaradt görög tudományos szöveg egy részlete (Egyiptom, Kr.e. 300 körül)



A szöveg modern átirata:

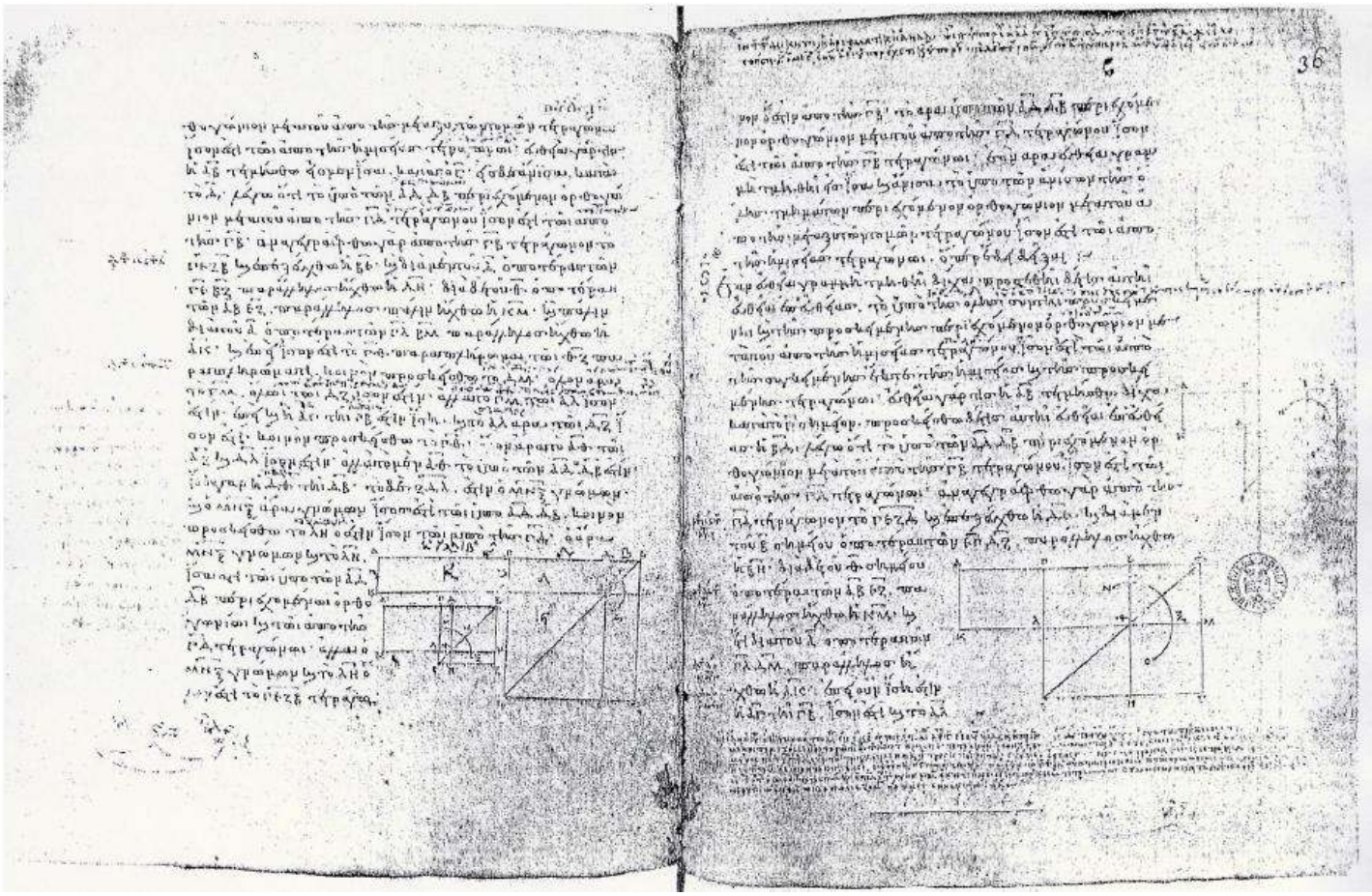
55 [ἡ] νὺξ ὡρῶν ιγί̇β̇μ̇ε̇, ἡ δ̇ ἡμέρα ιβ̇ε̇λ̇ϛ̇.
[ι]ϛ̣ Ἀρκτοῦρος ἀκρώνυχος ἐπιτέλλει,
[ἡ] νὺξ ὡρῶν ιββ̇ι̇ε̇μ̇ε̇, ἡ δ̇ ἡμέρα ιαθ̇ί̇λ̇.
[κ]ϛ Στέφανος ἀκρώνυχος ἐπιτέλλει
[κ]αὶ βορέαι πνείουσιν ὀρνιθίαι, ἡ νὺξ
60 [ὡρ]ῶν ιβ∠λ̇, ἡ δ̇ ἡμέρα ιαγ̇ί̇λ̇. Ὀσῖρις
[π]εριπλεῖ καὶ χρυσοῦν πλοῖον ἐξά-
[γε]ται. Τῦβι ⟨ε⟩ ἐν τῶι Κριῶι. κ ἰσημερία
[ἐα]ρινή, [ἡ] νὺξ ὡρῶν ιβ καὶ ἡμέρα ιβ,
[κ]αὶ ἑορ[τ]ὴ Φ̣ι̣τ̣ω̣ρώιος. κζ Πλειάδες
65 [ἀκ]ρώνυχ[οι] δύνου[σ]ιν, ἡ νὺξ ὡρῶν ιαβ̇ϛ̇ϛ̇,
[ἡ] δ̇ ἡμέρα [ι]βί̇λ̇μ̇ε̇. Μεχεὶρ ϛ ἐν τῶι
[Τ]αύρωι. Ὑάδες ἀκρώνυχοι δύνουσιν,
[ἡ] νὺξ ὡρῶν ια∠ί̇λ̇ε̇,

Az angol fordítás:

55 The night is 13 12′ 45′ hours, the day 10 3″ 5′ 30′ 90′.
56 16th, Arcturus rises in the evening,
57 the night is 12 3″ 15′ 45′ hours, the day 11 9′ 10′ 30′.
58 26th, Corona rises in the evening,
59 and the north winds blow which brings the birds, the night
60 is 12 2′ 30′ hours, the day 11 3′ 10′ 30′. Osiris
61 circumnavigates, and the golden boat is brought
62 out. Tybi 5th, the sun enters Aries. 20th, spring equinox,
63 the night is 12 hours, and the day 12 hours
64 and the feast of Phitorois. 27th, Pleiades
65 set in the evening, the night is 11 3″ 6′ 90′ hours,
66 the day 12 10′ 30′ 45′. Mechir 6th, the sun enters
67 Taurus. Hyades set in the evening,
68 the night is 11 2′ 10′ 35′ hours, . . .

- i. u. 79. A Vezúv kitörése eltemetett egy városi könyvtárat, de megtalálták és konzerválták a dokumentumokat, melyekben utalások voltak az Elemek tartalmára.
- i. u. 888. Ha fontosnak tartottak egy művet, akkor lemásolták, ha nem, nem másolták le. (így az Elemek előtti matematikával kapcsolatos szövegek elvesztek).
- Az Elemeket másolták. Ha nem értette a szerzetes, hogy miről szól, rosszul is másolhatta. Ennek előnye, hogy a történészek tudják, hogy mit miről másolhattak. Ha értették, előfordult, hogy belejavítottak (pl.: rövidebben írták le a bizonyítást, megváltoztatták a tételek sorrendjét). Több tudós is hivatkozott az Elemekre, innen is tudható, hogy ezek a másolatok abból valók.

Bodlei kézirat D'Orville 301, 35^{v} és 36^{r} oldalak
– az *Elemek* legrégebbről fennmaradt teljes példányából (Bizánc, Kr.u. 888), II.5 és II.6 tételek



- A középkorban előfordult, hogy régi pergameneket hasznosítottak újra úgy, hogy a régi szöveget lemosták róla. Pl.: a 13. században egy szerzetes újrahasznosított egy 10. századi pergament, melyről később kiderült, hogy Archimédesztől való a mű. Mivel az eredeti szöveg mélyen belekarcolódott, sikerült elolvasni. Ez a pergamen az első világháborúban eltűnt. Nem rég találták meg (100 éves történet).

2. előadás

Hogyan írtak a görögök számokat?

Két számírási rendszer, melyek egymást követték időben:

- Attikai számírás – alfabetikus számírás: az Abc betűivel jelölik a számokat:
  I=1; Γ=5; Δ=10; H=100; X= 1000; M=10000.
  I. e. 9-5. sz. között használták a fejlett matematikai kultúra előtt. (Ezelőtt nincs írásos emlék.)
- Ión számírás:
  I. e. 5. századtól;
  1-9: a görög Abc 9 első betűje:
  α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, ϑ
  10-90:
  ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ
  100-900:
  ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ
  1000-9000: eléteszünk egy vesszőt
  ,α, ,β, ,γ, ,δ, ,ε, ,ς, ,ζ, ,η, ,θ
  M=10000

  pl.: 2009: $\overline{,\beta\vartheta}$

  Felülvonással jelölték, hogy számról van szó.

Probléma: Csak 10000-ig vannak számok?

- Csak matematikában, gazdaságban jött elő.
- pl.: 20000: $\overset{\beta}{M}$

  Így már 100 millióig tudtak számot írni, ennél nagyobb számokra nem volt szükség (a gyakorlatban). Archimédeszt ez zavarta. Elő is terjesztett egy újfajta számírást, de a görögök nem vették át.

Hogyan lehet műveleteket végezni?

- összeadni tudtak fejben
- a szorzás jele az επ. A módszer: 73x52=70x50+70x2+3x50+3x2. (nekünk azért könnyebb, mert kihasználjuk helyiértékes számírásunkat)
- egyiptomi módszer: felírták a könnyen kiszámítható többszörösüket és összeadták. pl.:

73	
7300	100
3650	50
146	2
3796	

- használtak abakuszt (meglepően gyorsan lehet vele számolni)
- elterjedt az arab számírás, ami már helyiértékes (az arabok átdolgozták az indiai módszert)
- algebristák → ← abacisták (századokon át tartott a vita, az algebristák győztek)
  arab számok — római számok + abakusz

- A görögöknél nem volt nulla. Nullára csak a helyiértékes számírásban van szükség az üres helyek jelölésére.
- Negatív számokra sem volt szükség. (Nem mondták, hogy -5 bárányom van.) Nulla helyett azt mondták, hogy nincs, negatív számok helyett pedig tartozásról beszéltek.
- 17. sz. Descartes
- Newton idejében vált elfogadottá a mínusz használata
- törtek: Már az Iliász említi a törteket. Nyelvileg léteztek törtek, de csak az egységtörtek voltak jellemzőek (pl: 1/2, 1/5). A törteket a mostanitól eltérően fordítva írták. A nevező volt felül, a számláló pedig alul (pl: a négynek a harmada). Törtvonalat nem használtak. (Később megfordul)

Babiloni számírás

- Nagy Sándor hódításai alatt
- Mezopotámia: csillagászat, mérések (ezekben voltak kiemelkedők)
- A babilóniai számrendszer 60-as. (a hatos és a tízes keveredése)

1: ▽ 10: ◁ (az írófevessző két vége ilyen nyomot hagyott az agyagtáblában)

1, 2, … 10, 20, …, 60

▽ ▽▽ ◁ ◁◁ ▽

- nem volt 0
- a kontextus határozta meg a számot (hogy 1 vagy 60 vagy 360)
- a görögök bevezetik a nullát, a babiloniak nem.
- kicsit távolabb írták a jeleket, ha nem egy számot jelölt.

pl.: 2: ▽▽ 61: ▽ ▽

- az 1/6-nak is ▽ volt a jele (6^{-1})

A görög matematika nyelve

- nem nagyon szerepelnek számok
- amíg nem vették át a babiloni szögmérést, a derékszög volt az egység
- általánosságban akartak fogalmazni
- amikor mi azt írjuk általánosságban, hogy a + b = b + a, az akkori görögök nem értenék, mivel ők alapból betűket írtak
- a logikában megjelentek a betűk változóként
- A pont: τό A = az alfa (τό semleges névelő) a pont szót (σημειοθ) kihagyja, a névelő neme mutatja, hogy pontról van szó (mivel a pont szó is semleges nemű)
- AB szakasz: $η^c$ AB (a $η^c$ nőnemű határozott névelő) a vonal/szakasz szó (γραμμη) kimarad.
- terület: ha téglalap: akkor τό AB =AB terület, ahol A és B a téglalap két átellenes csúcsa
- ABC szög (B a szög csúcsa) : $η^c$ $ν^c$πο τών ΑΒΓ (ahol $η^c$:névelő (itt kimarad a szög szó) $ν^c$πο = rajta τών: névelő (itt kimarad a pontokon szó) alfa, béta, gamma)
- a matematika szaknyelv, amit értettek, ha nem tanulták
- általában betartották az Abc sorrendet szakaszok, szögek megadásakor

- a görög szövegek hivatkoznak az ábrára. Előfordul olyan pontok említése, amelyeket nem adnak meg a szövegben, ilyenkor csak az ábra segít, lehetetlen csak szövegből rekonstruálni az ábrát.
- betű:
  - meghatározott;
  - részben meghatározott: tudjuk, hogy egy szakasz valamely végpontjáról van szó, de azt nem, hogy konkrétan melyikről.
  - meghatározatlan
  - változó meghatározottságú: egyre egyértelműbbé válik a feladat folyamán
- Pl: Elemek 13. könyv? 838 betű, 47% meghatározott, 8% részben meghatározott, 19% meghatározatlan, 25% változó meghatározottságú. Következmény: az ábra elengedhetetlen.
- Milyen sorrendben keletkezett az ábra, szöveg? Az ábra akkor keletkezett, amikor a szöveg már megvolt (van kivétel).
- A gondolatmenet megvolt korábban, rajzoltak egy ábrát, gyakoribb volt, hogy előbb a szövegbe vitték be a betűket, majd az ábrába (van kivétel).
- Hogyan oktattak?
  - fehér táblába karcoltak, majd újrafestették;
  - homoktábla: vízszintes keret, amiben nedvesített homok volt (gyakoribb)
- rögzítenek bizonyos jelentéseket (pl: a középpontra két szavuk van, de a matematikában csak egyet használtak)
- szűk nyelvezetű
- 783 szóból 74 különböző (Apolloniosz)
- 783 szóból 200 különböző (Arisztotelész)
- technikai nyelvet használtak a görögök
- A szöveg elemezhető formulák szempontjából. Már Homérosz is használt állandó kifejezéseket, amiket rengetegszer használ. A matematikában is vannak műveleti formák, bizonyítási módszerek, amiket nem változtatnak.

3. előadás

Thalész (i. e. 6. sz. eleje)

- ő foglalkozott először matematikával, csillagászattal… még politikával is
- Milétosz városában tevékenykedett
- az életéről kevés maradt fenn (1-2 oldalban összefoglalható)
- Platón és Arisztotelész utaltak rá: Platón szerint szórakozott volt, a csillagokat vizsgálta, de nem nézett a lába elé. Arisztotelész szerint szerény életet élt, nem törekedett pénzre, de megmutatta, hogy bölcsességből meg is lehet gazdagodni. Ezek a források nem tűntek megbízhatónak, mivel jóval Thalész halála után íródtak.
- Proklosz: Kommentárokat írt az Elemekhez, amelyben hivatkozik Thalészra
- Eudémosz (Arisztotelész volt a mestere) is hivatkozott Thalészra (ezek sem tekinthetők megbízható forrásnak)

Tételei:

- az átmérő felezi a kört
- egyenlőszárú háromszögek alapon fekvő szögei egyenlők
- csúcsszögek egyenlők
- ha két háromszögben egy oldal és a rajta fekvő két szög rendre egyenlő, akkor a két háromszög is egyenlő

- Tehát Thalész elsősorban síkgeometriával foglalkozott. A Thalész-tételt is neki tulajdonítják, bár egyesek Pithagorásszal kötik össze.
- Ekkor az állítások egyértelműbbek, mint a bizonyítások.
- görögül a bizonyítás szó megmutatást jelent
- Már ekkor kezd körvonalazódni, hogy egy tétel kimondásához már valamilyen előzőleg kimondott „tételek” kellenek (pl.: az Elemekben már található ilyen).
- olyan állításokat is bizonyít, amelyeket nem lenne fontos (mert látszik szemléletből)
- Mértant Egyiptomban tanult. A történet szerint megmutatta az egyiptomi papoknak, hogy hogyan lehet megmérni a piramis magasságát. Leszúrt egy botot, és amikor az árnyéka éppen olyan hosszú volt, mint a bot, akkor lemérték a piramis árnyékát (a gond az, hogy 45 fokos beesési szögnél a piramis árnyéka a piramis oldalára esik).
- Megjósolt egy napfogyatkozást (ezzel tudják beazonosítani, hogy mikor élhetett, mivel kiszámolva a napfogyatkozás i. e. 585-ben volt). Ugyancsak nem valószínű, hogy meg tudta volna jósolni, mivel ekkor még a csillagászat gyerekcipőben járt.
- Írt könyveket, de nincs róla semmilyen feljegyzés, utalás a tartalmára. Inkább szóban tanított.

Püthagorász és a püthagoreusok (i. e. 5. sz. eleje)

- Azon a területen született, mint Thalész
- Politikai kört hozott létre, de tanait hamar beszüntették. Üldözték, ezért Dél-Itáliába menekült.

Püthagoreusok

- vicces embereknek állítják be őket, mert fehér csuklyás ruhában jártak (Platón már komolyan vette őket)
- Vallási szektát alapítottak, mely két részből állt. A külső körben lévők csak hallgatták a tanításokat. A belső kör tagjai a tanítványok voltak, akik együtt éltek, szigorú életvitelt folytattak Püthagorász vezetésével.
- hittek a lélekvándorlásban (ember-állat között is)
- Hippaszosz, a külső kör vezetője írt egy könyvet, melyben leleplezte a püthagoreusok titkait. Így felszámolták a szektát. (Hippaszosznak bosszúból életében sírt építettek, hogy megátkozzák. Erre rövidesen Hippaszosz hajója elsüllyedt.)
- Ők is kutatták az arkhét (=kezdet), a világ alapelvét. Kis-Ázsiában ezt valamilyen anyaggal azonosították, míg a pithagoreusok úgy gondolták, hogy ez a szám.
- A Püthagorász-tételt nagy becsben tartották. Az Elemek első könyvének zárótételei a Pithagorász-tétel és a megfordítása (47-48 tétel). Egyesek szerint a tétel nem is Püthagorásztól van. A feljegyzés szerint a tétel megalkotása után Pithagorász ökröt (máshol bikát) áldozott megköszönve az isteneknek. Azonban püthagoreushoz híven ő nem ölhetett (ehetett) meg állatot (mivel hittek az emberek-állatok közti lélekvándorlásban).
- Foglalkoztak szabályos sokszögekkel (Elemek IV), testekkel (Elemek XIII) is.
- Az ötszögben az átlók aranymetszésben (Elemek XIII) metszik egymást. A szabályos ötszöget titkosan használták a szekta tagjai, mint szimbólum, mivel ők meg tudták szerkeszteni. (Gauss: azon szabályos prím sokszögeket lehet megszerkeszteni, amelyek oldalszáma Fermat-prím)
- Szabályos sokszögeket írtak a gömbbe és így megkapták a tetraédert, ikozaédert, dodekaédert. Térszögekkel számoltak. (Elemek XIV-XV ez már utólag került bele.)

Platón

- Timaiosz c. művében ír a világ keletkezéséről. Ő nem számokra, hanem geometriai alakzatokra vezeti vissza.
- Kitüntetett alakzatok: az egyenlőszárú derékszögű háromszög és a 90, 60, 30 fokos háromszög. Ebből állnak össze a testek: kocka, tetraéder, oktaéder, ikozaéder. Ezekből építette fel a világot. A legmasszívabb a kocka, több kocka szépen megáll egymáson. Tehát a kocka a föld. A tetraéder hegyes, szúr, tehát az a tűz. Az ikozaéder a víz, mivel nagyon hasonlít a cseppekre. Így a levegő az oktaéder, mivel nehezebb, mint a víz, vagy a föld.
- Csak egymásba tudnak alakulni. Ha a víz szétesik, lesz belőle két tűz és egy levegő. 2 tűz=1 levegő, mivel 2 tűz = 2 tetraéder = 8 szabályos háromszög = oktaéder= levegő.
- Voltak püthagoreusi gondolatai

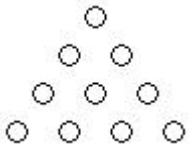
Kepler

- egyes gömbök közé milyen testek írhatók? A bolygók közé (6 db) 5 szabályos test írható (Isten szándékosan így teremtette a világot).
- püthagoreusi hívő volt

4. előadás

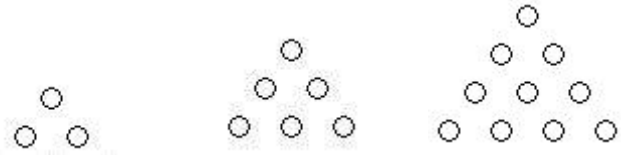
Pithagoreusok aritmetikája

- túlnyomórészt geometria, csak néhány tiszta aritmetikai kérdéssel foglalkoztak
- az Elemekben is előfordulnak tisztán aritmetikai tételek
- Euklidesz után már nem foglalkoztak vele
- később Diophantosz visszatér rá
- a világ alapja (Arkhé): a pithagoreusok szerint a szám.
- összefüggésben áll a számmisztikával
- Bevezetés az aritmetikába c. új pithagoreus könyv
- mindegyik számnak megvan a maga jelentése: 1=világ, 2=férfi, 3=nő, 5=(2+3)=házasság
- legszentebb szám: 10. – szent tetraktüsz:

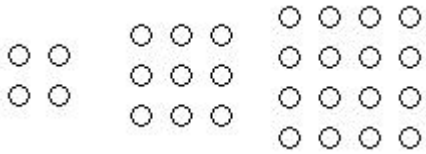


  - első 4 szám összege
  - 1 pont
  - 2 egyenes
  - 3 sík
  - 4 tér
  - oktáv, kvart, … is kifejezhető
  - 10-es számrendszert használtak
  - próbáltak mindenből tízet csinálni: pl.: 10 ellenpárt alkottak:

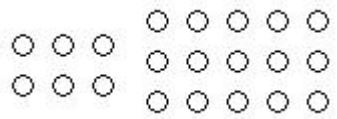
  jó-rossz
  négyzet-téglalap
  egyenlő-nem egyenlő
  görbe-egyenes
  egy-sok
  határ-határtalan
  páros-páratlan stb.
  10 bolygó: a világegyetem közepén a Föld áll, de a pithagoreusok szerint a Föld nem méltó erre, így szerintük a közepén valamilyen tűz áll. Hogy meglegyen a 10, úgy gondolták, hogy a tűz másik oldalán áll az Ellenföld (Arisztotelész leírása szerint).
- kavics aritmetika – figurális számok (alakzatba rakták ki a számokat)
- források:
  -Arisztotelész: Minden dolognak megvan a száma, minden számnak megvan az alakja.
  - egy drámában: Ha elveszünk egy kavicsot párosból páratlant, páratlanból párosat csinálunk.
  -Bevezetés az aritmetikába
- háromszögszámok pl.:



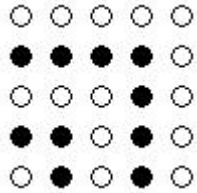
- négyzetszámok pl.:



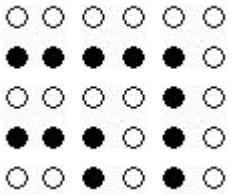
- téglalapszámok pl.:



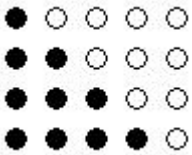
- összefüggéseket állapítottak meg:
  - az első n páratlan szám összege= n^2



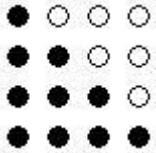
  - az első n páros szám összege=n(n+1)



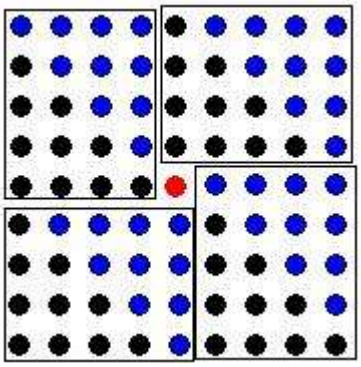
  - az első n szám összege=n(n+1)/2



  - volt ötszögszám és hatszögszám is
  - két egymást követő háromszögszám összege négyzetszám



  - 8*háromszögszám+1=négyzetszám



- Az Elemek 7-8-9. könyve foglalkozik aritmetikával:
  -n*m síkszám (~téglalapszám, 7. könyv)
  -r*n*m térszám
  - sík-, térszám hasonló, ha oldalaik arányosak

Hogyan nézett ki az aritmetika?

- 23 definíció
  -7/1: egység
  -7/2: szám=egységekből összetevődő sokaság
  -9. b/a=d/c => c/a=d/b
  -15. a/1=c/b => b/1=c/a
  -a 0 és a negatív számok nem számok
  -Nem használják a végtelen kifejezést. Azt mondják: „sokaságától is több van”
  -1 a legkisebb szám
  -nem lehet az egységet kisebb részekre törni

- páros=kettébontható
- páratlan=ketté nem bontható
- 9/21 tétel: bármennyi páros számot adunk össze, párosat kapunk
- 9/21-36: „páros és páratlan tana”
- 9/36: ha 2^{n+1}-1 prím, akkor $(2^{n+1}-1)2^n$ tökéletes szám
- ezek a tételek utólag kerültek az Elemekbe
- 7/23: tökéletes szám (=osztóinak összege egyenlő a számmal) pl.: 6. Szent Ágoston szerint éppen ezért az sem véletlen, hogy Isten 6 nap alatt teremtette a világot. Ők a 6,28,496,8128 tökéletes számokat ismerték.
- 12. definíció: prímszám: csak az egységgel osztható.
- barátságos számpár: ha két szám egymás osztóinak összege

Mathémata

- (innen származik a matematika szavunk)
- pithagoreusok találták ki
- részei: aritmetika, geometria, csillagászat, zene.
- mindenki tanulta ezeket a középkorban

Zene

- Pithagorasz egy kovácsműhely mellett elmenve különböző magasságú hangokat hallott a kalapácsütésekben. Rájött, hogy a hangok magassága a kalapács fejének nagyságától függ. Otthon kiakasztott a falra azonos hosszú, vastagságú húrokra súlyokat, melyek tömegének aránya: 12:9:8:6 volt.
  -oktáv: 12-6
  -kvint: 9-6
  -kvart: 8-6
- De függhet a húrok hosszától is. Monochord: egy kifeszített húr, melyet le lehet fogni (pl.: a felénél lefogva oktávot kapunk). Később felosztották, ezzel több lefogási lehetőséget alkotva. Ez lett a kánon.
- Euklidesz: A kánon metszése: arány és zeneelméleti mű
- arány: logosz (többjelentésű szó)
- aránypár: analógia
- kvint + kvart = oktáv 3/2*4/3=2/1 Hogy lehet az, hogy ami a zenében összeadás, az a matematikában szorzás? Bevezettek közepeket:
  -számtani közép
  -harmonikus közép
  -„mértani közép” a görögök középarányos számnak nevezték. Nem mindig lehet kiszámolni.
  -speciális középarányos: egész-része között fennálló arány. Aranymetszés. Mindkét arány geometriailag megoldható bármely számokkal.
  -Minden szám kifejezhető arányból (de ez nem igaz).

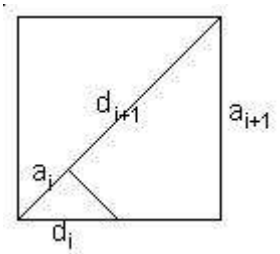
5. előadás

Irracionalitás

- A legenda szerint Hépatészosz írt egy könyvet arról, hogy vannak olyan viszonyok, amiket nem lehet számokkal leírni (ami titok volt a pithagoreusok között).
- Át kell vinni geometriába: pl.: arányok: mértani közép gyakran kivezet a számok köréből. Az aranymetszés mindig kivezet a számok köréből.
- Megoldás lehet, ha átvisszük geometriába.
- Platón: Kapcsolatban állt a pithagoreusokkal, akik hittek a lélekvándorlásban. Azt gondolja, hogy amit tanulunk, azt már korábban mind tudtuk, így csak vissza kell emlékeznünk. Szerinte van olyan állapot, amikor csak a lélek létezik, és mindent tud, és amikor testet kap, megtanul látni, hallani….stb. Szókratész próbálja bizonyítani ezt.
- Nem tudjuk pontosan, hogy hogyan fedezték fel az irracionalitást. Váltakozva kivonás módszere (Euklideszi algoritmus a legnagyobb közös osztó megtalálására). Négyzet átlója összemérhetetlen az oldalával (Elemek X. könyv). Összemérhetetlen az ötszög átlója az oldalával (aranymetszés).

Bizonyítások

Bizonyítás a négyzet átlójának és oldalának összemérhetetlensége:
Kisebből indulunk és egyre nagyobbakat szerkesztünk.



$a_{i+1}=d_i+a_i$
$d_{i+1}=a_i+a_{i+i}=2a_i+d_i$
Legyen $a_1=1$ és $d_1=1$. Ekkor $d_i/a_i=1$

Így:	$a_2=2$	$d_2=3$	1,5
	$a_3=5$	$d_3=7$	1,4
	$a_4=12$	$d_4=17$	…
	…	…	… egyre jobban megközelítjük a √2-t.

Pithagorasz-tételt alkalmazva: $2a_i^2=d_i^2$
$2a_1^2=2=d_1^2+1$
$2a_2^2=6=d_2^2-1$
…

(Az ötszög oldalának és átlójának összemérhetetlenségének bizonyítása hasonlóan történik, itt az a_i és d_i-re a Fibonacci számokat kapjuk)

Indirekt bizonyítás a √2 irracionalitására:

Tegyük fel, hogy d/a=m/n relatív prímek.
Ekkor $2n^2=m^2$ innen következik, hogy m^2 páros, tehát m is páros, így n <u>páratlan</u>, mivel m és n relatív prímek. Ekkor $2m^2=(2r)^2$ innen $n^2=(2r)^2$ tehát n^2 <u>páros</u>, azaz n is. Ez pedig ellentmondás.

Indirekt bizonyítás

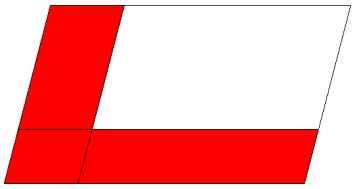
- a filozófiában is jelen volt
- Platónnál is felmerült
- P –ből következik az ellentmondás, tehát P nem igaz (¬P)
- ez nem bizonyítás, hanem cáfolás
- Tegyük fel, hogy ¬P-ből ellentmondás következik, ekkor ¬¬P igaz. (kizárt harmadik elve--- P∨¬P mindig igaz)
- ellentmondás lehet:
  -egymásnak ellentmondó (pl.: páros-páratlan)
  -már bizonyítottnak ellentmondó
  -végtelen regresszusra visszavezethető bizonyítás (pl: bármilyen számot oszt valamilyen prímszám VII. 31.)
- pl: - nem tudunk eljutni A-ból B-be: előbb az út felét tesszük meg, aztán a hátramaradó felét…. sosem érünk B-be, mivel végtelen a távolság, de véges az idő.
  -Akhilleusz és a teknős versenye: Akhilleusz előnyt ad a teknősnek. Mire A odaér, ahol a teknős van, addigra a teknős előre mozdul. Mire A a teknős új helyére érne, addigra a teknőc újra elmozdul… (Parmenidész)
  - Egy létező van. Tegyük fel, hogy két létező van. mi van a kettő között? Nem létező? Ez nem lehet. Tehát létező van köztünk. De ekkor ez már a harmadik. Ezt folytathatjuk. Nem lehetséges, hogy végtelen létező legyen, tehát csak egy létező van.
  - Van létező és nincs nem létező, vagy nincs létező és van nem létező? Tegyük fel, hogy a létező keletkezett. Miből? Ha létezőből keletkezett, akkor ez csak átalakulás. nem létezőből pedig nem keletkezhet semmi. tehát a létező nem keletkezett.

6. előadás

Elemek II. könyve – „geometriai algebra”

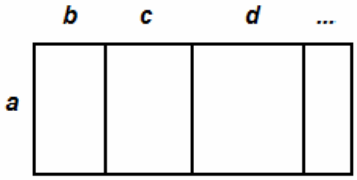
- mindent le akartak fordítani geometriai algebrára
- átvették a mezopotámiai algebrát

Gnómón



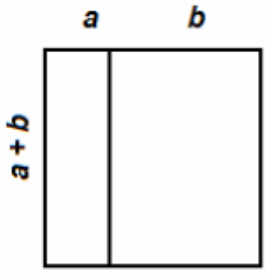
A gnómón számok L alakba rendezhető számok.

II.1. $a(b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots$

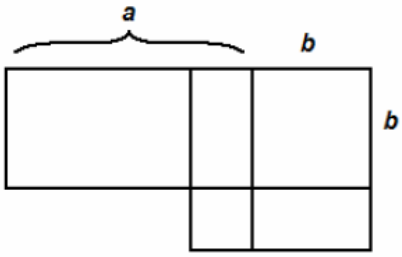


- szám= mennyiség, nagyság. Így jelölhetjük szakasszal (AB), téglalappal (AC – az átellenes pontok), esetleg téglatesttel.
- Kivonásnál csak nagyobból kisebbet.
- Az összeadás problémás lehet. Csak szakaszt szakasszal, síkidomot síkidommal. Az algebra ennél szabadabb. A szorzás is csak speciális esetekben értelmes (pl.: szakasz szakasszal= téglalap, szakasz téglalappal = test).
- A görögök megpróbáltak minden algebrai tudást geometriára ültetni. Sokszor ez nehézségekbe ütközött. A cél az volt, hogy az egyes eredmények geometriában ábrázolható legyen (ez kb. 17. századig fennállt).

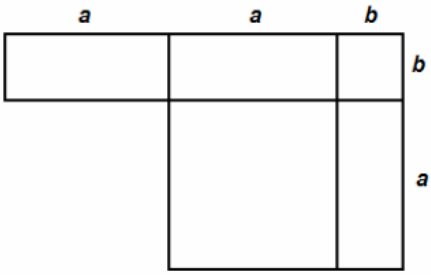
II.2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$



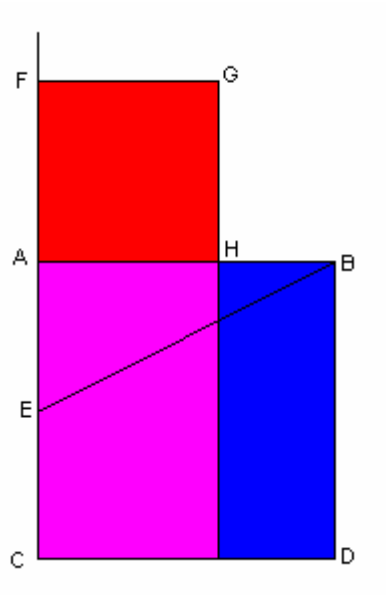
II.5. $ab + [\frac{1}{2}(a + b) - b]^2 = [\frac{1}{2}(a + b)]^2$



II.6. $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$



II.11. tétel



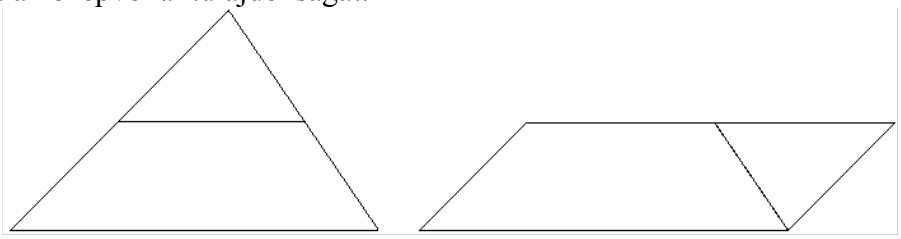
$(a+b)b=a^2$

Veszünk egy AB szakaszt, rajzolunk rá egy négyzetet. Az AC felezőpontja legyen E. Összekötjük E-t B-vel. Az EB távolságot rámérjük az AC oldalra E kezdőponttal, a végpont legyen F. AF-re négyzetet rajzolunk, mely AB-t H-ban metszi. Ekkor az összefüggésben (a+b)b a piros/lila színű terület, míg az a^2 a kék/lila. Az egyenletet átalakítva láthatjuk, hogy az AB szakaszt H aranymetszi.

Bizonyítás a 6. tétel segítségével.

14. tétel

Egyenes vonalú idomból szerkeszthetünk megegyező területű négyzetet.
Először felosztjuk az idomot háromszögekre, majd parallelogrammát készítünk előle felhasználva a középvonal tulajdonságát.

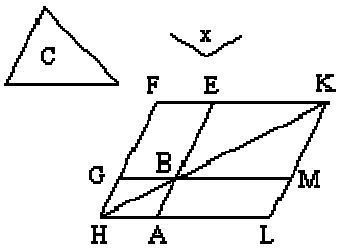


Aztán összeillesztjük a parallelogrammákat. Majd átdaraboljuk téglalappá, végül négyzetet készítünk.

I. 44. Tétel

„Illesszünk (megj_I_44_1) adott szakaszhoz adott háromszöggel egyenlő, adott egyenes vonalú szögű paralelogrammát!

Legyen AB az adott szakasz, C az adott háromszög, x pedig az adott egyenes vonalú szög. Az adott AB szakaszhoz kell tehát az adott C háromszöggel egyen-lő és x-el egyenlő szögű paralelogrammát hozzáilleszteni.



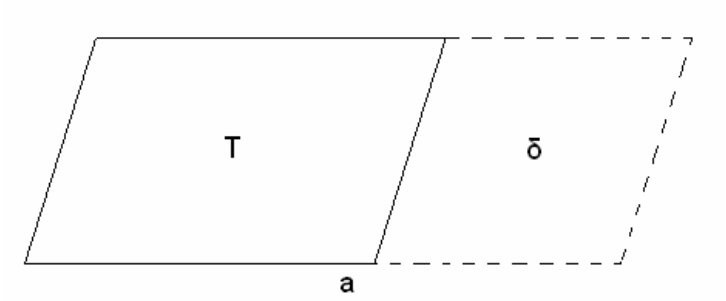
Szerkesszünk egy, a C háromszöggel egyenlő és az x-el egyenlő EBG szögű BEFG paralelogrammát (I_42), és úgy helyezzük el, hogy BE ugyanazon az egyenesen legyen, mint AB, (megj_I_44_2) és hosszabbítsuk meg FG-t H-ig, és A-n át a BG, EF egyenesekkel párhuzamosan húzzuk AH-t (I_31), és húzzuk meg HB-t. És mint hogy a párhuzamos AH-t és EF-et metszette át HF, így az AHF, HFE szögek összege két derékszöggel egyenlő (I_29). Tehát BHG és GFE (== HFE) összege kisebb, mint két derékszög (Ax_8); de az (együtt) két derékszögnél kisebb szögek irányába végtelenül meghoszabbított egyenesek találkoznak (P_5), tehát HB és EF meghosszabbítva találkozni fognak. Legyenek meghosszabbítva, és találkozzanak K-ban, és a K ponton át az EA, FH egyenesekkel párhuzamosan húzzuk KL-t (I_30, 31.), és hosszabbítsuk meg HA-t és BG-t az L, illetve M pontig.

HLKF tehát paralelogramma, HK pedig egy átlója, és AG, ME a HK melletti paralelogrammák, LB és BF pedig az úgynevezett paraplérómák; LB egyenlő tehát BF-fel (I_43). De BF a C háromszöggel egyenlő, tehát LB is egyenlő C-vel (Ax_1). És minthogy a GBE szög egyenlő ABM-mel (I_15), másrészt a GBE szög x-el egyenlő, az ABM szög is egyenlő az x szöggel (Ax_1).

Tehát az adott AB szakaszhoz az adott C háromszöggel egyenlő és x szöggel egyenlő ABM szögű paralelogrammát illesztettük. Éppen ezt kellett megtenni.”

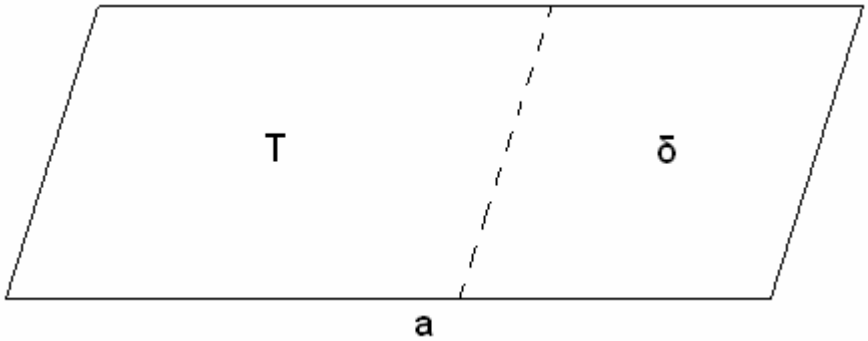
28. tétel Területillesztés többlettel

Adott egy a hossz, T terület és egy δ alakzat (parallelogramma). Szerkesszünk a-hoz egy T-vel egyező területű δ-hoz hasonló alakzatot. Ez egy másodfokú probléma. Ha téglalapokkal számolunk, olyan másodfokú problémát kapunk, melyben ott az ellipszis egyenlete.



29. tétel Területillesztés hiánnyal

Illesszünk egy adott szakaszhoz adott sokszöggel egyenlő paralelogrammát úgy, hogy egy adotthoz hasonló paralelogramma lógjon ki. Ennél a problémánál a hiperbolát kapjuk, mint másodfokú egyenlet.



7. előadás

Problémás szerkesztések:

- szögharmadolás
- kockakettőzés
- környégyszögesítés (Methón foglalkozott vele)

Megoldások:

Ezek problémák ismertek voltak, megjelentek a hétköznapokban is.

Antiphon (i. e. 5. század közepe)

- Athén megerősödött, a politika központjává vált, így ide áramlottak a világ minden pontjáról a tudósok, kereskedők, akik pénzért árulták a tudásukat. Athén intellektuális központ maradt akkor is, amikor gazdasága hanyatlott.

Kör négyszögesítése

Tegyük fel, hogy a kör egy nagyon sok oldalú sokszög. Azt tudjuk, hogy bármilyen sokszög átalakítható négyzetté, tehát a probléma megoldható. Ez nyilván rossz megoldás, mivel a sokszöget egyenes vonalak határolják, míg a kört görbe. Az elmélet azonban nem hasztalan. Ezt a módszert felhasználják később becslésekre. Pl.: Fibonacci 96 oldalú sokszögből közelítette a pí értékét.

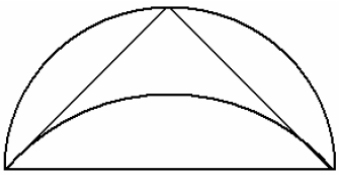
Hippokratész

- nem szofista
- kereskedőként érkezett Athénba, de ellopták mindenét
- filozófus-matematikusnak állt
- ő volt az „első”, aki Elemeket ír, és ő találta ki az indirekt bizonyítást (nem biztos)
- a környégyszögesítéssel is foglalkozott

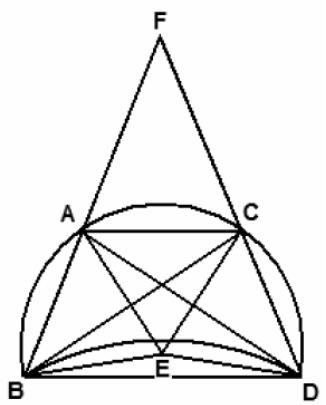
Hippokratész holdacskái (forrás)

(Szimplikiosz idézi Eudémoszt)

Miután ezt bebizonyította, azt is megmutatta, hogy lehetséges egy olyan holdacskát négyszögesíteni, melynek külső kerülete egy félkör. Ezt úgy érte el, hogy félkört írt egy egyenlőszárú derékszögű háromszög köré, és az alapra olyan körszeletet írt, amelyik hasonló az oldalak által levágottakhoz. Mivel az alapon fekvő körszelet egyenlő az oldalakon fekvők összegével, ezért ha a háromszögnek az alapon fekvő körszelet feletti részét mindkettőhöz hozzáadjuk, a holdacska egyenlő lesz a háromszöggel.
Így a hold, minthogy a háromszöggel egyenlőnek bizonyult, négyszögesíthető.
Feltéve tehát, hogy a holdacska külső kerülete a félkör, Hippokratész könnyedén négyszögesítette a holdacskát.

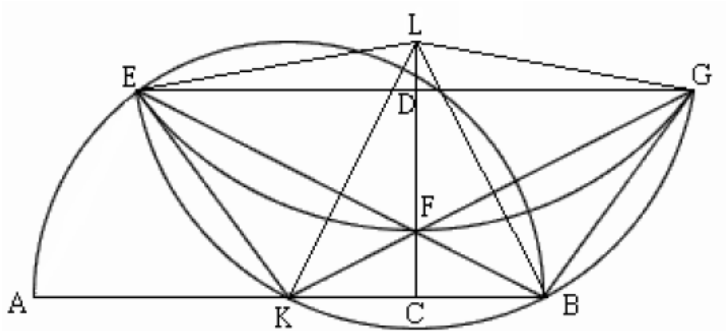


Ezek után egy olyan kerületet vett, amely nagyobb a félkörnél,



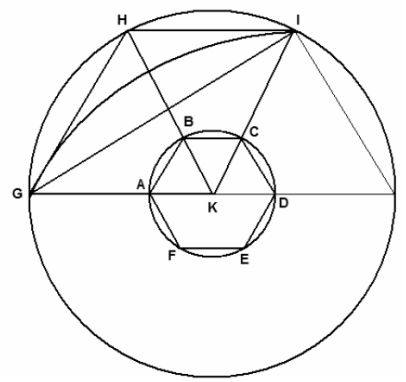
annak a trapéznak a segítségével, amelyben három oldal egyenlő, míg a párhuzamos oldalak közül a hosszabb akkora, hogy a rá emelt négyzet háromszorosa a többi oldalra emelt négyzeteknek, és ezt a trapézt foglalta körbe, majd legnagyobb oldalára olyan körszeletet írt, amelyik hasonló a többi oldal által a körből levágottakhoz. […]
Hogy az említett körszelet nagyobb a félkörnél, az világos abból, ha átlót húzunk a trapézba. Mivel az erre a két oldalt átfogó átlóra emelt négyzet nagyobb, mint a maradék oldalra emelt négyzet kétszerese.
Így a trapéz legnagyobb oldalára emelt négyzet kisebb, mint az átlóra emelt négyzetnek és a maradék, a legnagyobb oldal és az átló által átfogott oldalra emelt négyzetnek az összege.
Így a trapéz legnagyobb oldalára nyíló szög hegyesszög.
Így az a szelet, amelyik tartalmazza az említett szöget, nagyobb a félkörnél. És ez a körszelet adja a holdacska külső kerületét.
[A négyszögesítés menete nincs ismertetve, de ugyanaz, mint az előző esetben.]

Hippokratész egy olyan esetet is megoldott, ahol a külső kerület kisebb, mint a félkör, és az alábbi szerkesztést adta.



Rajzoljunk kört AB átmérővel, melynek középpontja legyen K.
Felezze CD a BK-t derékszögben, és az EF egyenes szakaszt úgy húzzuk be CD és a kerület közé, hogy B felé mutasson, míg a rá emelt négyzet legyen másfélszerese a sugárra emelt négyzetnek.
Húzzuk meg az AB-vel párhuzamos EG-t, és húzzunk K-ból egyenes szakaszokat E-be és F-be.
Az F-be húzott szakaszt hosszabbítsuk meg G-ig az EG szakaszon, és B-től is húzzunk egyenes szakaszokat F-ig és G-ig.
Ekkor nyilvánvaló, hogy BF meghosszabbítása át fog menni E-n, és BG egyenlő lesz EK-val. […]
Mivel ez így van, azt állítom, hogy az EKBG trapéz körbe írható.
Írjunk az EFG háromszög köré is egy körszeletet, ekkor világos, hogy az EF, FG körszeletek mindegyike hasonló lesz az EK, KB, BG körszeletek mindegyikéhez.
Ekkor az a holdacska, melynek EKGB a külső kerülete, egyenlő lesz azzal az egyenes vonalú alakzattal, amelyet a BFG, BFK és EKF háromszögek tesznek ki.
Ugyanis azok a körszeletek, amelyeket a holdacska belső oldalán az EF, FG szakaszok vágnak ki az egyenes vonalú alakzatból, együtt egyenlők az alakzaton kívül található, EK, KB és BG egyenes szakaszok által levágott körszeletekkel, mivel a belső körszeletek mindegyike másfélszerese a külső körszeletek mindegyikének, hiszen feltettük, hogy az EF-re emelt négyzet másfélszerese az EK-ra emelt négyzetnek.
Így ha a holdacska egyenlő a három körszeletnek meg az egyenes vonalú alakzat és a két körszelet különbségének az összegével, ahol a trapéz magában foglalja a két körszeletet, de a hármat nem, és a két körszelet összességében egyenlő a három körszelettel, akkor ebből következik, hogy a holdacska egyenlő az egyenes vonalú alakzattal.
Azt, hogy a holdacska külső kerülete kisebb a félkörnél, azzal bizonyítja, hogy a külső körszeleten lévő szög tompaszög.

Azt pedig, hogy az EKG szög tompaszög, a következőképpen bizonyítja.
[Itt a szöveg sérült, az adott érvelést csak rekonstruálni lehet.]
Így aztán Hippokratész minden holdacskát négyszögesített, nemcsak azt, amelyiknek a külső kerülete egy félkörívvel egyezik meg, hanem azt is, amelynek külső kerülete nagyobb, és azt is, amelyiknek kisebb a félkörnél.
Emellett négyszögesítette egy holdacska és egy kör összegét is, a következőképpen.
Rajzoljunk két kört K mint középpont körül, úgy, hogy a külső átmérőjére emelt négyzet legyen hatszorosa a belső átmérőjére emeltnek.
Írjunk a belső körbe egy ABCDEF szabályos hatszöget, húzzuk meg KA-t, KB-t és KC-t, és hosszabbítsuk meg ezeket a külső körig. Húzzuk be GH, HI és GI szakaszokat.
Rajzoljunk GI-re egy olyan körszeletet, amely hasonló a GH által levágott körszelethez.
Ekkor az így kapott körszelet alapjára emelt négyzet háromszorosa a külső hatszög oldalára emelt négyzetnek, mivel a nagy körszelet alapjára emelt négyzet meg a külső hatszög oldalára emelt négyzet együtt egyenlő a külső kör átmérőjére emelt négyzettel, vagyis a külső hatszög oldalára emelt négyzet négyszeresével.



Emellett a külső hatszög oldalára emelt négyzet hatszorosa a belső hatszög oldalára emelt négyzetnek.
Így aztán a legnagyobb körszelet egyenlő a GH-n és a HI-n levő körszeletek, valamint a belső körben levő összes körszeletek összegével.
Így a GHI háromszög egyenlő a GHI holdacska és a belső körben levő összes körszeletek összegével.
Ha most mindkettőhöz hozzáadjuk a belső körben lévő hatszöget, a GHI háromszögnek és a belső hatszögnek az összege egyenlő lesz a GHI holdacska és a belső kör összegével.
Minthogy a két egyenes vonalú alakzat összege négyszögesíthető, így a kérdéses körnek és a holdacskának az összege is négyszögesíthető.

Kockakettőzés

Csak utalás kapcsán maradt fenn.

1.) középarányos: a, b-hez keressük x-et, hogy a/x=x/b (tehát egy a, b oldalú téglalappal egyenlő területű négyzet oldalának hosszát).
2.) kettős középarányos: a, b-hez keresünk olyan x-et és y-t, hogy a/x=x/y=y/b

1.) a, 2a-hoz keressük azt az x-et, amelyre 2a/x=x/a. Átalakítva: $x^2=2a^2$
2.) a, 2a-hoz keresünk x-et és y-t. Az összefüggést átalakítva: $2ay=x^2$, $ax=y^2$ vagyis $x^3=2a^3$

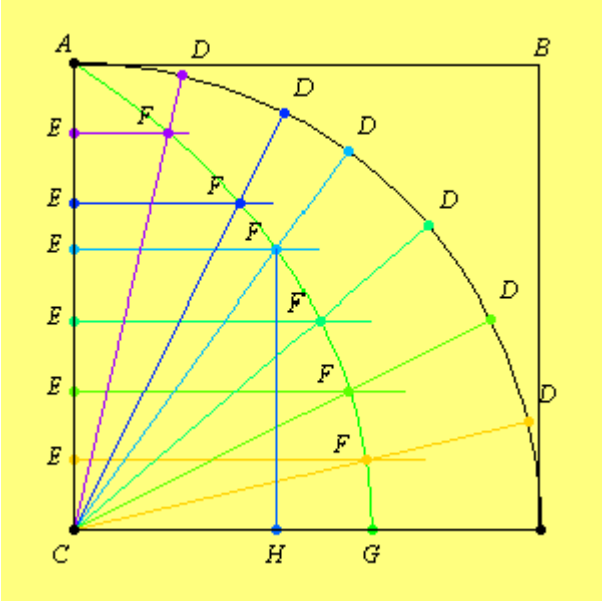
Menaikhmosz

- a kockakettőzés kapcsán fedezte fel a kúpszeleteket
- az ellipszis és a hiperbola fogalma már a területillesztésnél (hiánnyal és többlettel) már előjött
- felhasználva a hiperbola és ellipszis egyenleteit sikerült a négyzetkettőzés (de nem eulkideszi módszerekkel)

Hippiász

- neki tulajdonítják a szögharmadolást és a triszektrix görbét is

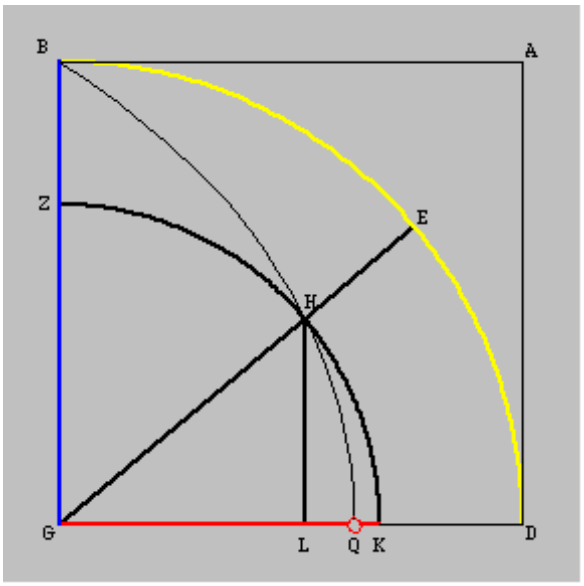
Triszektrix görbe: Rajzolunk egy ABCD négyzetet. Az AB egyenest csúsztatjuk lefelé CD-be, míg ugyanilyen egyenletességgel forgatjuk el a CA oldalt CD-be. A két egyenes metszéspontjait kirajzoljuk (zöld).



Ezen görbével megoldható egy tetszőleges szög n-edelése is.

Deinosztratosz (i. e. 4. század második fele)

- Platón akadémiáján tanult
- Menaikosz testvére
- a triszektrix görbét négyszögesítésre használta (kvadratix görbe)
- kör négyszögesítése



Állítás:

$$\frac{B\hat{D}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GQ}}$$

Biz: indirekt.

Azonban a triszektrix görbe nem szerkeszthető meg euklideszi módszerekkel.

Ezek nem euklideszi megoldások.

Euklidesz posztulátumai:

1. 2 pontot össze tudunk kötni egyenes vonallal (vonalzó)
2. egy szakaszt meg tudunk hosszabbítani (vonalzó)
3. körzőt használunk

Felmerül a kérdés, hogy milyen eszközöket használhatunk. Az alapvető eszközökkel dolgozunk (körző, vonalzó). Nem érdemes tovább bővíteni (új eszközökkel, melyekkel pl.: megoldható a környégyszögesítés is), mert akkor „nem lenne vége a matematikának”.

8. előadás

Filozófusok

Platón (i. e. 427- i. e. 347)

- Filozófiába, kultúrában tevékenykedett, meghatározó személy
- sokszor tesz utalást matematikai problémára, ismerte a matematikást, ha nem is foglalkozott vele
- Akadémia nevű iskolája volt
  - itt lehetett matematikával foglalkozni, tanulni (pl.: Eukleidész)
  - nem kaptak fizetést
  - önálló matematikai szervezés
  - állítólag az volt az ajtó fölé írva: „Aki nem ért a matematikához, ne lépjen be!”
- szövegeiben utal matematikai problémákra
- Hogyan tekint a matematikai gondolkodásra?
  - általában Szókratész a főszereplő
  - börtönben töltött utolsó napjait írja le egyik művében
  - Mondták neki, hogy szökjön meg, mert lefizették az őröket, de ő nem akart, sőt örült a kivégzésnek, mert a lélekvándorlás velejárója a visszaemlékezés.
  - módszer:

    → egybeesnek

    tétel→ következmények

    → ellentmondás (indirekt bizonyítás)

    Az állam című művében: egybeesnek: matematika (bizonyítás)

    ellentmondás: filozófia (dialektika)
- a matematikai következtetés logikus
- Az Államban a politikusoknak 9 év matematikát kellene tanulniuk
- A világ kétféle dologból áll: Jelenségek: fizikai történések, melyeket érzékszerveinkkel megismerhetünk (fizika), Formák: gondolati megismerés (matematika, filozófia). Tehát a matematikai objektumok függetlenül léteznek, a matematikai igazságok objektívek.

Arisztotelész (i. e. 384- i. e. 322)

- többet tudott a matematikáról, több hivatkozás van
- első forrás, aki beszél róla, hogy milyen alaptételek vannak
- deduktív modellel dolgozik: Mik az alaptételek? → Azokat honnan tudjuk? →… Mindig előző tételre hivatkozik, így ennek a bizonyításnak „nincs vége”. Tehát kellenek alaptételek, amiket elfogadunk.
- Alaptételek:
  - definíciók: egy konkrét tudomány létezői
  - axiómák: minden tudomány közös alapja
  - hipotézisek: egy konkrét tudomány alapjai

Matematikusok

Theaitészosz (i. e. 410 – i. e. 369)

- Platónnal jó barátok (ír egy dialógust a haláláról)
- Theodórosz volt a mestere, vele és Szókratésszal beszélget Platón művében (van olyan, hogy lineárisan összemérhetetlen, de négyzetesen összemérhető).
- neki tulajdonítják az Elemek X. könyvét (összemérhetetlenség, geometriai megszerkesztése az irracionális számoknak)
- megj.: A X. könyv három részre bontható. Az Elemek 1/3-át teszi ki.
- Pl.: egy téglalap oldalai: $\sqrt{n}$ és $\sqrt{m}$, akkor $a^2 = \sqrt{n} * \sqrt{m}$. a-t mediálisnak nevezzük.
- Sokak szerint az Elemek XIII. könyve is az ő műve.
- váltakozó kivonás módszere

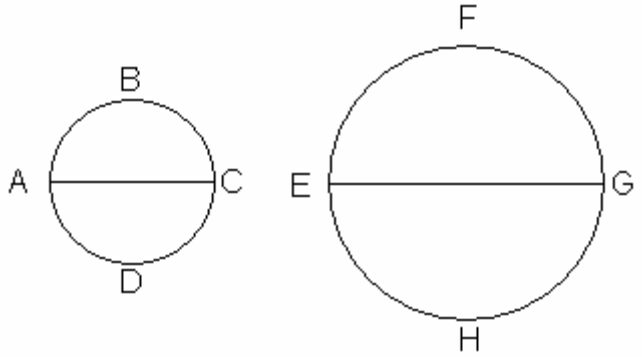
Eudoxosz (i. e. ~400 – i. e. 350)

- Arisztotelész jó barátja
- Ösztöndíjasan járt az Akadémiára
- Kortársai zseninek tartották, napi 2-2 órát gyalogolt, hogy bejárhasson az Akadémiára, mert olyan szegény volt, hogy a városon kívül volt albérlete.
- jó térlátása volt
- csillagászattal is foglalkozott
- hozzá kötik az Elemek V. könyvét (arányelmélet)
- arány: két mennyiségbeli egység
- 18 definíció van a könyvben.
- 4. def.: a/b; létezik olyan n és m természetes szám, hogy a*n>b és b*m>a
- 5. def.: a/b=c/d; Minden n, m természetes számra igaz, hogy a*n□b*m ↔ c*n□d*m, ahol □ helyén azonos relációs jel áll.

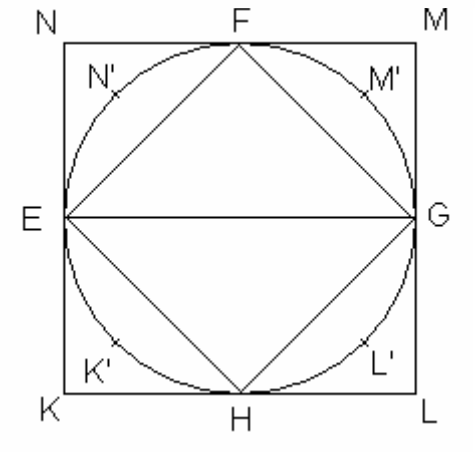
Így Theaitétosz és Eudoxosz megoldották az irracionalitást.

Kimerítés módszere (Archimédesznél lesz jelentős)

XII. 2. tétel: A kör területe arányos az átmérő négyzetével.



$ABCD\circ/EFGH\circ=AC^2/EG^2$



Biz:

I. $\Phi<EFGH\circ$

1. $EFGH\square>EFGH\circ/2$, mert $KLMN\square=2*EFGH\square$

$KLMN\square>EFGH\circ$

2. $EN'F\Delta>EN'F$ körszelet/2 mert $EE'F'F\square=2*EN'F\Delta$

$EE'F'F\square>EN'F$ körszelet

így tovább…

A maradék körszeletek összege: $\Sigma\Psi_i$ bárminél kisebbé tehető (X. könyv 1. tétel)

Legyen : $\Sigma\Psi_i<EFGH\circ-\Phi$

$\Phi<\dfrac{EFGH\circ-\Sigma\Psi_i}{\text{sokszög: }\pi_2}$

$ABCD\circ$-be írjunk π_2-höz hasonló π_1-et.

$\pi_1/\pi_2=AC^2/EF^2$ (mert sokszögek)$=ABCD\circ/\Phi$

$ABCD\circ/\pi_1=\Phi/\pi_2$

$ABCD\circ>\pi_1$

$\Phi>\pi_2$

Ez pedig ellentmondás.

9. előadás

Eukleidész

- volt egy másik Eukleidész, sokáig neki tulajdonították az Elemeket
- életéről nem tudunk semmit
- az Elemek kb. i. e. 300 körül íródott
- valószínűleg Platón akadémiáján tanult
- Idősebb korában Alexandriában tevékenykedett. Oda tevődik át a tudomány központja, ott tanított matematikát.
- összegyűjti a matematikai tudást és átadja az „újaknak”
- nem csak az Elemek maradt fenn, de a többi vagy nem teljes, vagy nem csak matematikával foglalkozik
- Teljesen maradt fenn az Adatok c. mű (pl.: adott a hossz, T terület, δ-hoz hasonló alakzat).
- Optika c. mű (legfontosabb optikai mű, Ptolemaiosz Optikájának is az alapja, alkalmazott geometria).
- Jelenségek c. mű
- írt a kúpszeletekről, de az nem maradt fenn

Elemek:

- A mű megírása után az az előtti műveket már nem másolták, mivel az Elemek összefoglalt minden akkori matematikai tudást.
- nem ő volt az első, aki Elemek címmel írt művet, de a többi nem maradt fenn
- jelentése: Proklosz: - a-ból eljutunk b-be és fordítva
  - felosztja a bonyolult dolgokat

Valamilyen műfaj lehetett. A cél, hogy mentes legyen a fölösleges dolgoktól. A tételeket általánosságban fogalmazta meg. Az egyszerűtől halad a bonyolult felé. Alaptételekből indul.

- tankönyvnek is tűnhet, hiszen amik benne vannak korábbi szerzők művei
- tartalom:
  - 1. könyv: abszolút síkgeometria
  - 2. könyv: algebrai síkgeometria
  - 3. könyv: a kör
  - 4. könyv: sokszögek körbe foglalása
  - 5. könyv: arányelmélet
  - 6. könyv: arányelmélet alkalmazása síkgeometriára
  - 7-9. könyv: aritmetikai tételek
  - 10. könyv: irracionalitás
  - 11-13 könyv: térgeometria, magasabb matematika
  - 14-15 könyv: ezek nem eredetileg vannak benne (térgeometria)
- kevés az, amit ezek közül Eukleidész talált ki
- axiomatikus felépítés: alaptételekből vezet le mindent
- van egy olyan pont, ami mögé nem megyünk, elfogadjuk igaznak ($a=b$, $a=c \rightarrow b=c$)
- a lépéseknek maguktól értetődőeknek kell lenniük
- alaptételek:
  - definíciók: egyes tudományok létezői
  - axiómák: alapigazságok, minden tudomány számára közös

    - hipotézisek: egy konkrét tudomány alapigazságai
- Eukleidésznél definíciók, posztulátumok, axiómák vannak.

Definíciók

1. Pont az, aminek nincs része.

2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.

3. A vonal végei pontok.

4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.

5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.

6. A felület végei (=szélei) vonalak.

7. Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.

8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.

9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.

10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.

11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.

12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.

13. Határ az, ami vége valaminek.

14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.

I5. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.

16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.

I7. A körnek átmérője bármely, a középponton áthaladó egyenes vonal, amely mindkét oldalt a kör kerületén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.

18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül. (A félkör középpontja ugyanaz a pont, mint amelyik a köré is.)

19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek) azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.

20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.

21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.

22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, romboid, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.

23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Posztulátumok

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.

2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.

10. előadás

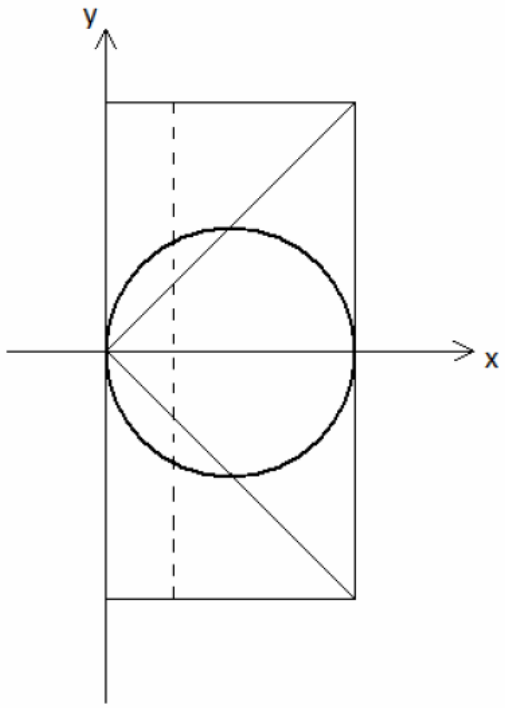
Nagy Sándor hódítása során a birodalom központja Alexandria lett. Itt létre hozták a Múzsák Templomát, ahol fizetett tanítás volt. A 300 ezer kötetes könyvtárat, mely akkoriban egyedülálló volt, többször felgyújtották arabok, keresztények. Ami fennmaradt, az többnyire máshol is megtalálható volt.

Arkhimédész (i. e. 287- i. e. 212)

- Szicíliai tudós, de kapcsolatban állt alexandriai tudósokkal is.
- Tételeket és bizonyításokat is készített. Tételeit elküldte Alexandriába, hogy megtudja, az ottaniak is be tudják-e bizonyítani (néha szándékosan hibás tételeket küldött).
- a kor legnagyszerűbb matematikai gondolatai neki voltak
- hivatkozik az Elemek tételeire
- Kitalálta, hogy a korona sűrűségét hogyan tudja megmérni: Egy edénybe vizet töltött, beletette a koronát, és a kiszorított víz térfogatát mérte meg. Erre épp fürdés koözben jött rá, kiugrott a fürdőkádból, és meztelenül végigszaladt az utcán azt kiabálva, hogy Heuréka – megtaláltam.
- mérlegről írt
- foglalkozott optikával: nagy tükröt készített, összegyűjtötte a nap fényét és egy hajóra irányította, ami ettől felgyulladt

Arkhimédész heurisztikus gondolatmenete a gömb, a henger és a kúp viszonyáról

(modernizálva)



A kör egyenlete: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

azaz $x^2 + y^2 = 2ax$

$\rightarrow \quad / \cdot \pi \quad / \cdot 2a$

$2a(\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2) = \pi(2a)^2 \cdot x$

Képzeld el: megforgatjuk az ábrát az x tengely körül (háromszög → kúp, kör → gömb, téglalap → henger)

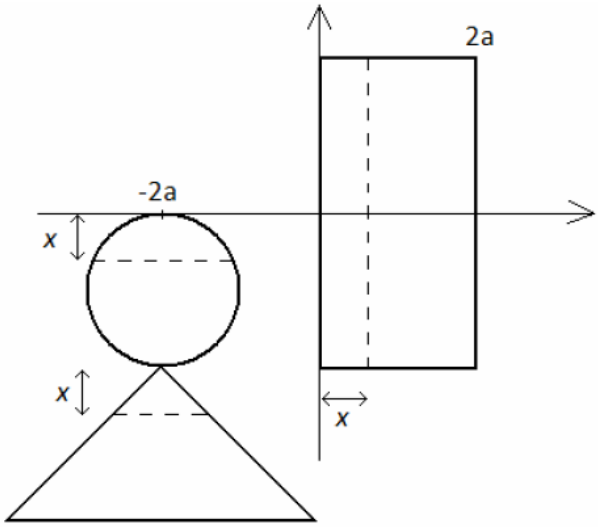
- $\pi \cdot x^2$: a kúp metszete (x tengelyre merőleges, (x, 0) ponton át)
- $\pi \cdot y^2$: a gömb metszete ugyanott
- $\pi(2a)^2$: a henger metszete ugyanott

Rendezzük át a testeket:

A fenti egyenlet egy emelőtörvény, amely minden x-beli metszet esetén egyensúlyt tart a gömbmetszet, a kúpmetszet és a hengermetszet között,

ahol

- $2a$ a gömbmetszet és a kúpmetszet állandó erőkarja
- x a hengermetszet változó erőkarja



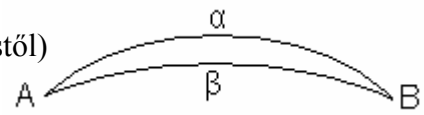
Ha az egyensúly minden metszethármasra fennáll, akkor a teljes testekre is (hiszen az egyes testek szeleteinek a „száma" egyenlő, hiszen kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak).

Így $2a(V_k + V_g) = a \cdot V_h$, hiszen a henger szeleteinek a az „átlagos erőkarja".

Vagyis mivel tudjuk, hogy $V_h = 3 \cdot V_k$ (*Elemek* XII.10), ezért

$$V_k = 2 \cdot V_g$$
$$V_h = 6 \cdot V_g$$

- Művei alapján elválik két fogalom: felfedezés és bizonyítás. Felvetődik a kérdés, hogy hogyan lehet felfedezni egy tételt és hogyan lehet azt bebizonyítani. Analízis, szintézis viszonya.
- Módszer című művében példákat ad arra, hogy hogyan képes felfedezni állításokat. Pl.: kúp-henger-gömb viszonya.
- Meghatározta a parabolaszelet területét, melyet Kepler vesz elő, hogy boroshordó térfogatát mérje. Később használják az integrál- és differenciálszámítás kidolgozásánál.
- Eukleidész axiómarendszerét kiegészíti 5 axiómával (nem tud különbséget tenni axióma és posztulátum között):
    - A és B között legrövidebb vonal az egyenes
    - A hosszabb, mint β (mert távolabb van az AB egyenestől)
    - Zárt síkgörbe által határolt felületek közül a sík a legkisebb. (mint az első, csak térben)
    - (a második, csak térben)
    - Két mennyiség nagyságkülönbsége önmagához elég sokszor hozzáadva bármilyen harmadik mennyiséget felülmúl (Arkhimédészi axióma).



- Hétszög szerkesztésével is foglalkozott (nem Euklideszi módszerrel)
- Hány homokszem van a világegyetemben?

Hérón

- Alexandriai matematikus, aki hidraulikával is foglalkozott, ami elősegítette az alexandriai hadiipar fejlődését.

Apollóniosz (i. e. 262 – i. e. 190)

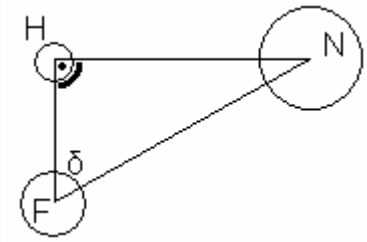
- Csillagászként is fontos
- Síkban tárgyalta a bolygók mozgását
- Kúpszeletekről is írt könyvet (9 könyv, 487 tétel) (Eukleidész szerint a kúp nem megszerkeszthető)
- Az eleje tartalmazza Eukleidész elveszett kúpszeletekről szóló könyvét

Apollóniosz: Kónika I. 11.

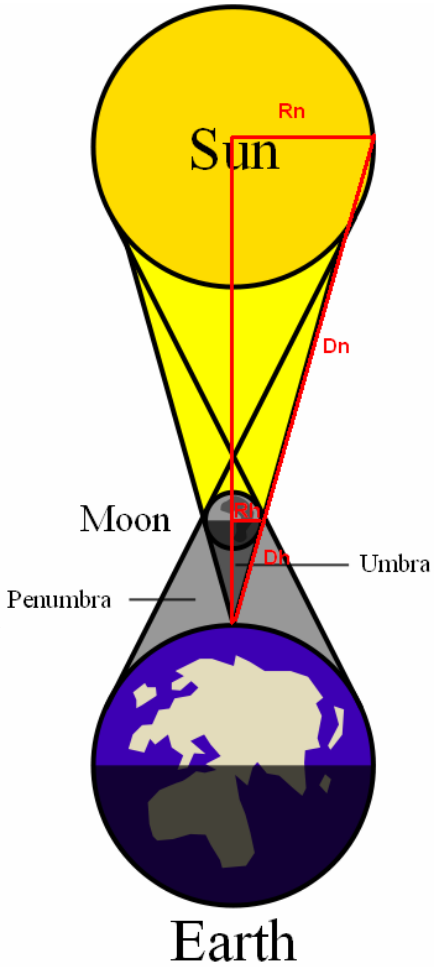
Ha a kúpot a tengely mentén síkkal metszem el, és ugyancsak elmetszem egy másik síkkal, amely a kúp alapját a tengelymetszet-háromszög alapjára merõleges egyenesben metszi, továbbá ha ezenkívül a metszet átmérõje párhuzamos a tengelymetszet-háromszög két oldala közül valamelyikkel, akkor minden, a metszettõl -- a metszõ sík és a kúpalap metszésvonalával párhozamosan -- az átmérõig húzott egyenesre emelt négyzet egyenlõ lesz azzal a téglalappal, amelyet az átmérõbõl a metszet csúcsáig levágott egyenes és egy bizonyos másik egyenes zár be, amely a kúp szöge és a metszet csúcs között húzódó egyeneshez úgy aránylik, mint ahogy a tengelymetszet-háromszög alapjára emelt négyzet aránylik ahhoz a téglalaphoz, amelyet a háromszög másik két oldala zár közbe. Az ilyen metszetet parabolának nevezzük.

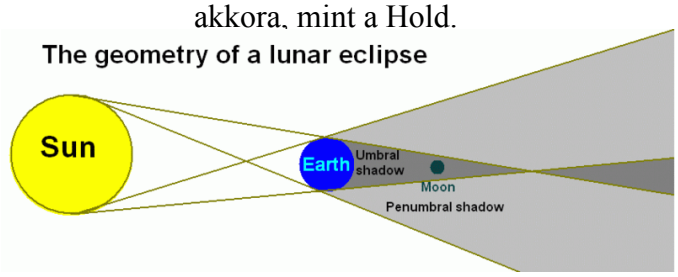
Arisztarkhosz (i. e. 3. század – i. e. 2. század)

- Nem a Föld van a világegyetem középpontjában, hanem a Nap, és a Föld évente egyszer megfordul körülötte.
- A Nap és a Hold méretéről és távolságáról szóló könyv:
  - Félhold: $\cos\delta = D_H/D_N$ Szerinte $\delta = 87°$ Így $D_N/D_H \approx 7$. Tehát a Nap hétszer messzebb van a Földtől, mint a Hold.



  - Napfogyatkozás: A Hold akkorának látszik, mint a Nap. Hasonlóság miatt $r_n/r_h = D_N/D_H \approx 7$
  - Holdfogyatkozás: A Föld árnyéka kétszer akkora, mint a Hold.





11. előadás

A kereszténység nem kedvez a tudományoknak. A geometria már nem tudott tovább fejlődni, és másfajta problémák kerültek előtérbe.

Zénodórosz (kb. i. e. 1. sz.)

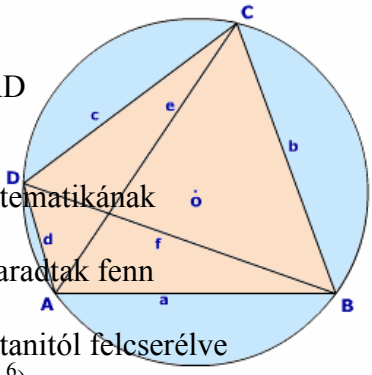
- izoperimetrikus problémák
  - adott kerületű, adott oldalszámú sokszögek közül a szabályos a legnagyobb
  - adott kerületű szabályos sokszögek közül a nagyobb oldalszámú a nagyobb
- 14 ilyen tétele van (valószínüleg írt könyvet is)

Hérón (±100 körül)

- számos matematikai műve maradt fenn (geometriai példatárak, Metrika, Geometria, Katapult építése)
- terület-, térfogatszámítás, súlypont meghatározás
- gyökök, köbgyökök numerikus közelítése

Trigonometria:

- matematika és csillagászat
- **Hipparkhosz (i. e. 2. sz)**
  - 60-as számrendszer a csillagászatban
  - csillagkatalógus készítése
  - alapkérdés: mekkora az a húr, ami az α központi szöghöz tartozik (ha egységkörrel számolunk, a 60°-ok szöghöz tartozó hossz éppen egy)
  - készített húrtáblázatot, de nem maradt fenn
- **Menelaosz (~100)**
  - gömbi háromszögtan
- **Ptolemaiosz (~150)**
  - fennmaradt egy teljes húrtáblázat (szinusz táblázat), mely alapszögek húrjainak meghatározására, nehezebb feladatok megoldására is alkalmas volt.
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
  - Ptolemaiosz-tétel: AC*BG=AB*CD + BC*AD
    Biz: a Thalész-tétel segítségével



- **Diophantosz (3. sz.)**
  - utolsó nagy eredeti gondolkodója a görög matematikának
  - Aritmetika című műve 13 könyvből áll
  - voltak korábban hasonló könyvek, de nem maradtak fenn
  - szimbolikus matematikát alkalmazott
  - a hatványozásnál a kitevőt és az alapot a mostanitól felcserélve írta($\Delta^Y=x^2$; $K^Y=x^3$; $\Delta^Y\Delta=x^4$; $K^Y\Delta=x^5$; $K^YK=x^6$)
  - törtjel alkalmazása, számláló felül, nevező alul
  - az összeadást az egymás mellé írás jelentette, míg a kivonásra ⋏ jelet használt
  - mindig egy konkrét megoldást ad meg
- **Kommutátorok**
  - korábbi matematikai könyvekhez írták
- 529: Athéniai Akadémiát bezárták