Kutrovátz Gábor

Bevezetés a logikába és az érveléselméletbe

(nemhivatalos jegyzet)

Ez a jegyzet az ELTE Társadalomtudományi Karán tanuló elsőévesek számára meghirdetett „Bevezetés a logikába és a tudományfilozófiába" című tárgy első öt előadásához kapcsolódó anyagot tartalmazza. A jegyzet célja az, hogy segítséget nyújtson a félév végi dolgozatra történő felkészülésben.

Figyelem: A jegyzet nem azért ennyire terjedelmes, mert a számonkérés az ismeretek hasonlóan terjedelmes körét fogja előfeltételezni, hanem ezért, hogy az összefüggések felmutatásával és a részletek kidolgozásával az anyag nagyobb mértékű érthetőségét szolgálja. A könnyebb tájékozódás érdekében a fontosabb fogalmakat és meghatározásokat aláhúzás emeli ki.

Az anyaggal kapcsolatban felmerülő további kérdések tekintetében a következő könyveket ajánlom:

A logikai részhez:

Ruzsa I. – Máté A.: *Bevezetés a modern logikába* (Osiris, 1997), vagy
Ruzsa I.: *Logikai szintaxis és szemantika I - II.* (Akadémiai, 1991), vagy
Pólos L. – Ruzsa I.: *A logika elemei* (Tankönykiadó, 1987 és 1999)

Az érveléselméleti részhez:

Zentai I.: *A meggyőzés útjai* (Typotex, 1998)
Zentai I.: *A meggyőzés csapdái* (Typotex, 1999)

Jó munkát!

Budapest, 2003. november 26.

Kutrovátz Gábor
ELTE TTK
Tudománytörténet és Tudományfilozófia Tanszék
e-mail: kutrovatz@hps.elte.hu
web: hps.elte.hu/~kutrovatz

A jegyzet a következő címről letölthető:
http://hps.elte.hu/~kutrovatz/logjegyz.htm

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés: A logika mint a következtetések formális tudománya

1.1. A logika tárgyköre

Először annak a feladatnak kell eleget tennünk, hogy meghatározzuk a logika tárgykörét. Ez azonban – a korábbi ismeretek hiányában – nem egyszerű feladat. Félrevezető lenne a „logika” szó hétköznapi jelentéséből kiindulni, hiszen ennek használata jóval több mindenre kiterjedhet (ugyanakkor jóval kevésbé szabatosan és konzekvensen), mint amit a logika tudománya valójában vizsgál. A modern logika tudománya szempontjából tekintve mindabból, amit a hétköznapi nyelv „logikusnak” talál, számunkra elsősorban a bizonyítás, a (racionális) érvelés, valamint mindenek előtt a következtetés fogalma tűnik relevánsnak. Az érvelések általános jellemzésére a későbbiekben visszatérünk (5. szakasz), a bizonyítás egy meghatározásához pedig logikai tanulmányaink során fogunk elérkezni (4.2. szakasz). Így a logika feladatának előzetes behatárolását a következtetés fogalmának segítségével tudjuk elvégezni.

Kiindulásképpen azt mondjuk, hogy a logika a következtetések érvényességének feltételeivel foglalkozó tudomány. Meg kell jegyezni, hogy valójában egy valamirevaló logikai elméletnek ennél jóval tágabb is lehet az érdeklődési köre, ám egyfelől kézenfekvőnek tűnhet a fenti előzetes meghatározás alapján elérkezni a további témákhoz, másfelől pedig a jelen tárgy szűk keretei között aligha fogunk olyan témákat tárgyalni, amelyek messze túlmutatnának a meghatározás által kínált problémakörön. A továbbiakban tehát először azt kell tisztáznunk, hogy mit takar a következtetés fogalma, illetve mit értünk azon, hogy egy következtetés érvényes.

1.2. A következtetés

A következtetést kijelentések közötti viszonyként határozzuk meg. A kijelentés a világ egy tényének (vagy tényállásának, eseményének) kifejezésére szolgáló nyelvi eszköz. Ezeket a fogalmakat persze nem vizsgáljuk, de abban segítenek, hogy elkülönítsük a kijelentéseket egyéb nyelvi elemektől. Először is, a kijelentések mind mondatok, de nem akármilyenek, hanem kijelentő mondatok. (A kérdő, óhajtó stb. mondatok nem arra szolgálnak, hogy tényeket fejezzenek ki.) Másrészt nem minden kijelentő mondat célja, hogy tényt fejezzen ki. (A „Jó napot kívánok.”, „Köszönöm szépen”, „A hajót ezennel ’Hableánynak’ nevezem el.”, „Megígérem, hogy holnap megadom a tartozásom.”, stb. mondatok kijelentőek ugyan, de kimondásuk inkább cselekvésként határozható meg, mint egy tény megállapításaként.) Azokat a mondatokat fogjuk kijelentésnek tekinteni, amelyek igazak vagy hamisak lehetnek. Másképpen ezt úgy mondhatjuk, hogy egy kijelentés igazságértékkel bírhat. (A kijelentésekre nézve további megszorításokat is tehetnénk, például hogy olyan formában legyenek megfogalmazva, hogy igazságértékük kontextus- és időfüggetlen legyen, vagyis ne szerepeljenek bennük ún. indexikus kifejezések, ám a precízség ilyen foka pillanatnyilag nem indokolt.)

Az igazságértékek a legtöbb logikai elméletben az ún. kétértékűség elvének engedelmeskednek, amely szerint minden kijelentést megillet a két igazságérték, azaz az igazság és a hamisság valamelyike. Pontosabban fogalmazva a fenti elv két további elvre bontható. Az ellentmondás-mentesség elve szerint egyetlen kijelentés sem vehet fel egyszerre több igazságértéket, vagyis nem lehet egyszerre igaz és hamis. (Ez tudtommal minden logikai elméletre érvényes.) A kizárt harmadik elve azt állítja, hogy minden kijelentés rendelkezik a két igazságérték valamelyikével, és több (pl. harmadik) igazságérték nem létezik. (Ez más nem minden logikai elméletre teljesül, ugyanis vannak ún. többértékű vagy nem klasszikus logikai elméletek is, ezekkel azonban itt nem áll módunkban foglalkozni.)

Egy következtetésben a kijelentéseket két csoportra osztjuk. Azokat a kijelentéseket, amelyek*ből* következtetünk, premisszáknak, azt pedig, amelyik*re* következtetünk, konklúziónak nevezzük. A premisszák számára nézve a modern logika nem ismer kikötést: egy következtetés lehet egypremisszás, kétpremisszás, stb., egészen a (megszámlálhatóan) végtelen számú premisszáig (sőt, vannak ún. nullapremisszás következtetések is). Konklúzió viszont minden következtetésben csak egy van, és amennyiben a premisszákból több konklúzió is levonható, úgy ezeket külön-külön következtetéseknek tekintjük. A következtetés tehát szűkebben tekintve egy, a premisszák és a konklúzió közti viszony.

1.3. Az érvényes következtetés

Mielőtt megpróbálnánk meghatározni, mit értünk érvényes következtetés alatt, először is lássunk a következtetésekre egy egyszerű példát:

1. premissza:	„Ha esik az eső, akkor nedves az út.”
2. premissza:	„Esik az eső.”
konklúzió:	„(Tehát) nedves az út.”

Az intuíciónk azt súgja, hogy ez egy „jó” következtetés, vagyis a premisszákból valóban következik a konklúzió. Ha valaki megkérdezi tőlünk, hogy vajon miért fogadjuk el ezt a következtetést, akkor magyarázatunkban felhasználhatjuk a kijelentések azon tulajdonságát, hogy igazságértékük van. Azt vesszük észre, hogy amennyiben a premisszák igazak, úgy a konklúziónak is igaznak kell lennie. Vagyis ha igaznak tartom az első premisszát (például mert megfigyeltem, hogy mindig, amikor esik az eső, nedves az út), és igaznak tartom a második premisszát is (például mert az ablakomon kinézve látom, hogy éppen esik), akkor csakis a premisszák igazsága alapján igaznak fogom tartani a konklúziót is (és például nem kell a másik ablakon keresztül ellenőriznem, hogy valóban nedves-e az út).

Ezzel szemben tekintsük a következő példát:

1. premissza:	„Ha esik az eső, akkor nedves az út.”
2. premissza:	„Nedves az út.”
konklúzió:	„(Tehát) esik az eső.”

Ez a következtetés már kevésbé tűnik elfogadhatónak. Az előző érvelésünket követve most megállapíthatjuk, hogy a premisszák igaz voltából nem feltétlenül következik a konklúzió igaz volta. Ugyanis attól még, hogy a premisszák igazak, a konklúzió nem feltétlenül igaz: az út attól is lehet nedves, hogy locsolókocsi haladt végig rajta, vagy éppen olvad a hó, vagy számos más okból, de az esőnek ehhez nem kell esnie.

Eszünkbe juthat, hogy a második következtetésünk elfogadhatatlanságát egy azonos szerkezetű, de nyilvánvalóan nem elfogadható következtetés segítségével mutassuk meg. Legyen ez a következő:

1. premissza:	„Ha sósavat iszom, akkor rosszul vagyok.”
2. premissza:	„Rosszul vagyok.”
konklúzió:	„(Tehát) sósavat iszom.”

Világos, hogy a premisszák igazsága nem vonja maga után a konklúzió igazságát, hiszen bár az első premissza általában mindenkire igaz, attól még, hogy valaki rosszul van, nem szoktunk arra következtetni, hogy az illető sósavat ivott. Azonban ha gondolatban megcseréljük a második premisszát a konklúzióval, akkor ez első példánkkal analóg szerkezetű következtetéshez jutunk, és ebben az esetben ez szintén jó következtetésnek tűnik.

A fenti példák tehát két fontos tanulsággal szolgálnak. Az első az, hogy akkor fogunk egy következtetést érvényesnek tekinteni, ha a kijelentések között fennáll az a viszony, hogy amennyiben a premisszák igazak, úgy a konklúzió is (szükségszerűen) igaz. Ez a meghatározás már elegendő ahhoz, hogy vizsgálatainkban továbblépjünk, és megpróbáljuk megállapítani, hogy ez a viszony milyen feltételek mellett teljesül.

1.4. Forma és tartalom különválasztása

A példák által sugallt másik tanulság az, hogy egy következtetés érvényessége annak formáján múlik. Ehhez persze meg kell mondanunk, hogy a logika szempontjából releváns nyelvi kifejezések (pl. kijelentések, következtetések) esetén hogyan különítsük el a formát a tartalomtól. Kézenfekvő a fenti példákat a következőképpen „rövidíteni”:

Érvényes következtetési forma:

Ha *A*, akkor *B*.
A.
―――――――
(Tehát) *B*.

Nem érvényes következtetési forma:

Ha *A*, akkor *B*.
B.
―――――――
(Tehát) *A*.

A bal oldalon található következtetési forma érvényes, hiszen akármilyen kijelentéseket helyettesítünk *A* és *B* helyére, a kapott következtetés mindig érvényes marad. A jobb oldalon található séma azonban nem ilyen, ahogy azt a példák is mutatják. Ebben az esetben tehát rögtön találtunk is egy érvényes következtetési formát, hiszen láthatjuk, hogy minden ilyen (vagyis a bal oldali) formájú következtetés érvényes lesz, függetlenül a benne szereplő konkrét kijelentések tartalmától – pontosan ezért tehettük meg azt, hogy a kijelentések tartalmától azáltal tekintsünk el, hogy azokat egy betűvel (precízebben ún. kijelentés-paraméterrel) rövidítsük.

Mivel tehát felmerült a gyanú, hogy a következtetések érvényessége kizárólag azok formáján múlik (nem csak ebben az esetben, hanem akár általában is), a logika számára elegendő, ha csakis ezzel a formával foglalkozik. Ehhez elvonatkoztat a tartalomtól, és a számára érdektelen tartalmi egységeket különböző jelekkel fejezi ki. (Egy matematikai analógia: az összeadás ún. kommutativitását olyan általános formában fejezzük ki, hogy „$a+b=b+a$”, ahol a és b helyére bármilyen számot írhatunk, ugyanis az összegfüggés minden számra igaz.) Azokat a nyelvi kifejezéseket pedig, amelyek a formáért felelősek (ilyen volt pl. a „ha-akkor” kapcsolat), szintén érdemes szimbólumokkal rövidíteni, hogy ezáltal elvonatkoztassunk a természetes nyelv bizonyos kétértelműségeitől. (Az iménti matematikai példában a „+” és „=” jelek hasonló szereppel bírnak.) Így tehát a logika tisztán formális és szimbolikus tudománynak bizonyul: a természetes nyelv kifejezéseinek logikai formáját úgy vizsgálja, hogy lefordítja ezeket a kifejezéseket egy mesterséges nyelvre, és ezután kizárólag ezekkel a mesterségesen létrehozott szimbolikus jelekkel (jelkészlettel, „nyelvvel”) dolgozik.

Attól függően, hogy a logikatudósok milyen formai szerkezetet kívánnak látni a természetes nyelv hátterében, a logika szimbolikus nyelvét többféleképpen is megválaszthatják. A továbbiakban lássunk két példát arra, hogy milyen mesterséges nyelvekkel dolgozik a logika, és ezekben hogyan építhető fel formálisan az érvényes következtetés fogalma!

2. A kijelentéslogika

2.1. A kijelentéslogika szerkezeti elve

Egy adott logikai rendszer nyelvének felépítéséhez először is szükség van annak megállapítására, hogy mi az a legfőbb szerkezeti elv, amelynek segítségével a nyelvi kifejezéseinket tagolni szeretnénk. A következtetésekre adott korábbi példák esetén megállapíthatjuk, hogy azok érvényessége nagymértékben a „ha-akkor” szerkezeten, vagyis a kijelentések összetételének egy jól ismert fajtáján múlik. Érdemes tehát megvizsgálni, hogy bizonyos típusú összetett kijelentések milyen logikai szerkezetet mutatnak. A kijelentéslogika legfőbb szerkezeti elve az, hogy a kijelentéseket összetételük szerint vizsgálja, és megpróbálja bennük azonosítani a nyelvi elemek két fő fajtáját: az elemi kijelentéseket (vagyis amelyek már nem mutatkoznak összetettnek) és az ezeket összekapcsoló kötőszavakat.

Mivel – ahogy láttuk – az elemi kijelentések tartalmától eltekintünk, érdemes ezeket egyszerű szimbólumokkal jelölni. Válasszuk például erre a célra az ábécé nagybetűit: *A*, *B*, *C*, stb. Hogy mennyi ilyen jelre van szükségünk, az attól függ, hogy a formalizálni (vagyis szimbolikus nyelvre lefordítani) szánt természetes nyelvi kijelentésekben hány különböző elemi kijelentést tudunk azonosítani. (Ha valaki azon aggódik, hogy hosszabb szövegek formalizálásánál kifutunk az ábécé betűiből, akkor megnyugtathatom, hogy itt erre nem lesz példa. Egyébként választhattuk volna például az A_1, A_2, A_3,… szimbólumokat is, amelyekből már végtelen sok van, ám ezek használata talán kissé kényelmetlenebb lenne.)

A kötőszavak számunkra lényegesebbek, hiszen éppen ezeken múlik a kijelentéslogika kifejezéseinek szerkezete. A logikában többnyire a következő kötőszavak használatosak:

Természetes nyelvi kifejezés:	Logikai szimbólum:	Logikai elnevezés:
nem …	~	negáció
… és …	&	konjunkció
… vagy …	v	alternáció
ha …, akkor …	$\supset$	kondicionális
vagy …, vagy …	∇	diszjunkció
… akkor és csak akkor, ha …	$\equiv$	bikondicionális

2.2. Az igazságtáblázatok

A logikai kötőszavakat az alapján határozhatjuk meg, hogy milyen viszonyt teremtenek az elemi kijelentések igazságértékei és a belőlük összetett kijelentés igazságértéke között. Mivel ugyanis elköteleztük magunkat amellett, hogy az elemi kijelentések tartalmától eltekintünk, az egyetlen információ, amit velük kapcsolatban felhasználhatunk, az az igazságértékük. Ezért a logikai kötőszavak meghatározása az ún. igazságtáblázat segítségével történik. Ebben azt tüntetjük fel, hogy az összetett kijelentés igazságértékét hogyan határozzák meg a benne szereplő elemi kijelentések igazságértékei. Vagyis az elemi kijelentések igazságértékeinek minden lehetséges kombinációjához meg kell adni, hogy mi lesz az adott esetben az összetett kijelentés igazságértéke.

A fenti kötőszavakhoz tartozó igazságtáblázatok a következők (az „i” az igaz, a „h” a hamis igazságértéket jelöli):

negáció	
A	**~A**
i	h
h	i

konjunkció		
A	**B**	**A&B**
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

alternáció		
A	**B**	**AvB**
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

diszjunkció		
A	**B**	**A∇B**
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

kondicionális		
A	**B**	**A⊃B**
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

bikondicionális		
A	**B**	**A≡B**
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

A negáció igazságtáblázatáról rögtön egy furcsaságot tudunk leolvasni, amely megkülönbözteti a többi kötőszó igazságtáblázatától: ebben az esetben nem egy, a szó szoros értelmében vett kötőszóval van dolgunk, ugyanis ez nem két elemi kijelentést kapcsol össze, hanem csak egyet. Ha az *A* elemi kijelentés elé tesszük a „~" jelet, akkor egy összetett kijelentést kapunk, amit úgy célszerű kiolvasni, hogy „nem *A*" vagy „nem igaz, hogy *A*". A táblázatból az is kiderül, hogy a negáció az ellenkezőjére változtatja az igazságértéket, vagyis az összetett mondat igazságértéke ellenkezője lesz az elemi mondat igazságértékének. Ha például az „Esik az eső." kijelentés igaz, akkor a „Nem esik az eső." kijelentés hamis lesz, és viszont: ha az elemi kijelentés hamis volt, akkor az összetett igaz lesz. Ez a logikai értelmezés meglehetősen jól visszaadja a „nem" szócska természetes nyelvi használatát, azzal a megszorítással, hogy a logikai „tagadás" mindig kijelentésekre érvényes. (Így tehát a logikában azt a mondatot, hogy „Nem Józsi a barátnőm neve, hanem Rózsi." úgy értjük – részben formalizálva –, hogy „(~(Józsi a barátnőm neve))&(Rózsi a barátnőm neve)".)

A konjunkció már két elemi kijelentést kapcsol össze, méghozzá olyan módon, hogy az összetett kijelentés csak akkor lesz igaz, ha mindkét elemi kijelentés igaz, és minden más esetben hamis lesz. Az a kijelentés például, hogy „Esik az eső és fúj a szél." igaz lesz akkor, ha igaz az, hogy „Esik az eső." és igaz az is, hogy „Fúj a szél.", ám ha a két elemi kijelentés bármelyike hamis, vagy mindkettő hamis, akkor az összetett kijelentés is hamis lesz. Ez szintén jól megfelel az „és" szó természetes használatának, ám ismét azzal a megszorítással, hogy a konjunkció mindig kijelentéseket kapcsol össze. (Ezért aztán a „Maugli és Akela vadászni mentek." mondatot úgy kezdjük formalizálni, hogy „(Maugli vadászni ment)&(Akela vadászni ment)", majd a zárójelekben szereplő elemi kijelentéseket természetesen egy-egy nagybetűvel helyettesítjük.)

A „vagy" szócska logikai értelmezése már nehezebb feladat, ugyanis a természetes nyelvben ezt a szót több különböző értelemben is használjuk. A két legfontosabb értelmet két különböző logikai kötőszóval, az alternációval és a diszjunkcióval próbáljuk visszaadni. Az közös bennük, hogy ha mindkét elemi kijelentés hamis, akkor az összetett is hamis lesz. Az is közös, hogy ha csak az egyik elemi kijelentés igaz, akkor ez biztosítja az összetett kijelentés igazságát. Vagyis ha azt a kijelentést teszem, hogy „Ma este moziba megyek, vagy meglátogatom a nagymamámat.", akkor ez hamis lesz, ha egyiket sem teszem meg, de igaz lesz, ha valamelyiknek (de csak az egyiknek) eleget teszek. De mi a helyzet akkor, ha mindkét elemi kijelentés igaznak bizonyul, vagyis mindkét program teljesül az este során (tetszőleges sorrendben)? Ha a példamondatban a „vagy"-ot alternációként értelmezzük, akkor az összetett kijelentés is igaz lesz („megengedő vagy", mert megengedi, hogy a kettő egyaránt teljesüljön), ha viszont diszjunkcióként, akkor az összetett kijelentés hamis („kizáró vagy", mert nem engedi meg az egyszerre teljesülést). A fenti példamondat inkább azt sugallja, hogy itt alternációval van dolgunk. Bizonyos esetekben viszont a „vagy" (és főként a „vagy…, vagy …") használata arra utal, hogy a kijelentés logikai szerkezete diszjunkciót takar: például a „Vagy nekem adod a csokid felét, vagy megijesztem a macskádat." kijelentés azt implikálja, hogy a két lehetőség közül csak az egyik fog teljesülni, és ha mégis mindkettő bekövetkezik, akkor hazudtam. Hogy egy „vagy"-gyal kifejezett kijelentést alternáció vagy diszjunkció segítségével akarunk-e formalizálni, az többnyire a kijelentés jelentésétől függ, és ez a választás sokszor nem egyértelmű – ám valójában nem is a logika feladata. A logikai vizsgálat azután kezdődik, hogy valamelyik lehetőség mellett elköteleztük magunkat, és innentől kezdve a dolog egyértelműen kezelhető.

A „ha-akkor" szerkezetű kijelentések esetén a természetes nyelvi helyzet még bonyolultabb: az ilyen típusú összetett mondatokat nagyon sok féle értelemben lehet használni. Ezek vizsgálata helyett érdemes rögtön lerögzítenünk azt az értelmet, amelyhez a továbbiakban ragaszkodni fogunk. A kondicionális igazságtáblázatáról leolvasható, hogy egy ilyen kijelentést csak akkor fogunk hamisnak tekinteni, ha az első elemi kijelentés igaz, a második pedig hamis, és minden más esetben igaznak tekintjük. Vegyük észre, hogy szemben a korábban vizsgált kötőszavakkal, ahol a két elemi kijelentés sorrendje nem számít (csakúgy, mint pl. matematikában az összeadás és a szorzás esetén a számok sorrendje lényegtelen), itt a sorrend döntő, hiszen ezen múlhat az összetett kijelentés igazságértéke (mint pl. az aritmetikában a kivonás vagy osztás sorrendjén az eredmény). Ezért, hogy különbséget tegyünk a kondicionálissal összekapcsolt két elemi kijelentés között, az elsőt előtagnak, a másodikat utótagnak szokás nevezni. Ezekkel megfogalmazva tehát a kondicionális csak akkor hamis, ha az előtagja igaz, az utótagja hamis, és minden más esetben igaz. Vagyis például az a kijelentés, hogy „Ha holnap esik a hó, akkor szánkózni megyünk." igaz, ha holnap nem esik a hó (függetlenül attól, hogy ekkor megyünk-e szánkózni vagy sem), és igaz akkor is, ha holnap szánkózni megyünk (függetlenül attól, hogy esik-e a hó) – tehát csak akkor hamis, ha esik ugyan a hó, de mégsem megyünk szánkózni.

Bár a bikondicionális bevezetése talán fölöslegesnek is tűnhet, hiszen a természetes nyelvben aligha szoktuk az „akkor és csak akkor, ha" kifejezést használni, valójában az a helyzet, hogy ilyen logikai szerkezetű kijelentéseket is gyakran teszünk, ám általában ezt a „ha-akkor" nyelvi szerkezettel fejezzük ki. Az a kijelentés például, hogy „Ha villámlik, akkor dörög az ég." egyben azt is jelenti, hogy „Ha dörög az ég, akkor villámlik.", hiszen ez a két jelenség mindig együtt szokott járni. Ebben az esetben tehát az „előtag" és az „utótag" felcserélhető az igazságérték megőrzése mellett, és a precízebb tudományos (például matematikai) nyelvben ezt a szerkezetet szokás kifejezni az „akkor és csak akkor, ha" kifejezés segítségével (itt: „Akkor és csak akkor villámlik, ha dörög."). A bikondicionális akkor lesz igaz, ha az elemi kijelentések igazságértéke megegyezik (akár mindkettő igaz, akár mindkettő hamis), és akkor lesz hamis, ha az elemi kijelentések igazságértéke eltérő.

A kijelentéslogikában általában használatos kötőszavak áttekintése után felvethetjük azt a kérdést, hogy vajon miért pont ezeket a kötőszavakat használjuk. Először is felmerülhet a gyanú, hogy a lista nem kimerítő: a természetes nyelvben ennél sokkal több kötőszó azonosítható. Vegyük például a „mert" szócskát, amely a hétköznapi beszédben gyakran fordul elő! A kijelentéslogikában azáltal határozhatunk meg egy kötőszót, hogy az általa összekapcsolt elemi kijelentések igazságértékei hogyan határozzák meg az összetett kijelentés igazságértékét, vagyis hogy néz ki a kötőszó igazságtáblázata. Ha azonban a „mert" szóhoz tartozó igazságtáblázatot próbáljuk meghatározni, akkor bajba jutunk. Az a kijelentés, hogy „Reszket a bokor, mert madárka szállott rá." igaznak látszik abban az esetben, ha a „Reszket a bokor." igaz és a „Madárka szállott rá [azaz a bokorra]." is igaz. Vagyis ha mindkét elemi kijelentés igaz, az összetett kijelentés is az. Ám ugyanakkor az is lehet, hogy mindkét elemi kijelentés igaz, de a bokor mégsem *azért* reszket, mert a madárka rászállott (mondjuk a bokor túl nagy, a madárka meg túl kicsi), hanem azért, mert éppen földrengés van. Ekkor tehát bár mindkét elemi kijelentés igaz, az összetett mégis hamis. (Talán világosabb példa: „Reszket a bokor, mert 2+2=4." – itt egyértelmű, hogy még ha mindkét elemi kijelentés igaz is, az összetett biztosan nem lesz az.) Tehát ha egy „mert"-tel összekapcsolt kijelentésben mindkét elemi kijelentés igaz, akkor az összetett kijelentés lehet igaz és hamis is, és így a „mert"-hez nem tudunk igazságtáblázatot rendelni. Úgy tűnik tehát, hogy a „mert" kapcsolat érvényessége nemcsak az összekapcsolt elemi kijelentések igazságértékeitől függ, hanem azok értelmétől, jelentésétől is. Ezért itt nem tudunk a jelentéstől elvonatkoztatni, és a „mert"-et ugyanúgy nem tekintjük logikai kötőszónak, mint q természetes nyelv bármelyik jelentésfüggőnek bizonyuló kötőszavát. (Megjegyzés: Vannak olyan logikai vizsgálatok, amelyek a jelentést is figyelembe veszik. Ezt intenzionális logikának nevezik, mi azonban itt nem foglalkozunk vele, hanem csak a jelentésfüggetlen, ún. extenzionális logikával.)

2.3. Formulák és átalakításaik

Láttuk, hogy a kötőszavak funkciója abban áll, hogy bizonyos kijelentés(ek)ből egy új kijelentést hoznak létre, ahol az új kijelentés igazságértéke az összekapcsolt kijelentés(ek) igazságértéke(i) alapján határozható meg. Természetesen nemcsak elemi (tehát nem összetett) kijelentéseket tudunk összekapcsolni, hanem összetett kijelentéseket is összekapcsolhatunk („még összetettebbé"). Ha adott két formalizált kijelentés, pl. „A & B" és „$B \supset C$", melyek már összetettek, akkor ezeket összekapcsolhatjuk például alternáció segítségével: „(A & B) v ($B \supset C$)". A teljes kijelentés igazságértékét úgy fogjuk az elemi kijelentések (A, B, C) igazságértékeinek segítségével meghatározni, hogy először megállapítjuk „A & B", illetve „$B \supset C$" igazságértékeit, majd ezekből az alternációra vonatkozó igazságtáblázat segítségével leolvashatjuk a teljes kifejezés igazságértékét. Látjuk, hogy az összetett kijelentések további összetételénél a sorrendet (vagyis a szerkezetet) zárójelek segítségével juttatjuk érvényre. Fontos, hogy erről soha ne feledkezzünk meg, ugyanis e nélkül a kijelentések logikai szerkezete nem egyértelmű.

A logika nyelvében megfogalmazott kijelentéseket formuláknak nevezzük. A kijelentéslogika formuláiban előfordulhatnak tehát az elemi kijelentéseket jelölő nagybetűk, a kötőszójelek és a zárójelek (és semmi más). Fontos megjegyezni, hogy ezek nem követhetik egymást akármilyen sorrendben, hiszen a „&A)(" jelsorozatot nyilvánvalóan nem tekintjük formulának, mert nem kijelentést fejez ki, hanem értelmetlen. Valójában megfogalmazhatnánk az arra vonatkozó szabályokat, hogy milyen jelsorozatokat tekintünk formulának, de erre talán nincs szükség, mert a kérdés az eddigiek alapján „intuitíve" eldönthető. (Erre a problémára még visszatérünk a 4.2. szakaszban.)

Ha tehát a logika számára egy kötőszónak csakis az igazságtáblázata számít, akkor elviekben annyi különböző kötőszó lehetséges, ahányféle különböző igazságtáblázatot össze tudunk állítani. Ellenőrizhető például, hogy két elemi kijelentés összekapcsolására tizenhat különböző kötőszó szolgálhat. Ezek azonban nem mind szükségesek, ugyanis kifejezhetők egymás segítségével. A bikondicionálist például úgy írtuk körül, mintha egyszerre fejezne ki egy kondicionálist és annak „megfordítását". Ezt így is írhatjuk:

$$A \equiv B \;\Leftrightarrow\; (A \supset B) \;\&\; (B \supset A)$$

Ez az összefüggés egy újdonságot tartalmaz: szerepel benne a „$\Leftrightarrow$" jel, amely azt jelenti, hogy a két oldalán álló formulák ugyanakkor igazak, vagyis vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. Mivel egyszerre igazak, és a logika szempontjából csakis az igazságérték számít, ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy a két formula logikai szempontból ugyanazt fejezi ki, vagyis logikai szinonimákat alkotnak. (Megjegyzés: ez a jel nem „logikai" jel abból a szempontból, hogy nem a kijelentéslogika nyelvébe tartozik, amelynek elemeit már felsoroltuk. A fenti kifejezés így nem egy formula, hanem két formula közötti viszony.)

A fenti összefüggés tehát azt mutatja, hogy a bikondicionálist ki tudjuk fejezni a kondicionális és a konjunkció segítségével. Ehhez hasonlóan több összefüggést is fel lehet írni. Íme néhány egyszerűbb:

$$\sim\sim A \Leftrightarrow A$$
$$A \supset B \Leftrightarrow \sim A \vee B$$
$$A \supset B \Leftrightarrow \sim(A \;\&\; \sim B)$$
$$A \;\&\; B \Leftrightarrow \sim(\sim A \vee \sim B)$$

$A \vee B \Leftrightarrow {\sim}({\sim}A \;\&\; {\sim}B)$
$A \equiv B \Leftrightarrow {\sim}(A \nabla B)$

Természetesen a lista folytatható lenne. Felmerül azonban a kérdés, hogy honnan tudjuk, hogy ezek az összefüggések valóban érvényesek, vagyis valóban logikai szinonimitást fejeznek ki? A válasz: könnyen ellenőrizhetjük őket igazságtáblázatok segítségével! Ehhez azonban egy kissé ki kell bővítenünk az egyes kötőszavakra vonatkozó igazságtáblázatokat.

Ellenőrizzük a lista harmadik összefüggését!

A	***B***	***~B***	***A&~B***	***~(A&~B)***	***A⊃B***
i	i	h	h	i	i
i	h	i	i	h	h
h	i	h	h	i	i
h	h	i	h	i	i

Az első két oszlop az elemi mondatok lehetséges igazságérték-kombinációit tünteti fel. A harmadik oszlopra azért van szükség, mert a „~(*A* & ~*B*)" formulában „~*B*" szerepel, és ezt az oszlopot egyszerűen úgy töltjük ki, hogy – a negáció igazságtáblázatát figyelembe véve – a „*B*"-hez tartozó oszlopban található értékeket rendre az ellenkezőjükre változtatjuk. A negyedik oszlop értékeit a konjunkció táblázata alapján, az első és a harmadik oszlop figyelembevételével határozzuk meg. (A konjunktív formula akkor igaz, ha mindkét „bemenete" igaz: ez a helyzet a második igazságérték-sorban, ám a többi sorban vagy *A*, vagy ~*B*, vagy mindkettő hamis, tehát a belőlük konjunkcióval képzett formula is hamis.) Az ötödik oszlopban található értékek a negyedik oszlop értékeinek ellentétei, hiszen az ötödik oszlophoz tartozó formula a negyedik oszlop formulájának negációja. Így megkaptuk „~(*A*&~*B*)" igazságtáblázatát. Végül a hatodik oszlopban „*A*⊃*B*" értékei szerepelnek, az első két oszlop alapján meghatározva a kondicionális igazságtáblázatának segítségével. Az ötödik és hatodik oszlopot összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy az igazságértékek sorról sorra megegyeznek, vagyis „*A* ⊃ *B*" és „~(*A* & ~*B*)" ugyanakkor igazak és hamisak, tehát ezek a formulák tényleg logikai szinonimák. (Hasonló módszerrel a többi összefüggés ugyanígy ellenőrizhető.)

Visszatérve arra a kérdésre, hogy hány kötőszóra van szükségünk: a fenti összefüggésekből kiolvasható, hogy tulajdonképpen kettő elég (pl. „~" és „&", vagy „~" és „v", vagy „~" és „⊃"), és a többi ezek segítségével definiálható. Sőt tudunk olyan (két „bemenetű") kötőszavakat meghatározni, amelyekből egyedül az összes többi (akárhány „bemenetű") kötőszó kifejezhető. Mivel ezek nem használatosak a természetes nyelvben, itt nem foglalkozunk velük.

2.4. Következtetések a kijelentéslogikában

Emlékezzünk vissza, hogy egy következtetést akkor mondunk érvényesnek, ha minden olyan esetben, amikor a premisszák igazak, a konklúzió is igaz. Az érvényes következtetés jelölésére vezessük be a „⇒" szimbólumot:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots \Rightarrow K$$

ahol P_1, P_2, P_3, … a premisszák, és *K* a konklúzió. (Megjegyzés: ez a szimbólum nem véletlenül hasonlít a logikai szinonimitás jeléhez („⇔"), amely tulajdonképpen egy mindkét irányban érvényes – egypremisszás – következtetési viszonyt fejez ki két formula között. Az a kifejezés, hogy „*A* ⇔ *B*" úgy is olvasható, hogy „*A* ⇒ *B*" és „*B* ⇒ *A*" egyszerre fennáll, így tehát ha *A* igaz, akkor *B* is igaz, és ha *B* igaz, akkor *A* is igaz. Tehát egyszerre igazak vagy hamisak.)

A kijelentéslogikában szinte minden elintézhető igazságtáblázatok segítségével. Így ezzel a módszerrel következtetések érvényességét is tudjuk ellenőrizni. Egyszerűen csak annyit kell tennünk, hogy megnézzük, a konklúzió tényleg minden olyan esetben igaz lesz-e, amikor a premisszák mind igazak. Lássunk erre egy példát! Az 1.3. szakaszban tárgyalt érvényes következtetési séma formalizálva így néz ki:

$A \supset B, A \Rightarrow B$ (a séma hagyományos neve: *modus ponens*)

Ezt a következőképpen ellenőrizhetjük a kondicionális igazságtáblázata segítségével:

A	***B***	***A⊃B***	
i	i	i	✓
i	h	h	
h	i	i	
h	h	i	

Magyarázat:
A következtetés két premisszája ($A \supset B$, A) a harmadik és az első oszlopban található. Ezek igazsága csak az első sorban teljesül egyszerre. Mivel ekkor a konklúzió (*B*, második oszlop) is igaz, a következtés érvényes.

Most lássunk egy olyan esetet, amikor a vizsgált következtetés érvénytelennek bizonyul! A fenti példa mellett tárgyalt érvénytelen következtetési séma: $A \supset B, B \Rightarrow A$. Ismét a kondicionális igazságtáblázatát alkalmazzuk. (Megjegyzés: a következtetés csak akkor érvényes, ha *minden* olyan esetben, amikor igazak a premisszák, a konklúzió is igaz. Itt nem ez lesz a helyzet.)

A	***B***	***A⊃B***	
i	i	i	✓
i	h	h	
h	i	i	∅
h	h	i	

Magyarázat:
A premisszák (2. és 3. oszlop) két esetben egyszerre igazak: az első és a harmadik sorban. Míg az első sorban a konklúzió (1. oszlop) igaz, a harmadikban hamis, vagyis a következtetés érvénytelen.

Következzék egy kissé bonyolultabb eset, egy másik hagyományos következtetési séma ellenőrzése:

$A \supset B, \sim B \Rightarrow \sim A$ (a séma hagyományos neve: *modus tollens*)

Ekkor a módszer annyival bővül, hogy mivel a premisszák nem szerepelnek közvetlenül a kondicionális igazságtáblázatán, ezért azokat is fel kell venni arra a negáció igazságtáblázatának felhasználásával:

A	***B***	***~B***	***~A***	***A⊃B***	
i	i	h	h	i	
i	h	i	h	h	
h	i	h	i	i	
h	h	i	i	i	✓

Magyarázat:
A premisszák (5. és 3. oszlop) csak az utolsó sorban egyszerre igazak. Ekkor azonban igaz a konklúzió (4. oszlop) is, vagyis a következtetés érvényes.

Számos érvényes következtetési séma létezik. A *modus ponens* és a *modus tollens* mellett ismerkedjünk meg néhánnyal (név nélkül):

$A \vee B, \sim B \Rightarrow A$
$\sim(A \,\&\, B), \mathrm{A} \Rightarrow \sim B$
$A \,\&\, B \Rightarrow A$
$A \Rightarrow A \vee B$
$A \supset B, B \supset C \Rightarrow A \supset C$
stb.

A gyakorlás kedvéért ellenőrizzük az utolsót ($A \supset B$, $B \supset C \Rightarrow A \supset C$)!

A	***B***	***C***	$A \supset B$	$B \supset C$	$A \supset C$	
i	i	i	i	i	i	✓
i	i	h	i	h	h	
i	h	i	h	i	i	
i	h	h	h	i	h	
h	i	i	i	i	i	✓
h	i	h	i	h	i	
h	h	i	i	i	i	✓
h	h	h	i	i	i	✓

Magyarázat: Azért volt szükség nyolc igazságérték-sorra a „szokásos” négy helyett, mert a kérdéses formulákban három különböző elemi kijelentés szerepel (*A*, *B* és *C*), és ezek nem négyféle-, hanem nyolcféleképpen vehetik fel a két igazságértéket (lásd az első három oszlopot). A második három oszlop igazságértékeit egyszerűen a kondicionális igazságtáblázatának segítségével határoztuk meg. Ezek után kiderül, hogy a két premissza (negyedik és ötödik oszlop) négy esetben is lehet egyszerre igaz (első, ötödik, hetedik és nyolcadik sor), ám mivel a konklúzió (hatodik oszlop) minden felsorolt esetben szintén igaz lesz, a következtetés érvényes.

Röviden megemlítjük a következtetések egy speciális fajtáját, az ún. nullapremisszás következtetéseket. Ha (1) egy következtetés akkor érvényes, ha a premisszák igazsága minden esetben együtt jár a konklúzió igazságával, és (2) megengedjük, hogy egy következtetésnek nulla premisszája legyen (vagyis csak egyetlen konklúzióból álljon), akkor egy nullapremisszás következtetés akkor érvényes, ha a konklúzió *mindig* igaz. A kérdés tehát az, vannak-e olyan formulák, amelyek mindig igazak. A válasz az, hogy vannak: pl. a „$A \supset A$” vagy a „$A \vee {\sim}A$” ilyenek. (Ezt igen könnyű belátni igazságtáblázatokkal, így ettől most eltekintünk.) Egy olyan formulát, amely mindig igaz, logikai igazságnak nevezünk, és így jelöljük: „$\Rightarrow A$”, jelezve, hogy ő már nulla premisszának is következménye. Az ún. logikai igazságok kitüntetettek egy adott logikai rendszerben, de számunkra most ennyi is elég róluk.

Könnyű belátni, hogy igazságtáblázatok segítségével bármilyen kijelentéslogikai következtetés érvényessége ellenőrizhető. A példákból talán az is látszik, hogy bár az elv egyszerű, a kivitelezés sokszor fáradtságos lehet. Egyfelől azért, mert minél több különböző elemi kijelentés szerepel a premisszákban, annál több sora van a táblázatnak (*n* db. elemi kijelentés esetén 2^n db. sor), másfelől azért, mert minél több a premissza (és minél összetettebbek), annál több az oszlop. Léteznek más módszerek is, amelyekkel az ilyen következtetések ellenőrizhetők, és sokszor ezek praktikusabbak az általunk megismertnél. Ám ez minket most nem érdekel: a lényeg az, hogy sikerült egy olyan logikai rendszert felépítenünk, amelyben formálisan meghatározhatjuk az érvényes következtetés fogalmát, és van olyan módszerünk is, amellyel minden, a rendszer nyelvén megfogalmazható következtetés érvényessége ellenőrizhető. És ez az, amit célként kitűztünk.

3. Az elsőrendű logika

3.1. Az elsőrendű logika szerkezeti elve, grammatikai kategóriái

A kijelentéslogika egy jól működő, ám igencsak korlátozott érvényességű logikai rendszer. Ugyanis ha a természetes nyelvi kijelentéseket aszerint próbáljuk megragadni, hogy az összetett kijelentések hogyan épülnek fel az elemi kijelentésekből (vagyis mi a viszony az igazságértékek között), akkor egy jól áttekinthető logikai elmélethez jutunk, ám ebben az elméletben viszonylag kevés, a természetes nyelvben előforduló következtetést tudunk logikailag rekonstruálni. Ahhoz, hogy többfajta következtetés hozzáférhetővé váljon, olyan logikai nyelven kell reprezentálni azokat, amely szerkezetileg összetettebb a kijelentéslogika nyelvénél, és így a természetes nyelv több strukturális elemét tudja logikailag kezelni. Célszerű lesz az elemi kijelentéseket nem felbontatlan egységeknek tekinteni, hiszen attól még, hogy mondatösszetétel szerint ezek nem bonthatók tovább, más szerkezeti elvek alapján összetettnek mutatkoznak. Így tehát először a további felbontás alapelvét kell meghatároznunk.

Az elsőrendű logika alapvető szerkezeti elve a funktor-argumentum elv. Minden összetett nyelvi kifejezést úgy bontunk fel, hogy megkeressük benne az ún. funktort, majd ennek argumentumát vagy argumentumait. Első megközelítésben a funktort olyan nyelvi kifejezésként határozhatjuk meg, amely „üres helyet tartalmaz", az argumentumot pedig olyanként, amely „üres helyet nem tartalmaz". (Mielőtt pontosítanánk, lássunk ismét egy analógiát a matematikából! Az „1", „2", stb. jelek számok jelei, és így önmagukban, lezártan vonatkoznak valamire, vagyis „üres helyet nem tartalmaznak". Ugyanígy a „2+3=5" is lezártan kifejez egy összefüggést, nincs „üres helye". Ezzel szemben a „…+2", „…=5", vagy akár a „…+…" jelek nem lezártak a kifejezés szempontjából, hanem olyan üres helyeket tartalmaznak – itt a könnyítés kedvéért kipontozással jelölve –, amelyeket megfelelő típusú jellel ki kell tölteni ahhoz, hogy a kifejezés lezártnak tekinthető legyen. Érdemes ezt a matematikai analógiát szem előtt tartani az alábbiakban.)

Az argumentumoknak két fajtája van. Ezek:

a) Név: Olyan nyelvi kifejezés, amelynek az a funkciója, hogy valamit (objektumot, személyt, egyedi dolgot, stb.) megnevezzen. Egy megnevezést kétféleképpen lehet megvalósítani: vagy „tulajdonnév" segítségével, amely pontosan a közvetlen megnevezésre szolgál (pl. „Albert Einstein", „5", stb.), vagy pedig „leírás" segítségével, amely nem közvetlenül nevez meg valamit, hanem összetetten (pl. „a relativitáselmélet megalkotója", „2+3", stb.).

b) Mondat: Olyan nyelvi kifejezés, amely „tényt, eseményt, stb." fejez ki, vagyis igazságértékkel rendelkezik. Ez tehát megegyezik azzal, amit a kijeletéslogikában „kijelentésnek" neveztünk, ám most a tömörség kedvéért (és hogy éreztessük, hogy itt egy másik logikai rendszerrel állunk szemben) áttérünk a „mondat" elnevezésre. (Valójában a továbbiakban ezeket szinonimaként fogjuk tekinteni.)

A funktoroknak is több típusa van. Ezeket az argumentumok típusainak segítségével lehet meghatározni. A továbbiakban azt fogjuk gondolni, hogy ha egy funktor üres helyét (vagy helyeit) kitöltjük argumentummal (-okkal), akkor egy újabb argumentumot kapunk. Minden funktor esetén tehát a következő kérdésekre kell válaszolni: (i) milyen argumentummal töltjük ki az üres helyet, (ii) milyen argumentumot kapunk a kitöltéssel, illetve (iii) hány üres helyet kellett kitöltenünk. Ezek szerint a funktorok főbb típusai a következők:

I. <u>Mondatfunktor</u>: Ha egy vagy több mondattal töltjük ki az egy vagy több üres helyet, akkor ugyancsak mondatot kapunk. Ha egy üres hely van, akkor egyargumentumú mondatfunktorról beszélünk, ha kettő, akkor kétargumentumúról, stb. Például a „Nem igaz, hogy …” funktor egy egyargumentumú mondatfunktor, mert az egyetlen üres helyre mondatot kell tenni (ha nevet tennénk, a kifejezés még nem válna „lezárttá”), és így eredményül szintén egy mondatot kapunk. Az „… és …” kétargumentumú mondatfunktor, könnyen belátható okokból. – Megjegyzés: látjuk, hogy a kijelentéslogika kötőszavai itt egy általánosabb szerkezeti elvnek megfelelően mondatfunktorok lesznek. Ezeken kívül más mondatfunktorra a továbbiakban nem is lesz szükségünk.

II. <u>Predikátum</u>: Ha egy vagy több névvel töltjük ki az egy vagy több üres helyet, akkor eredményül mondatot kapunk. Egyargumentumú predikátum pl. az, hogy „… beteg”, mert az üres helyre nyilvánvalóan név szükséges (akár tulajdonnév, akár leírás), és az eredményül mondatot kapunk (pl. „Szókratész beteg.”). Kétargumentumú predikátum a „… magasabb, mint …”, vagy a „… szereti …-t”, ugyanis itt az üres helyekre egy-egy nevet kell tenni ahhoz, hogy mondatot kapjunk. A továbbiakban az egyargumentumú predikátumokat tulajdonságnak, a kétargumentumúakat pedig relációnak fogjuk nevezni. (Magasabb argumentumszámú predikátumokat itt nem tárgyalunk, bár ez nyilvánvalóan nem ütközne semmi nehézségbe, csak éppen fölösleges lenne.)

Világos, hogy a funktoroknak elképzelhetők más típusai is, ám ezekkel mi nem foglalkozunk. Megemlíthetjük a még következő eseteket:

III. Névfunktor: Ha egy vagy több névvel töltjük ki az egy vagy több üres helyet, akkor eredményül nevet kapunk. Ez tulajdonképpen az összetett nevek (leírások) képzésének elve. Pl. az „… apja” egy egyargumentumú névfunktor: az üres helyet kitöltjük azzal, hogy „Brutus”, és az eredmény a „Brutus apja” leírás lesz, amely Caesart nevezi meg. A „… + …” kétargumentumú névfunktor, mert két nevet („2”, „3”) betéve egy újabb nevet („2+3”) kapunk. Az utóbbi példa azt sugallja, hogy ez a típus fontos lehet pl. a matematika logikai kezelésére, ám az egyszerűség kedvéért mi itt eltekintünk tőle.

IV. Szubnektor: Ha egy vagy több mondattal töltjük ki az egy vagy több üres helyet, akkor eredményül nevet kapunk. Ez a negyedik elvi lehetőség azonban a természetes nyelvben nem jelenik meg, vagy csak néhány nagyon speciális esetben, így nincs rá szükségünk.

V. Vegyes bemenetű funktorok: Az is elképzelhető, hogy legalább két üres hely esetén ezeket különböző argumentumokkal kell kitölteni. Pl. „… tudja, hogy …” funktor első üres helye névvel, a második mondattal töltendő ki. A továbbiakban érdemes ettől a lehetőségtől is eltekintenünk.

3.2. Formulák az elsőrendű logikában

A formalizált mondatokat az elsőrendű logikában is formuláknak nevezzük. Ahhoz, hogy formulákat tudjunk létrehozni, először meg kell állapodnunk abban, hogy az előzőekben tárgyalt kifejezéseket hogyan jelöljük az elsőrendű logika nyelvében. Fontos, hogy csak a felbontatlannak tekintett kifejezéseknek kell jelet találnunk, hiszen az összetett kifejezések ezekből a jelekből fognak összeállni. Nézzük végig a kifejezéseinket! Az argumentumok közül a mondat mindig felbontható, tehát ennek önálló jele nincs. A nevek közül a leírások szintén összetettek (bár mivel mi nem foglalkozunk névfunktorokkal, az összetett neveket (leírásokat) sem tudjuk felbontani, ezért a továbbiakban azokat is tulajdonnévnek, vagyis felbontatlannak tekintjük). Így a tulajdonnév az egyetlen olyan argumentum, amely felbonthatatlan és ezért külön jelre szorul. Ha a funktorokat tekintjük, a mondatfunktorok felbontatlanok, ám ezeknek már volt jele a kijelentéslogikában, így érdemes itt ugyanezeket használni. A predikátumoknak (tulajdonságok, relációk) viszont jelet kell találnunk. Összességében tehát a jeleknek csak két új típusát kell bevezetnünk:

- *a*, *b*, *c*, stb.: (tulajdon)nevek,
- *A*, *B*, *C*, stb.: predikátumok (argumentumok, relációk).

(Megjegyzés: bár a kijelentéslogikában az *A*, *B*, *C*, stb. betűket elemi kijelentések jelölésére használtuk, ez itt nem okozhat zavart, ugyanis az elsőrendű logikában nincsenek felbontatlan mondataink, tehát nem kell őket külön jelölnünk.)

Ahelyett, hogy általánosan meghatároznánk az elsőrendű logika nyelvének „grammatikai" szabályait, vagyis formálisan megmondanánk, hogyan épülhetnek fel a formulák a jelkészletből, az alábbiakban néhány példa segítségével tisztázzuk ezeket a kérdéseket.

Természetes nyelvi mondat	**Formula**	**Megjegyzés**
Józsi dühös.	$D(j)$	*D*: dühös, *j*: Józsi. Az argumentum zárójelben.
Rómeó szereti Júliát.	$S(r, j)$	A két argumentum egy zárólejben. (Sorrend!!!)
Legolas és Gimli bátor.	$B(l)$ & $B(g)$	Az „és" nem nevek, hanem mondatok között.
Ha Legolas vitézebb, mint Gimli, akkor legyőzi a legerősebb orkot.	$V(l, g) \supset L(l, o)$	A „legerősebb ork" kifejezés egy leírás, de itt tulajdonnévnek tekintjük: *o*

Vajon hány jelet kell bevezetnünk nevek, tulajdonságok és relációk jelölésére? Annyit, amennyi a kérdéses kifejezésekből a formalizálásra szánt szövegben található. (Ha valaki aggódik, hogy az ábécé betűi nincsenek elegendően sokan, akkor az olvassa el a 2.1. szakasz végén az erre vonatkozó megjegyzést.) A fenti példákban azt a konvenciót követtük, hogy a jelölésre szánt természetes nyelvi kifejezéseket első betűjükkel jelöltük. Ez természetesen csupán egy kényelmes konvenció, ám ha egyazon szövegben több, egymástól eltérő, ám ugyanolyan betűvel kezdődő kifejezés található, akkor ezt a konvenciót meg kell szegni.

3.3. A kvantifikáció

Az elsőrendű logika nem csak arra a feladatra alkalmas, hogy segítségével külön kezeljük a „dolgokat" a „tulajdonságaiktól" és „viszonyaiktól", hanem ezen keresztül további kifejezésformákat is képes érvényre juttatni. Alkalmas arra, hogy egy mondat nem egy konkrét (névvel megnevezett) dologról tegyen állítást, hanem dolgoknak különböző csoportjairól. Ezt a kvantifikációnak nevezett művelet segítségével éri el.

Tekintsük a következő példát! Miután képesek vagyunk kifejezni, hogy pl. „Szókratész halandó.": $H(s)$, vagy hogy „Einstein halandó.": $H(e)$, szeretnénk valahogyan azt is formalizálni, hogy „Minden ember halandó.". Az eddigiek alapján azt tudjuk megállapítani, hogy a „halandó" egy egyargumentumú predikátum (H) és az „ember" úgyszintén (E). Nem tudjuk azonban, hogy a „minden" szót hogyan kell kezelnünk. Először tárjuk fel a mondat rejtett logikai szerkezetét! Vegyük észre, hogy ez egy rejtett kondicionálisként is felfogható: „Ha valaki ember, akkor ő halandó." Mivel ez a valaki nem egy konkrét személy, ezért jelöljük „x"-szel, és a mondatunk így írható: „$E(x) \supset H(x)$" . Azt a tényt, hogy x bárkire vonatkozhat, a „$\forall x$" jellel fejezzük ki:

$$\forall x(E(x) \supset H(x))$$

A „$\forall$” az ún. univerzális kvantor jele, amely a természetes nyelv „minden” vagy „bármely” kifejezéseinek felel meg. A fenti formulában ezt „x” követi, amelyik azt fejezi ki, hogy az ezután következő kifejezés x bármilyen „értékére” érvényes. Vajon tényleg bármilyenre? Tételezzük fel, hogy x helyére a világ egy olyan dolgát helyettesítjük be, amelyre igaz, hogy ő ember. Ekkor a „$E(x) \supset H(x)$” kifejezés előtagja igaz lesz (mert x ember), és az utótag is igaz (mert ebben az esetben x halandó). Ha pedig egy kondicionális előtagja és utótagja is igaz, akkor a teljes mondat igaz. Most viszont tegyük fel, hogy x helyére nem egy embert, hanem valami mást helyettesítünk. Ekkor „$E(x)$” hamis lesz, és így a teljes kondicionális biztosan igaz, függetlenül az utótag igazságértékétől (lásd a kondicionális igazságtáblázatát). Vagyis a fenti formula x bármilyen értéke mellett igaz, így jól kifejezi a kérdéses összefüggést.

Most lássunk egy másik példát! Szeretnénk azt állítani, hogy „Van olyan macska, amelyik kopasz.”, azonban anélkül, hogy ehhez egy konkrét macskára kellene hivatkozni. Az előző gondolatmenet alapján most így fogunk hozzá: a mondat egy rejtett konjunkció, hiszen azt állítja, hogy a „$M(x)$ & $K(x)$” kifejezés igaz x valamely értékére. Ez utóbbi körülményt a „$\exists x$” jellel fejezzük ki:

$$\exists x(M(x) \,\&\, K(x))$$

A „$\exists$” jelöli az ún. egzisztenciális kvantort, és a természetes nyelvben ennek a „van olyan”, „létezik”, „némelyik” kifejezések felelnek meg. Az ezt követő „x” annak kifejezésére szolgál, hogy van legalább egy olyan dolog, amelyet a konjunktív kifejezésben x helyére helyettesítve igaz formulát kapunk. (Pl. legyen egy kopasz macska neve „Ramszesz”: ekkor az „$M(r)$ & $K(r)$” formula igaz, tehát „$\exists x(M(x) \,\&\, K(x))$” is igaz.)

Az elsőrendű logikában a fenti két kvantor (vagyis az univerzális és az egzisztenciális) használatos. A kvantor használata az ún. kvantifikáció. A kvantorok alkalmazásakor azonban használtuk az „x” jelet is, amelyről még nem mondtuk meg, hogy micsoda. Bár egy kisbetűről van szó, mégsem lehet egyszerűen tulajdonnév, mert nem egy konkrét dolgot nevez meg, hanem éppen ellenkezőleg, általánosan jelöl, és pontos hatókörét a rá vonatkozó kvantor dönti el. Mivel tehát x „értéke” nem rögzített, ezért x-et egy változónak nevezzük. A továbbiakban egyezzünk meg, hogy x-et (és y-t, mivel több változóra is szükség lesz majd) nem nevekként használjuk, hanem változókként. Egy változó egy formulában kétféle okból szerepel: egyrészt közvetlenül a kvantor után, hogy megmutassa, a kvantor mely további változókra vonatkozik (hiszen több is lehet egy formulában), másrészt a későbbiekben azokon a helyeken, ahol a kvantor őrá vonatkozik.

Az alábbiakban lássunk néhány példát a kvantorok segítségével történő formalizálásra!

Természetes nyelvi mondat	**Formula**	**Megjegyzés**
Minden arany, ami fénylik.	$\forall x(F(x) \supset A(x))$	A kondicionális iránya nem feltétlenül követi a nyelvi kifejezés sorrendjét.
Nem mind arany, ami fénylik.	$\sim\forall x(F(x) \supset A(x))$	A kvantoros formula is formula, tehát pl. negálható.
Minden macska nem növény,	$\forall x(M(x) \supset \sim N(x))$	A kondicionális részei formuláknak tekinthetők, tehát pl. külön negálhatók.
Nincs olyan macska, amelyik növény.	$\sim\exists x(M(x) \,\&\, N(x))$	Ez ugyanazt jelenti, mint az előző példa.

Az utolsó két példa rámutat arra, hogy ugyanazt a mondatot kifejezhetjük univerzális és egzisztenciális kvantorral is. Az alapvető összefüggések a következők:

$\forall x(A(x) \supset B(x)) \;\Leftrightarrow\; \sim\exists x(A(x) \,\&\, \sim B(x))$

(„Minden aligátor buta.” $\Leftrightarrow$ „Nincs olyan aligátor, amelyik nem buta.”)

$\exists x(C(x) \,\&\, D(x)) \;\Leftrightarrow\; \sim\forall x(C(x) \supset \sim D(x))$

(„Van olyan cápa, amelyik dorombol.” $\Leftrightarrow$ „Nem minden cápa nem dorombol.”)

Folytassuk a példákat kissé összetettebb esetekkel!

Természetes nyelvi mondat	Formula	Megjegyzés
Vannak repülő- és futómadarak.	$\exists x(M(x)$ & $R(x))$ & $\exists x(M(x)$ & $F(x))$	A „külső” konjunkció két kvantoros formulát választ el: ez két külön mondat.
Malacka mindenkinél kisebb.	$\forall x\ K(m, x)$	Értsd: Mindenkire igaz, hogy Malacka kisebb nála.
Malacka mindenkinél kisebb, aki idősebb Zsebibabánál.	$\forall x(I(x, z) \supset K(m, x))$	Értsd: Mindenkire igaz, hogy ha ő idősebb Zsebibabánál, akkor Malacka kisebb őnála.

Végül szerepeljen egy olyan példa is, amelyben két kvantor és két változó használatos:

Minden számnál létezik nagyobb szám: $\forall x(S(x) \supset \exists y(S(y)$ & $N(y, x)))$
„Szó szerint” kiolvasva: Minden dologra igaz, hogy amennyiben ő szám, úgy létezik egy másik dolog, amely szintén szám, és amely nagyobb nála.

3.4. Az elsőrendű logika nyelve

Összefoglalva az eddigieket, az elsőrendű logika nyelvében a következő jelek szerepelnek:

~, $\supset$, **&**, **v** [*stb.*],	$\exists$, $\forall$,	**(**, **)**,	***a***, ***b***, ***c***, **…**,	***A***, ***B***, ***C***, **…**,	***x***, ***y***, **…**
logikai kötőszavak	kvantorok	segédjelek	(tulajdon)nevek	tulajdonságok, relációk	változók

Az első három csoport (kötőszavak, kvantorok, segédjelek) tartalmazza az ún. logikai jeleket, míg a második két csoportba (nevek, predikátumok) tartoznak az ún. nem-logikai jelek. (A változók egy harmadik csoportot alkotnak.) A logikai jelek felelősek a formalizált kifejezés logikai szerkezetéért: ez az, amit a bevezető szakaszban a kifejezés „formájának” neveztünk. A nem-logikai jelek rövidítik azokat a természetes nyelvi kifejezéseket, amelyeknek a tartalmától a formális logikában eltekintünk, és amelyeket változtathatónak gondolunk a forma megőrzése mellett. A következtetések érvényessége a formán, azaz a logikai jeleken múlik.

3.5. Szillogisztikus következtetések

Minthogy sikerült megállapítanunk, mely jelek felelősek a következtetések érvényességéért, a következő feladat az lenne, hogy felépítsünk egy módszert, amelynek segítségével a következtetések érvényessége ellenőrizhető. Ez persze nem olyan egyszerű, mint a kijelentéslogikában, hiszen a következtetések itt nemcsak a mondatösszetétel elvei alapján lehetnek érvényesek, hanem számos további szempont is szerepet játszhat. A leggyakrabban használt módszerek nem kifejezetten bonyolultak, ám számunkra mégis szükségtelen erőfeszítéseket követelne az elsajátításuk. Ehelyett a továbbiakban megismerkedünk egy olyan módszerrel, amelynek segítségével bizonyos (viszonylag gyakori) elsőrendű következtetések érvényessége könnyen és szemléletesen ellenőrizhető. Meg kell jegyezni, hogy ez a módszer annyira „intuitív”, hogy nem is használja ki a formulák logikai alakját, ám a gyakorlás kedvéért mi mindvégig formalizálni fogunk.

Az ún. szillogisztikus következtetésekkel foglalkozunk. A történelem első logikai elmélete (Arisztotelész, i.e. 4. sz.) pontosan ezeket a következtetési formákat vizsgálta, és a szerzője szillogizmusoknak nevezte őket. (Ez a szó egészen a modern logika elterjedéséig, tehát mintegy száz évvel ezelőttig általában a helyes következtetési formákat jelölte.) Mi azonban nem az ókori módszerekkel vizsgáljuk a szillogizmusokat, hanem modern eszközökkel.

Szillogizmusnak nevezünk egy következtetést, ha a következő feltételeket kielégíti: (1) két premisszája van, (2) mindkét premissza és a konklúzió egyaránt kvantifikált, és (3) a mondatokban nem-logikai jelként összesen három tulajdonság (és egyetlen reláció vagy név sem) szerepel, méghozzá a három mondatban „első-második”, „második-harmadik”, illetve „első-harmadik” elosztásban. A szillogisztikus következtetés fogalma ennél kissé tágabb, pl. több premisszát is megenged, ám mi a továbbiakban csak a szűken vett szillogizmusokkal foglalkozunk.

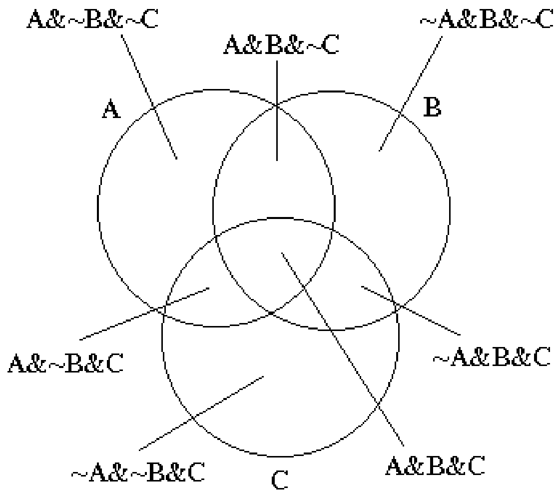
Induljunk ki egy példából!

Minden holló madár.	$\forall x(H(x) \supset M(x))$
Minden madár állat.	$\forall x(M(x) \supset A(x))$
Minden holló állat.	$\forall x(H(x) \supset A(x))$

Az intuíciónk azt súgja, hogy ez a következtetés érvényes. Ha indokolni szeretnénk a megérzésünket, akkor talán arra hivatkozhatunk, hogy a fenti mondatok bizonyos tulajdonságok terjedelmei közötti viszonyokat fejeznek ki. Az első mondat például azt mondja, hogy a „madár” tulajdonság terjedelme legalább olyan tág, mint a „holló” tulajdonság terjedelme, vagyis a hollók osztálya része a madarak osztályának. A második szerint ugyanez fennáll a madarak és az állatok között. Ám ha a hollók osztálya része a madarak osztályának, és a madarak osztálya része az állatok osztályának, akkor az is világos, hogy a hollók osztálya része az állatok osztályának is.

Erre a terjedelmi viszonyokra vonatkozó intuícióra épül az ún. Venn-diagrammok módszere. Ez a következő lépések mentén halad:

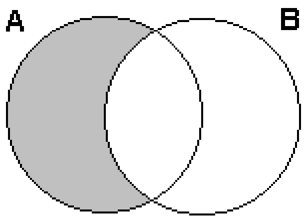
1. A szillogizmusban szereplő három tulajdonság terjedelmét egy-egy zárt síkidommal (pl. körrel) ábrázoljuk, úgy, hogy minden síkidomnak mindegyik másikhoz mérten legyen közös és különálló része is. Pl.:

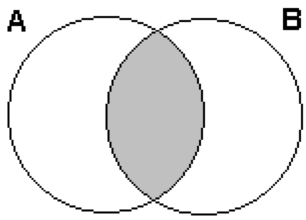


2. A második lépésben egy-egy tulajdonságpár terjedelmi viszonyait ábrázoljuk. Ez kétféle lehet:

   a) A tulajdonságpár által meghatározott síkidom üres. Ezért azt kisatírozzuk, jelezve, hogy ott semmi sem lehet. A két alapeset:

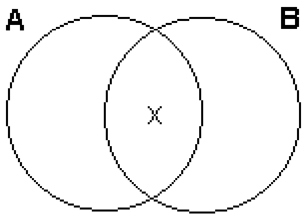
   $\forall x(A(x) \supset B(x))$, azaz $\sim\exists x(A(x) \,\&\, \sim B(x))$ $\sim\exists x(A(x) \,\&\, B(x))$, azaz $\forall x(A(x) \supset \sim B(x))$

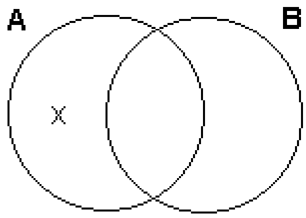




   b) A tulajdonságpár által meghatározott síkidom nemüres. Ezért oda egy *x* jelet teszünk, jelezve, hogy ott mindenképpen van valami. A két alapeset:

   $\exists x(A(x) \,\&\, B(x))$, azaz $\sim\forall x(A(x) \supset \sim B(x))$ $\exists x(A(x) \,\&\, \sim B(x))$, azaz $\sim\forall x(A(x) \supset B(x))$

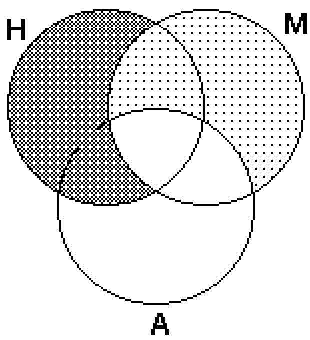




3. Ha mindkét premisszát a fenti módon felhasználtuk, akkor az ábráról „leolvasható” a konklúzió érvényessége.

Az alábbiakban néhány példával illusztráljuk a módszer működését.

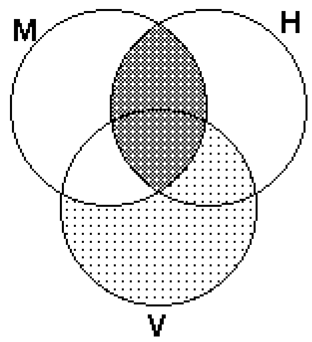
1. példa. Ellenőrizzük a szakasz elején bevezetett „hollós” következtetés érvényességét!



Magyarázat:
Az első premisszának felel meg a sötétebb satírozás, hiszen e szerint nincs olyan holló, amelyik ne lenne madár. A második premisszának a világosabb satírozás felel meg. és ez kifejezi, hogy nem létezik olyan madár, amelyik ne lenne állat. Ezek alapján ellenőrizhetjük a konklúziót: az azt állítja, hogy nincs olyan holló, amelyik ne lenne állat. Két olyan tartomány van, amelyen a nem-állat hollók ábrázolhatók (H & ~M & ~A, illetve H & M & ~A), ám mivel mindkettőt besatíroztuk a premisszák miatt, mindkettő üresnek bizonyult, tehát a konklúzió érvényessége leolvasható.

2. példa

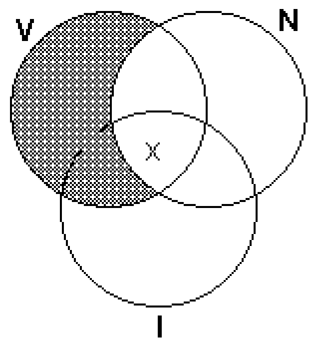
Nincs olyan méhész, aki horgász.	$\sim\exists x(M(x) \,\&\, H(x))$
Minden vadász méhész.	$\forall x(V(x) \supset M(x))$
Minden horgász nem vadász.	$\forall x(H(x) \supset \sim V(x))$



Magyarázat: Az első premisszát a sötétebb, a másodikat a világosabb satírozás mutatja. A konklúzió szerint nincsenek olyan dolgok, amelyek egyszerre vadászok és horgászok, és ez valóban teljesül, mert a két kérdéses tartomány (M & H & V, illetve ~M & H & V) a premisszák alapján már üresnek bizonyult.

3. példa

Minden vizsga nehéz.	$\forall x(V(x) \supset N(x))$
Vannak írásbeli vizsgák.	$\exists x(I(x) \,\&\, V(x))$
Van olyan írásbeli, amelyik nehéz.	$\exists x(I(x) \,\&\, N(x))$

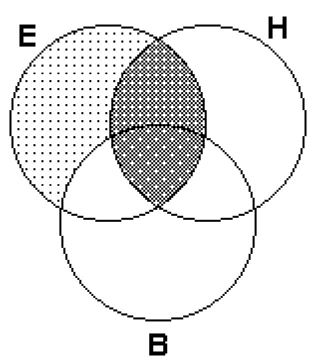


Magyarázat: Az első premissza üres terjedelmet állít, a második nemüreset (x). Az utóbbi csak egy tartományon érvényesülhet (V & N & I), hiszen a másik (V & ~N & I) már üresnek bizonyult. Ezek után a konklúzió világosan érvényes, hiszen ha a középső tartomány (V & N & I) nemüres, akkor nyilvánvalóan vannak egyszerre *N* és *I* tulajdonságú dolgok.

Megjegyzés: Ez a példa mutatja, hogy a premisszák ábrázolásának sorrendjét érdemes jól megválasztani. Hiszen egy nemüres tulajdonságpárhoz két síkidom is tartozik (a példában a második premisszához tartozik V & ~N & I, valamint V & N & I), és nem tudjuk, hogy az *x*-et melyikbe kellene tenni. Ha azonban az egyiket már üresnek találtuk egy másik premissza alapján, akkor a választás egyértelmű. A tanulság az, hogy ha lehet, akkor mindig először az üres terjedelmet állító premisszát ábrázoljuk, és a nemürességre vonatkozót a végére hagyjuk.

4. példa

Egyetlen ember sem halhatatlan.	$\sim\exists x(E(x) \,\&\, H(x))$
Minden ember bűnös.	$\forall x(E(x) \supset B(x))$
Létezik bűnös, aki nem halhatatlan.	$\exists x(B(x) \,\&\, \sim H(x))$



Magyarázat: Az első premissza üresnek állít két tartományt (E & H & B, illetve E & H & ~B). A második ugyanezt teszi (ugyancsak E & H & ~B, valamint E & ~H & ~B). A konklúzió érvényességéhez az kell, hogy két tartomány (E & ~H & B, ~E & ~H & B) valamelyikéről tudjuk, hogy nemüres, vagyis van ott valami. Mivel ezt nem tudjuk, a következtetés nem érvényes.

Megjegyzés: A példa tanulsága a következő: attól még, hogy egy tartományról nem tudjuk azt, hogy üres, nem szabad rögtön arra gondolnunk, hogy nemüres. Más szóval, ha a premisszák egyike sem állít semmit egy adott tartományról, akkor arról semmit sem tudunk.

Az ember hajlamos lenne ennél a példánál úgy gondolkodni, hogy a konklúziónak nem mond ellent semmi, hiszen az két tartományban (E & ~H & B, ~E & ~H & B) is teljesülhet, amelyek egyike sem bizonyult üresnek. Igen ám, de nemüresnek sem bizonyultak, ugyanis egyik premissza sem állított nemürességet. Ahhoz tehát, hogy valaminek a „létezését" konklúzióként levonhassuk, kell, hogy a premisszák között is legyen „létezési" állítás.

A példa mindazonáltal intuitíve érvényes következtetésnek tűnik. Ennek oka az, hogy hallgatólagosan feltesszük, hogy léteznek emberek. Ha ezt az állítást úgy tekintjük, mint a fenti következtetés egy harmadik premisszáját: $\exists x\ E(x)$, akkor ugyan már nem egy szigorúan vett szillogizmussal van dolgunk, de a fenti módszerrel ezt is tudjuk kezelni. Ha ezt a harmadik premisszát megpróbáljuk a fenti diagrammon ábrázolni, akkor csakis egy tartomány jöhet szóba (E & ~H & B), mert az *E* kör többi része már biztosan üres. Tehát ha most a maradék helyre teszünk egy *x*-et, akkor a következtetés érvényes lesz, mert ez az *x* kielégíti egyben a konklúziót is.

4. A logika szintaktikai felépítése

4.1. Szintaxis és szemantika

Az eddigiekben megismerkedtünk a kijelentéslogikával és az elsőrendű logikával. Ezeket a logikai rendszereket úgy próbáltuk felépíteni, hogy az minél közelebb álljon valamiféle „hétköznapi" intuícióhoz, vagyis elsődleges célként azt tartottuk szem előtt, hogy a logikai nyelvünk minél pontosabban tudja reprezentálni a természetes nyelv bizonyos vonatkozásait. Más szóval a természetes nyelv irányából haladtunk egyfajta logikai elvonatkoztatás útján, amely során megkülönböztettük egyfelől azokat a kifejezéseket, amelyek logikai szempontból érdekesek, de pontosabb meghatározásra szorulnak, másfelől azokat, amelyek logikai szempontból érdektelenek, ezért jelentésüktől eltekinthetünk. Azonban nem tekintettünk el annak *lehetőségétől*, hogy a szimbólumaink jelentsenek valamit, vagyis vonatkozzanak valamire, mert biztosítani akartuk, hogy a formalizált kijelentéseknek (vagyis formuláknak) elviekben igazságértéket tudjunk tulajdonítani. Az igazságértékekre feltétlenül szükségünk volt (még ha ezt nem is használtuk ki az elsőrendű logika esetén, ahol a következtetéseknek egy igen szűk csoportjával foglalkoztunk), ugyanis ezek segítségével definiáltuk az érvényes következtetés fogalmát. Szimbólumainkat tehát valójában mintegy rövidítéseknek tekintettük.

Ha azonban végképp el kívánunk tekinteni attól, hogy a logikai nyelvünk vonatkozik valamire, és csakis önmagukban szeretnénk vizsgálni a logikai rendszereket, akkor a nyelvükön létrehozott kifejezésekre akár úgy is tekinthetünk, mint értelmetlen jelsorozatokra, amelyeknek pusztán bizonyos formai követelményeknek kell eleget tenniük (amelyek megmondják, hogy mely jelek mely jeleket követhetnek). Ha például a formuláink értelmetlen jelsorozatok (vagyis a „jel" itt nem valaminek a jele, hanem csak egy meghatározott „ábra"), akkor nemcsak hogy jelentésük nincsen, hanem természetesen igazságértékük sem, hiszen nem létezik olyan, rajtuk kívül álló „tény", amelyet kifejeznének. Látni fogjuk, hogy egy logikai rendszer ilyen módon, tehát teljesen formálisan is felépíthető, és bár a következtetés klasszikus fogalmát itt nem tudjuk értelmezni, ez a fogalom sikeresen helyettesíthető mással.

A logika tudományában megkülönböztetjük egymástól a szintaktikai és a szemantikai kérdéseket. A <u>szintaxis</u> területére tartoznak azok a kérdések, amelyek a mesterséges nyelv „grammatikai" szabályaival állnak kapcsolatban, vagyis azt vizsgálják, hogy a rendelkezésre álló jelkészletből hogyan lehet szabályosnak tekintett kifejezéseket létrehozni, és ezek milyen szabályok alapján alakíthatók át további szabályos kifejezésekké. Ezzel szemben a <u>szemantika</u> azokat a kérdéseket vizsgálja, amelyek a kifejezések jelentésével, igazságával állnak kapcsolatban, vagyis azzal a móddal, ahogyan a nyelvi kifejezések egy nyelven kívüli „valóságra" vonatkoznak.

Az eddigiek során mi elsősorban szemantikai szemszögből közelítettünk a logikához, amennyiben a kiindulási pontként kitűzött következtetés-meghatározásunk egy ízig-vérig szemantikai fogalomra, az igazság fogalmára támaszkodott. Természetesen nem tekinthettünk el teljesen a szintaktikai kérdésektől sem, hiszen fel kellett építenünk a logikai nyelveket, ám a felépítés során a lehető legkevésbé voltunk szigorúak és szabatosak, és nagymértékben támaszkodtunk az intuícióra. A továbbiakban azonban szintaktikai problémákat vizsgálunk, és a következő kérdésekre keressük a választ: (1) Hogyan kell egy logikai rendszert tisztán szintaktikai úton felépíteni, és mi helyettesíti ekkor a következtetés fogalmát? (2) Hogyan építhető fel szintaktikai úton egy általunk már vizsgált logikai rendszer, pl. a kijelentéslogika? (3) Mi a viszony egy logikai rendszer tisztán szintaktikai, illetve részben szemantikai felépítése között?

4.2. A logikai kalkulus

A szintaktikai felépítésben tehát a szimbolikus nyelv kifejezéseinek szerkezeti elveit kell meghatározni, miközben értelmetlen jelsorozatoknak tekintjük azokat. Először arra a kérdésre kell választ adnunk, hogy hogyan építhetők fel szabályos kifejezések, aztán pedig arra, hogy ezek a kifejezések milyen szabályok alapján alakíthatók tovább (pl. egymásba). Az első feladatnak úgy teszünk eleget, hogy meghatározzuk a logika nyelvét, a másodiknak pedig úgy, hogy meghatározzuk a levezetés fogalmát. Egy logikai rendszer tisztán szintaktikai felépítését kalkulusnak nevezzük.

Egy kalkulus felépítése a következő lépések mentén halad:

1. A **nyelv** megadása. Ezt két pontban végezzük el:

   a) Megadjuk a szimbólumok készletét, vagyis az ábécét. – Ehhez lásd pl. a 3.4. fejezetet, ahol megadtuk az elsőrendű logika ábécéjét.
   b) Megadjuk a szimbólumok egymás mellé írásának szabályait, vagyis a grammatikai szabályokat. – Ilyesmit eddig nem tettünk, csak megjegyeztük, hogy a különböző jelek nem akármilyen sorrendben követhetik egymást. Ennek a feladatnak úgy célszerű eleget tenni, hogy megadjuk azokat a konstrukciós szabályokat, amelyek mentén a kifejezések (pl. formulák) a jelekből felépíthetők.

2. A **levezetés** fogalmának megadása. A levezetés fogja valamilyen értelemben helyettesíteni a következtetés fogalmát. Itt is lesznek „premisszáink” (kiinduló formulák), illetve „konklúziónk” (amelyet a kiinduló formulákból levezettünk), csak éppen ezek viszonyát itt pusztán szintaktikai terepen tudjuk biztosítani, vagyis azáltal, hogy megmutatjuk, a „konklúzió” szabályos grammatikai átalakítások sorozatával levezethető a „premisszákból”. Ehhez két lépés szükséges:

   a) Meghatározzuk az adott logikai rendszer alapformuláit vagy axiómáit. – Ahhoz ugyanis, hogy levezetéseket konstruálhassunk, szükség van bizonyos kiinduló formulákra, amelyek az adott logikai rendszerre jellemzőek. A levezetett formuláink mindig egy bizonyos értelemben „kompatibilisek” lesznek az axiómákkal, vagyis ezek az axiómák behatárolják a szabályos kifejezéseken belül azon formulák körét, amelyek egy adott logikai rendszerben „elfogadhatók” (ha már kizártuk az „igazság” fogalmát).
   b) Megadjuk a levezetési szabályokat. – Vagyis meghatározzuk, hogy egy levezetésben milyen feltételek mellett szerepelhet egy formula, és ezen belül pedig azt, hogy a korábbi formulákból hogyan hozhatunk létre – szintaktikai átalakításokkal – további formulákat.

Az alábbiakban lássunk ezekre egy ismerős példát!

4.3. A kijeletéslogika kalkulusa

1.a. A kijelentéslogika ábécéje

A kijelentéslogika ábécéjét még nem szedtük össze módszeresen, ám ezt könnyen megtehetjük a 2.1.-2.3. fejezetek alapján. Az eddigiekhez képest azonban most egy kissé szűkített ábécével fogunk dolgozni, amely a következő:

~, $\supset$,	(,),	***A***, ***B***, ***C***, …
kötőszavak	segédjelek	elemi kijelentések

Az újdonság abban áll, hogy csak két kötőszavunk van. Ezt az indokolja, hogy ily módon nyelv természetesen jóval egyszerűbbé válik. Ha valakinek szüksége van további kötőszavakra is, akkor azok a meglévő kettő segítségével könnyen definiálhatók a 2.3. fejezetben megadott összefüggések alapján: Pl. $A \& B = \sim(A \supset \sim B)$, $A \vee B = \sim A \supset B$, stb. (Megjegyzendő, hogy itt a „=" jelet használjuk, hiszen a „$\Leftrightarrow$" jel itt nem szerepelhet, az ugyanis szemantikai alapon került meghatározásra. A „=" jel pontos jelentését nem szükséges meghatároznunk.) Természetesen választhattunk volna két másik kötőszót is (pl. „~" és „&", vagy „~" és „v"), és akkor a további felépítés kissé máshogyan nézne ki, ám ahogy az kimutatható, a végeredmény akkor is ugyanaz volna.

1.b. A kijelentéslogika formuláinak felépítése

Itt azt kell megmondanunk, hogy az ábécé elemeiből hogyan hozhatunk létre szabályos kifejezéseket. A kijelentéslogikában csakis kijelentések lehetnek lezárt nyelvi kifejezések, más szóval a formulák alkotják a szabályos kifejezések egyetlen típusát. Vagyis meg kell határoznunk, hogy hogyan néz ki egy szabályos formula. Ezt úgy érhetjük el a legegyszerűbben, ha megmutatjuk, mely lépésekkel hozhatunk létre formulákat az egyszerűbb elemekből. Így szabályaink a következők lesznek.

1. *A*, *B*, *C*, stb. formula.
2. Ha *X* egy formula, akkor $(\sim X)$ is egy formula.
3. Ha *X* és *Y* formulák, akkor $(X \supset Y)$ is egy formula.
4. Más módon nem lehet formulát előállítani.

Vizsgáljuk meg részletesebben ezeket a szabályokat! Az első azt mondja ki, hogy az elemi kijelentéseink formulák. Korábban ugyanis azt mondtuk, hogy a formulák formalizált kijelentések, és mivel az elemi kijelentés is kijelentés, az őt jelölő betű is egy formula lesz. A második azt állítja, hogy ha egy formulát negálunk, akkor egy másik formulát kapunk. (Megjegyzés: „*X*" itt nem egy elemi kijelentés, hanem egyfajta változó: azt fejezi ki, hogy a helyén bármilyen formula állhat. Ez nem a kijelentéslogika nyelvének egy szimbóluma, hanem annak a nyelvnek egy változója, amelyben a kijelentéslogik*áról* beszélünk – ez utóbbit metanyelvnek nevezik, szemben a vizsgált nyelvvel mint tárgynyelvvel. „*X*" tehát itt egy metanyelvi formulaváltozó. Ezt azért fontos megjegyeznünk, hogy eloszlassuk azoknak a kételyeit, akik idegenkednek egy olyan jel használatától, amelyik nem szerepelt a logikai nyelv jeleinek felsorolásában.) A harmadik szabály szerint ha két formulát kondicionálissal összekapcsolunk, akkor ugyancsak formulát kapunk. Végül a negyedik kimondja, hogy csak azokat tekintjük formuláknak, amiket a korábbi szabályok annak neveznek, vagyis a formulák egyetlen előállítási módja az, hogy elemi kijelentéseket kapcsolunk össze kondicionális és negáció ismételt és tetszőleges alkalmazásaival.

Néhány példa: Ha „*A*" egy elemi kijelentés, akkor ő egy formula (1. sz.). Ekkor a „$(\sim A)$" is egy formula (2. sz.). Ekkor a „$(\sim(\sim A))$" is formula, és így tovább (2. sz.) Ha mondjuk „*B*" is egy formula, akkor „$(A \supset B)$" is az (3. sz.), valamint „$(\sim(A \supset B))$" is az (2. sz.), és így tovább. – Fontos megjegyezni, hogy itt a zárójelekkel sokkal szigorúbban bánunk, mint korábban. Ennek oka az, hogy míg eddig „intuitíve" elég volt tudni, hogyan néz ki egy formula, addig itt semmi más nem számít, csakis a formula alakja. Így aztán egyetlen zárójelet sem spórolhatunk le, mert akkor már nem egy szigorú értelemben vett formulával van dolgunk. A zárójelek pontos használatát a 2. és 3. szabály definiálja.

2.a. A kijelentéslogika axiómái

A következő lépésben megadjuk, hogy melyek azok a formulák, amelyek a kijelentéslogika meghatározó alapformulái, vagyis axiómái. Ezt két lépésben fogjuk megtenni: először megmondjuk, hogy melyek az ún. axiómasémák, vagyis azok, amelyek az axiómák általános alakját adják meg, majd kikötjük, hogy minden olyan formula, amelyik a sémákban meghatározott alakot ölti fel, axiómának számít.

A kijelentés axiómasémái a következők:

(*A1*) $(X \supset (Y \supset X))$
(*A2*) $((X \supset (Y \supset W)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset W)))$
(*A3*) $(((\sim X) \supset (\sim Y)) \supset (Y \supset X))$

A kijelentéslogikában axiómának nevezünk minden olyan formulát, amelyik a fenti sémák valamelyikének alakját ölti. Vagyis X, Y és W helyére bármilyen formulát beírhatunk (akár elemi formulát, akár összetettet), és akkor axiómát kapunk. Ez azt jelenti, hogy a kijelentéslogikában elvileg végtelen sok axióma van, hiszen végtelen sok formulát be tudunk helyettesíteni. (A formulaképzés szabályai ugyanis végtelen sokszor alkalmazhatók, így akár végtelen hosszú formulákat is felépíthetünk.) Viszont az összes axióma a három séma egyikének meg kell hogy feleljen.

Az a kérdés, hogy miért pont ezek az axiómasémák, itt megválaszolatlan marad. A válaszhoz ugyanis azt kellene megmutatnunk, hogy az ilyen alakú formulákból levezethetők azok a formulák, amelyeket egy szemantikai felépítésben logikai igazságoknak neveztünk (lásd. 2.4. fejezet). A szintaktikai és a szemantikai felépítések kapcsolatára hamarosan visszatérünk.

2.b. Levezetés a kijelentéslogikában

A levezetés formulák egy sorozata, amelyeket adott szabályok segítségével vettünk fel a sorozatba. Három oka lehet annak, hogy egy formula szerepel a levezetésben:

- A formula logikai axióma (vagyis az axiómasémákból kaptuk tetszőleges helyettesítéssel). Minden kijelentéslogikai levezetésben szerepelhet akármennyi kijelentéslogikai axióma (és természetesen más logikai rendszerben mások az axiómák). Ez tehát azt jelenti, hogy az axiómák minden levezetés közös „kiindulópontjaiként” szolgálnak, és így határozzák meg egy logikai rendszer általános tulajdonságait.
- A formulát az éppen adott levezetés speciális kiindulópontjaként, ún. „premisszájaként” tekintjük. (Mivel a premissza egy szemantikai fogalom, amennyiben a szemantikai következmény fogalmához kötődik, itt mindig idézőjelben fogjuk használni, jelezve, hogy csalunk, de sejtve azt, hogy ki fog derülni, hogy a csalás indokolt.) A minden levezetés számára közös logikai axiómákon felül tehát választhatunk olyan további formulákat, amelyekből egy adott levezetésben akarunk kiindulni.
- A formulát szabályos átalakításokkal kaptuk a levezetésben szereplő korábbi formulákból. Az egyetlen átalakítási szabályunk a korábban megismert *modus ponens* következtetési szabály szintaktikai megfelelője: Ha egy levezetésben szerepel „X” (tetszőleges formula), valamint szerepel „$(X \supset Y)$” (Y is tetszőleges formula), akkor ezek alapján felvehetjük azt a további formulát is, hogy „Y”.

Ha tehát van egy formulasorozatunk, amelynek minden elemére érvényes a fenti három szabály valamelyike, akkor levezetésről beszélünk. Szemléletesen így néz ki egy levezetés:

$\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, \ldots,}$	$\boldsymbol{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots,}$	$\boldsymbol{W_1, W_2, W_3, \ldots,}$	$\boldsymbol{K}$
„premisszák”	axiómák	további levezetett formulák	„konklúzió”

A levezetés bizonyos előre megválasztott formulákból indul ki. Ezek vagy az ún. „premisszák" (tehát amelyekből éppen le akarunk vezetni valamit), vagy logikai axiómák (ezek minden levezetés számára közösek). Ezek után (de nem szigorúan utánuk: a későbbiekben is bármikor vehetünk fel „premisszát" vagy logikai axiómát) következnek olyan formulák, amelyeket a korábban szereplőkből alakítottunk át (vagyis vezettünk le) a *modus ponens* segítségével. A legutolsó formula, amelyik egy levezetésben szerepel az, amelyet le szerettünk volna vezetni, tehát az ún. „konklúzió". (A következő fejezetben példát mutatunk egy konkrét levezetésre.)

Egy formulát (K) akkor mondunk levezethetőnek formulák egy osztályából (X_1, X_2, X_3, stb.), ha létezik olyan levezetés, amelynek X_1, X_2, X_3, stb. a „premisszái" és K a „konklúziója". Ezt így jelöljük:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots \quad \vdash \quad K$$

Azt például, hogy K levezető X_1, X_2, X_3-ból, úgy is szokás mondani, hogy K bizonyítható X_1, X_2, X_3 alapján, vagy hogy K az X_1, X_2, X_3 formulák szintaktikai következménye (szemben a szemantikai következménnyel). Ha X_1, X_2, X_3 formulákat egy „elméletnek" tekintjük (legyenek ezek pl. a geometria alaptételei – persze itt kijelentéslogikában formalizálva), akkor K az elmélet egy „tétele", hiszen az elméletből bizonyítható vagy levezethető.

Korábban szóba került, hogy a levezetés tisztán szintaktikai fogalma „helyettesíti" valamilyen értelemben a következtetés szemantikai fogalmát. De vajon milyen értelemben? Hogyan ellenőrizhetjük valamilyen „következtetések" érvényességét úgy, hogy ehhez ne használjuk az igazságérték fogalmát, hiszen a formulákat értelmetlen jelsorozatoknak tekintjük? Ahhoz, hogy a következmény és a levezethetőség közti viszony világossá váljon, meg kell vizsgálni, hogy a szemantikai és a szintaktikai felépítés milyen kapcsolatban állnak egymással. Az alábbiakban néhány metalogikai tételről fogunk röviden megemlékezni.

4.4. A szintaktikai felépítés lehetőségei és korlátai

Ebben a szakaszban két híres metalogikai tételt fogunk szemügyre venni. Természetesen nincs lehetőség arra, hogy ezeket a tételeket bizonyítsuk, sőt még arra sem, hogy kellő pontossággal kimondjuk. Azonban nem fejezhetjük be ezeket a bevezető logikai vizsgálatokat anélkül, hogy röviden (akár csak ízelítő jelleggel) megemlékeznénk azokról a sokat idézett eredményekről, amelyek a logika lehetőségeivel és korlátaival kapcsolatos tanulságokkal szolgálnak.

Először is a metalogika fogalmát kell tisztáznunk. A logikában szokásos megkülönböztetni egymástól az ún. metaelméletet a tárgyelmélettől, illetve (és ezt az előző fejezetben megemlítettük) a metanyelvet a tárgynyelvtől. Amikor egy adott kérdéskört vizsgálunk, akkor ezt gyakran egy bizonyos elmélet keretei között tesszük. Felvetődhetnek olyan kérdések is, amelyek magával a használt elmélettel kapcsolatosak, és így az elmélet keretei között nem tudjuk őket megválaszolni (hiszen az elmélet nem magáról szól, hanem valami másról), ezért ki kell lépnünk az elméletből. Ha ekkor egy olyan elméletben kezdünk el dolgozni, amelynek tárgya a korábbi elmélet (tehát a tárgyelmélet), akkor már az ún. metaelméletben vagyunk. Ugyanez érvényes (akár mesterséges) nyelvekre: Ha valaki például szuahéliül tanul, akkor megpróbálja a dolgokat szuahéliül kifejezni. Ám ha a szuahéli nyelvről beszél (mondjuk annak nyelvtanáról), akkor érdemes nem szuahéliül tenni ezt, hanem mondjuk magyar nyelven: ebben az esetben a szuahéli lesz a tárgynyelv (amelyre a vizsgálat éppen irányul) és a magyar lesz a metanyelv (amelyben a tárgynyelvről beszélünk).

Ha valamit egy logikai elméletben akarunk értelmezni, akkor lefordítjuk azt a logikai elmélet nyelvére, majd alávetjük az adott logikai rendszer szabályainak. Ha azonban egy logikai rendszer*ről* akarunk mondani valamit, akkor ezt nyilván nem a logikai elméleten belül tesszük. Létre kell hozni egy olyan elméletet, amelyik a <u>logikai rendszerekről szól</u>: ez lesz a logika metaelmélete, röviden a metalogika. Azok a kijelentések, amelyek logikai elméletek tulajdonságait állapítják meg, az ún. metalogikai tételek.

Felmerül a gyanú, hogy ha a metalogikai állításokat „tételeknek” nevezzük, akkor az azt jelenti, hogy azok be vannak bizonyítva, vagyis a metalogika elég formális tudomány ahhoz, hogy benne tételeket lehessen bizonyítani. A gyanú nem alaptalan, de mi természetesen nem érdeklődünk a formális metalogikai elméletek iránt, hanem csakis azon állítások (intuitív tartalma) iránt, amelyeket a legfontosabb metalogikai eredmények megfogalmaznak. Az alábbiakban két ilyen tétellel fogunk találkozni. Természetesen ezeken kívül is számos fontos tételt felsorakoztathatnánk, ám illusztrációnak az alábbi kettő is megteszi.

Gödel teljességi tétele

A következő tételt Kurt Gödel osztrák matematikus bizonyította 1930-ban:

> Legyen K egy elsőrendű formula (vagyis az elsőrendű logikában formalizált kijelentés), és legyenek X_1, X_2, X_3, …szintén elsőrendű formulák. Ekkor fennáll a következő összefüggés:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots \vdash K \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad X_1, X_2, X_3, \ldots \Rightarrow K$$

Más szóval: Az elsőrendű logikában egy formula akkor és csak akkor levezethető formulák egy osztályából, ha azoknak szemantikai következménye. Még bővebben megfogalmazva: Adott néhány formula (premisszák) és adott egy további formula (konklúzió). Ha a premisszákból levezethető a konklúzió, akkor nekik szemantikai következményük (egy logikai rendszer ezen tulajdonságát nevezzük helyességnek), és fordítva, ha a premisszáknak szemantikai következménye a konklúzió, akkor le is vezethető belőlük (ezt teljességnek nevezzük, a helyességet és a teljességet együtt pedig adekvátságnak).

Most már láthatjuk, mit jelent az, hogy a szemantikai következményfogalom „helyettesíthető” a levezetés fogalmával. Minden, ami egy premisszaosztály következménye, le is vezethető a premisszaosztályból (és fordítva), ezért a szemantikát bizonyos értelemben valóban zárójelbe tehetjük, és ha úgy tetszik, elég csak levezetésekkel operálnunk.

Először is lássunk a fentiekre egy példát! Az ún. teljességet fogjuk „ellenőrizni” egyetlen esetben, és ezzel egyben példát is mutatunk a levezetésre. Mivel a levezetés fogalmát csak kijelentéslogikában határoztuk meg, a példa is a kijelentéslogikából származik, holott Gödel teljességi tétele az elsőrendű logikáról szól. Ez azért nem probléma, mert a kijelentéslogika az elsőrendű logikának egy „töredéke” (vagyis azon része, ahol a funktorok egyetlen megengedett típusa a mondatfunktor, és az argumentumok is csak mondatok lehetnek). Ha egy tétel általánosan igaz az elsőrendű logikára, akkor igaz lesz annak egy részére, a kijelentéslogikára is.

A kijelentéslogika egyik érvényes következtetési szabálya az ún. *modus tollens*: $(A \supset B)$, $(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$. Ennek érvényességét igazságtáblázattal ellenőriztük (2.4. fejezet). A teljességi tétel azt állítja, hogy ekkor „$(\sim A)$”-nak van levezetése „$(A \supset B)$, $(\sim B)$”-ből. Mielőtt ezt a levezetést megadnánk, csaljunk egy kicsit: a *modus ponens* levezetési szabály mellett vezessünk be egy másik szabályt is, amely szerint a kettős negáció törölhető, vagyis „$(\sim(\sim X))$” helyett egyszerűen „X”-et is írhatunk. Ez a szabály természetesen nem szükséges, hiszen e nélkül is le tudnánk vezetni a kérdéses formulát, ám így a levezetés jóval egyszerűbbé válik. Íme:

Lépés	Formula	Indoklás
1.	$(A \supset B)$	Felvehettük, mert ez az első „premissza”.
2.	$(\sim B)$	Felvehettük, mert ez a második „premissza”.
3.	$(((\sim(\sim A)) \supset (\sim(\sim B))) \supset ((\sim B) \supset (\sim A)))$	Az (*A3*) axiómaséma helyettesítettje: *X* helyébe $(\sim A)$, *Y* helyébe $(\sim B)$ kerül.
4.	$((A \supset B) \supset ((\sim B) \supset (\sim A)))$	A kettős negáció törlésére vonatkozó szabályt alkalmaztuk két helyen (3)-ra.
5.	$((\sim B) \supset (\sim A))$	*Modus ponens*-szel kaptuk (1)-ből és (4)-ből.
6.	$(\sim A)$	*Modus ponens*-szel kaptuk (2)-ből és (5)-ből.

Tehát beláttuk, hogy $(A \supset B), (\sim B) \vdash K$.

A példa után térjünk vissza a metalogikához! A 20. század első évtizedeiben, amikor a modern logika sikerein felbuzdulva sokan azt gondolták, hogy a formális logika nyújtja az emberi tudás ideális formáját, a teljességi tétel további alapot szolgáltatott ennek az optimizmusnak. A kor pozitivista törekvési gyakran hangoztatták azt az elképzelést, mely szerint valójában minden emberi tudást (ideális esetben) formális szintaktikai kalkulusokban kellene megfogalmazni, és ezáltal a következtetések egyértelműen ellenőrizhetővé válnának. A lelkesedés azonban csak addig tartott, mígnem a 30-as évektől kezdve megszületett egy sor olyan metalogikai tétel, amelyik e program belső korlátaira vetett fényt. Ezek közül a leghíresebb talán Gödel első nemteljességi tétele, ezért most ezzel ismerkedünk meg.

Gödel első nemteljességi tétele

Ez szintén Kurt Gödeltől származik, 1931-ből.

> Legyen $\mathfrak{I}$ egy elsőrendű elmélet, vagyis elsőrendű formulák egy halmaza (melyek egy formalizált elmélet alapállításai). $\mathfrak{I}$ két követelménynek eleget tesz:
> (1) ellentmondásmentes (ami azt jelenti, hogy nem vezethető le belőle egy formula is és ugyanannak negációja is), valamint
> (2) kifejezhető rajta az aritmetika (azaz egyrészt kifejezhetők nyelvén a természetes számok, másrészt az elmélet formulái között vannak azok, amelyek az aritmetika axiómáinak elsőrendű megfogalmazásai – vagyis az elméletben képesek vagyunk mennyiségi viszonyokat kifejezni).
> Ekkor a $\mathfrak{I}$ elmélet nyelvén megfogalmazható egy olyan *A* formula, hogy
>
> $$\mathfrak{I} \nvdash A \text{ és } \mathfrak{I} \nvdash (\sim A)$$
>
> („$\nvdash$” jelentése: nem levezethető)

Más szóval: Adott egy elmélet, amelyet elsőrendben formalizáltunk annak érdekében, hogy biztosítsuk a megbízható logikai struktúrát. Ez az elmélet egyrészt ellentmondásmentes (ez valójában minden valamirevaló formális elmélettel szemben követelmény, ugyanis belátható, hogy egy ellentmondásos elméletből akármilyen tetszőleges formula levezethető, tehát az ilyen elmélet semmitmondó), másrészt pedig eleget tesz annak a követelménynek, hogy a nyelvén tudjunk számolni, vagyis formális elméletként tartalmazza az aritmetikát (ami megoldható, de ennek bemutatása itt szükségtelen). Ekkor az elmélet nyelvén megfogalmazható olyan (szabályos) formula, hogy sem őt, sem pedig az ő negációját nem tudjuk levezetni az elméletből.

Megjegyzendő, hogy bár mindkét Gödel-tételben a „teljesség” fogalma szerepel, a két tétel valójában másról szól, és a fogalom is mást jelent. Először is, a teljességi tétel az elsőrendű logikáról állít valamit, míg a nemteljességi tétel az elsőrendű logik*ában* formalizált elméletekről. Másodszor, míg az elsőben a teljesség fogalma azt jelenti, hogy minden formula, amely adott premisszák szemantikai következménye, egyben le is vezethető azokból a premisszákból, addig a másodikban valójában szó sem esik szemantikáról, hanem egy másik teljesség-fogalommal, az ún. negáció-teljességgel találkozunk. Egy logikában formalizált elmélet akkor negáció-teljes, ha minden, a nyelvén megfogalmazott formuláról el tudjuk dönteni, hogy az elméletből bizonyítható-e vagy cáfolható, vagyis vagy őt le tudjuk vezetni az elmélet alapállításaiból, vagy az ő negációját. Gödel tétele éppen azt mondja ki, hogy az általánosan legalapvetőbbnek tekintett logikai rendszer, az elsőrendű logika nem tud negáció-teljes elméletekkel szolgálni, ha azok az elméletek egyébként megfelelnek a tudományos elméletekkel szembeni (fenti) minimális elvárásainknak.

Ez a tétel elsősorban matematikai szempontból releváns, és a matematika alapjaival foglalkozó területek tekintetében hordoz közvetlen tanulságokat. Ennek ellenére szinte példátlan karriert futott be, és ma is közkedvelt hivatkozási alapot nyújt számtalan, a matematikától távoli gondolatmenet számára. A logika szemszögéből tekintve például azt jelenti, hogy amennyiben érvényes a kétértékűség elve, vagyis minden kijelentés igaz vagy hamis, úgy az elsőrendű kalkulusok mégsem alkalmasak a szemantika kiküszöbölésére, ugyanis bennük nem minden formuláról tudjuk eldönteni, hogy (szintaktikai) következménye-e az elméletnek vagy sem, holott szemantikai értelemben minden állítás egyértelműen rendelkezik a két igazságérték valamelyikével. Azonban léteznek a tételnek ennél jóval kevésbé szabatos olvasatai is: elterjedt nézet, hogy Gödel bebizonyította, hogy nem létezik logikai „mindentudás”, ugyanis nincs az a formális elmélet, amely minden kérdésre választ tudna adni. Ezt utóbbi értelmezés kétségtelenül látványos, ám valójában igen távol áll az eredeti tétel mondanivalójától, és bár Gödel eredménye ma is gyakran kerül elő különböző nézetek alátámasztására, fontos, hogy tisztában legyünk annak eredeti tartalmával és problémakontextusával.

5. Az érveléselmélet elemei

5.1. Az érveléselmélet feladata

Logikai vizsgálatainkat abból az igényből indítottuk, hogy olyan eszközt szeretnénk, amelynek segítségével következtetések érvényességét tudjuk ellenőrizni. Ehhez mesterséges nyelveket hoztunk létre, és ezek a nyelvek azt célozták, hogy el lehessen vonatkoztatni a kifejezések tartalmától azáltal, hogy csakis a formai szempontokat engedjük a nyelvben érvényre jutni. Minél magasabb szintre jutottunk a formális logika felépítésében, annál távolabb kerültünk a természetes nyelvtől, és végül olyan logikai vizsgálatokat folytattunk, amelyek sokkal lényegesebbek egy matematikához hasonló formális tudomány szempontjából, mint a természetes nyelv és a „szokásos" emberi gondolkodás szemszögéből. Ezért most új kérdéseket jelölünk ki, és az eddigiektől eltérő alapokon térünk vissza a következtetések és érvelések általános problémaköréhez.

Az érveléselmélet a természetes nyelvi szituációkban felbukkanó érvek általános jellemzésével foglalkozik. Ez – szemben a logikával – nem egy szabatos tudomány. A természetes nyelvi érvek teljes körű elemzése egy sokkal gazdagabb és összetettebb szempontrendszer érvényesítését teszi szükségessé, mint a következtetések logikai fogalmának kidolgozása. Míg a logika elsősorban normatív érdeklődést tanúsít, vagyis azt próbálja *előírni*, hogy – bizonyos ideálok érvényesülése mellett – hogyan *kellene* következtetéseket levonni, addig az érveléselmélet egy deskriptív álláspontot képvisel, vagyis megpróbálja *leírni* a természetes nyelvi érveléseket, anélkül, hogy idealizálni vagy racionálisan rekonstruálni próbálná azokat. Mivel azonban a természetes nyelvben számos, sokszor egymástól független szempont egyszerre érvényesül, ezek együttes figyelembevétele nem teszi lehetővé a logika esetén tapasztalt precízséget és szabatosságot.

Az érveléselmélet tehát egy „öszvér" terület, ahol különböző tudományágak felismerései keverednek egymással. Szerepet kap például a logika (azzal a megkötéssel, hogy ez ritkán képes akár közelítő pontossággal leírni a valódi következtetéseinket), a pszichológia (mind a következtetések levonásának, mind az érvek meggyőző hatásainak empirikus vizsgálatával), a pragmatikai nyelvelmélet (a nyelv sokrétű kommunikációs képességeinek feltárásával), a szociológia (az érvelési és kommunikációs minták társadalmi dimenziójának elemzésével), a retorika (a meggyőzés hatásosságának szempontjaival), és így tovább. Az érvelések átfogó vizsgálatára e bevezető kurzus keretei között tehát nincs lehetőség. Ehelyett – mintegy illusztrációképpen – néhány érdekesebb és gyakrabban vizsgált kérdéssel fogunk megismerkedni. Bár ezek a kérdések a „tudományosság" alacsonyabb fokán kerülnek tárgyalásra, mint a logika problémái, a következőt érdemes szem előtt tartani: Akármilyen hasznos tudomány is a logika (hogy csak egy szempontot említsünk, a számítástechnika elméleti alapjai számára például nélkülözhetetlen), valójában úgy tűnik, igen kevés köze van a tényleges emberi gondolkodáshoz. A következő fejezetekben tehát a tényleges emberi érvelésekkel foglalkozunk.

5.2. Induktív következtetések

A bölcseleti hagyományban régóta megkülönböztetik egymástól az ún. induktív és deduktív következtetéseket. Hagyományosan ezek között a fő különbséget abban látták, hogy míg az induktív következtetések az egyedi eseményekre vonatkozó állításokból vonnak le egy általános érvényű konklúziót, addig a deduktív következtetések éppen ellenkezőleg, általános érvényű állításokból következtetnek egyedi igazságokra. Lássunk erre egy példát:

Induktív következtetés:	Deduktív következtetés:
Aladár ember és halandó.	Minden ember halandó.
Béla ember és halandó.	Aladár ember.
(stb.)	Aladár halandó
Minden ember haladó.	

Az induktív következtetés tehát egyedi megfigyelésekből általánosít (ha több embert megfigyel, és látja, hogy mind halandó, akkor levonja a „Minden ember halandó." általános érvényű konklúziót), míg a deduktív következtetés éppen ellenkezőleg, egy (vagy több) általános összefüggésből (és bizonyos egyedi kijelentésekből) következtet (más) egyedi kijelentésekre.

Ha logikai ismeretekkel felfegyverkezve hasonlítjuk össze a két fenti következtetést, akkor úgy látjuk, hogy a legfőbb különbség nem abban áll, hogy milyen viszonyt teremtenek általános és egyedi kijelentések között, hanem abban, hogy míg az egyik logikailag érvényes, addig a másik nem az. A deduktív következtetés ugyanis olyan, hogy minden olyan esetben, amikor a premisszák igazak, a konklúzió is szükségszerűen igaz. (Ezt ugyan a szillogizmusok módszerével nem tudjuk belátni, mert az nem képes egyedi kijelentéseket kezelni, de valójában azért nem sok kétségünk lehet az érvényesség felől.) Az induktív következtetés azonban nem ilyen: attól még, hogy megfigyeltem *n* db. embert, és mindegyikük halandó volt, logikai szempontból nem következik az, hogy tehát minden ember halandó. Minél több egyedi esetben figyelem meg a tulajdonságok együttjárását, annál valószínűbb, hogy az általános konklúzió igaz, de sohasem lehetek olyan biztos benne, mint egy logikailag érvényes következtetés esetén. Mégis, az ember gyakran használ a fenti induktív következtetéssel analóg szerkezetű érvelést, és sokszor haszonnal. Érdemes ezért az ilyen típusú gyakori, ám logikailag nem érvényes sémákat is megvizsgálni.

Ezért most átfogalmazzuk az indukció és dedukció közti különbséget, és azt mondjuk, hogy deduktív az a következtetés, amely érvényes a logika (pontosabban valamelyik elfogadott logikai elmélet) szerint, és induktív az, amelyik nem érvényes, de gyakran jól működik. (Ez tehát független attól a kérdéstől, hogy mi a viszony az általános és az egyedi kijelentések között, ezért ettől a különbségtételtől a továbbiakban el is tekintünk. Lehet logikailag érvényes egy általánosról általánosra, vagy egyediről egyedire történő következtetés is, és ahogy látni fogjuk, egy induktív következtetésnek sem kell általánosító jellegűnek lennie.) Más szóval: Ha a premisszák igazsága esetén a konklúzió szükségszerűen igaz, akkor deduktív következtetésről, ha csak valószínűleg igaz, akkor induktív következtetésről beszélünk.

Mivel a „valószínű igazság" fogalma sokkal kevésbé megragadható, mint a szükségszerű igazságé, ezért az induktív „erősség" kritériumait nem tudjuk olyan biztos elméleti alapokra helyezni, mint a deduktív érvényesség feltételeit. Ennek egyik oka éppen abban keresendő, hogy míg egy következtetés deduktív érvényessége a kijelentések tartalmától függetlenül, csakis formai szempontok alapján megállapítható, addig az induktív következtetés ereje (és ezt mindjárt látni fogjuk) nagyban függ tartalmi szempontoktól is. Az alábbiakban vegyük szemügyre az induktív következtetések fő típusait!

1. Általánosítás

Ez az indukció fogalmának eredeti értelme. Az imént láttunk rá egy példát, most pedig meghatározunk egy olyan, részben formális sémát, amelyik az általánosító következtetések általános szerkezetét írja le:

a dolog *F* és *G* tulajdonságú.
b dolog *F* és *G* tulajdonságú.
(stb.)

Minden, ami *F* tulajdonságú, egyben *G* tulajdonságú is.
(*Vagy:* Általában az *F*-ek *G*-k.)

A séma kapcsán a következő megjegyzéseket érdemes tenni:

- Minél több esetből általánosítunk, annál erősebb a következtetés. Ha például vesszük a következő két általánosítást:

Tegnap késett a reggeli busz.	Hétfőn késett a reggeli busz.
Ma késett a reggeli busz.	Kedden késett a reggeli busz.
——————————	(…)
A reggeli busz mindig késik.	Vasárnap késett a reggeli busz.
	——————————
	A reggeli busz mindig késik.

  akkor nyilvánvaló, hogy a második esetben valószínűbb a konklúzió igazsága, hiszen ott hét esetből általánosítottunk, míg az elsőben csak kettőből. (Ha pedig egy éven keresztül minden nap késik a reggeli busz, akkor még erősebb lesz az általánosításunk.)
- Nem csak a premisszák száma fontos, hanem azok tartalma is. (Itt láthatjuk tehát, hogy az induktív következtetések vizsgálatánál nem tekinthetünk el a tartalomtól.) Vegyünk ismét két általánosítást:

  Most megnyomtam a kapcsolót, és kigyulladt a villany.

  Mindig, amikor megnyomom a kapcsolót, kigyullad a villany.

  Életem első másodpercében nem haltam meg.
  Életem második másodpercében nem haltam meg.
  (stb.)
  Életem egymilliárdodik másodpercében nem haltam meg.

  Életemben soha nem lesz olyan másodperc, amikor meghalok.

  Bár az első következtetés egyetlen esetből általánosít, míg a második egymilliárdból, valamiért úgy érezzük, hogy az első mégiscsak meggyőzőbb, mint a második. Ezt a tárggyal kapcsolatos háttérismereteink sugallják, hiszen a kapcsolók gyakran éppen a villanyok felgyulladásának célját szolgálják, és ráadásul ismerjük a jelenség hátterében álló oksági mechanizmust, míg a másodpercek semmilyen oksági kapcsolatban sem állnak a meghalással (sőt tudjuk, hogy előbb vagy utóbb bekövetkezik a halál, és sosem később, mint kb. négymilliárd másodperc után). Mindez viszont azt jelenti, hogy az általánosítás sosem pusztán formális következtetés, hanem erőssége tartalmi szempontokon is múlik.
- Általánosítás esetén fontos figyelnünk az általánosítás bázisának ún. heterogenitására. Ez azt jelenti, hogy annál erősebb az általánosítás, minél több az egyébként eltérő tulajdonsága az összehasonlított eseteknek. Ezt a következő példa világossá teszi:

A svájci nagynéném gazdag.	A Magyar Nemzeti Bank elnöke gazdag.
A bátyám svájci ex-barátnője gazdag.	A Magyar Televízió igazgatója gazdag.
Az unokahúgom svájci levelezőpartnere gazdag.	A Magyar Alkotmánybíróság elnöke gazdag.
——————————	——————————
Minden svájci gazdag.	Minden magyar gazdag.

  Míg az első esetben az általánosítás alapja heterogén, hiszen az említett személyek „véletlenszerűen” kerültek egymás mellé, és csak az a közös bennük, hogy svájciak, addig a második esetben az általánosítás olyan alapból indul ki, amely nem tekinthető heterogén mintának, ugyanis az ott szereplő egyedekben közös az, hogy számottevő magyar intézmények vezetői. Ennek megfelelően az első általánosítás erősebbnek tűnik, mint a második.

- Nem szükséges az általános konklúziót a „minden” szó szigorának kitenni. Általánosítani úgy is lehet, hogy a konklúziót a „legtöbb”, „általában”, „gyakorta”, stb. szavak segítségével fogalmazzuk meg. Minél gyengébben fogalmazzuk meg a konklúziót, annál erősebb a következtetés. Hiszen a „Minden holló fekete.” kijelentést egyetlen ellenpélda megcáfolja, míg a „Általában a hollók feketék.” kijelentést csak nagy számú ellenpélda gyengítheti.

2. Analógia

Analógia esetén a következtetés valamilyen hasonlóságon alapul. Az általános séma a következő:

a dolog *F*, *G*, *H*, *J* és *K* tulajdonságú.
b dolog *F*, *G* és *H* tulajdonságú.
___
b dolog egyben *J* és *K* tulajdonságú is.

Lássunk erre egy példát:

A középkori Európában az emberek
- törvényesen kivégezhetők voltak,
- hittek az asztrológiában,
- igen keveset olvastak,
- maximálisan kizsákmányolták egymást.

A mai USA-ban az emberek
- törvényesen kivégezhetők,
- hisznek az asztrológiában,
- igen keveset olvasnak.

___
Tehát a mai USA-ban az emberek maximálisan kizsákmányolják egymást.

A természetes nyelvi analógiák persze többnyire nem szó szerint követik a fenti szerkezetet, hanem ennél általában „lazábban” fogalmaznak, ám az analógiák hátterében meghúzódó következtetési mintázat ezzel a sémával talán jól kifejezhető. Az analógiákkal kapcsolatban a következő észrevételeket tehetjük:

- Minél több tulajdonság egyezik az összehasonlított dolgokban, annál erősebb lehet az analógia. Annál az analógiánál, hogy „A majom szőrős és két szeme van, a madárpók is szőrős, tehát biztosan neki is két szeme van.”, jóval erősebbnek tűnik például az, hogy „A majom melegvérű, belső vázas, elevenszülő, tüdővel lélegzik és vesél vannak, és mivel az ember is melegvérű, belső vázas, elevenszülő és tüdővel lélegzik, feltehetőleg neki is veséi vannak.”. (Ha tovább soroltuk volna a közös tulajdonságokat, még meggyőzőbb lenne az analógia.)
- Természetesen mivel induktív következtetési fajtáról van szó, itt is sokat számít a kijelentések tartalma és a velük kapcsolatos háttérismeretek összessége. Vannak olyan közös tulajdonságok, amelyeket egy összehasonlítás esetén relevánsnak találunk, illetve vannak olyanok, amelyek többnyire irrelevánsak. Ha valaki azon az alapon próbál analógiát vonni a macska és a szék között, hogy mindkettő négylábú, akkor ezt általában visszautasítjuk, mert a négylábúságot nem tartjuk fontos hasonlóságnak – kivéve a statikai stabilitás tekintetében, ebből a szempontból ugyanis éppen a négylábúság releváns. Ezért fontos, hogy a vizsgált közös tulajdonságok relevánsnak tűnjenek a konklúzióra nézve. Az első analógiás példánkban kérdéses, hogy a kivégezhetőség, a kevés olvasás és az asztrológia elfogadása mennyire releváns a kizsákmányolás szempontjából.

- Egy analógiát nagyban gyengít minden releváns diszanalógia, vagyis olyan releváns tulajdonság(csoport), amely az összehasonlított dolgok között eltérést mutat. A majom és a madárpók közti analógiát könnyen visszautasíthatjuk például azzal, hogy rámutatunk az állatok lábainak száma közötti különbségre. A középkor és az USA közti párhuzamot gyengíti pl. a gazdasági- és jogrendszerek közti alapvető eltérés: ezek releváns különbségek a kizsákmányolás tekintetében. Vegyük azonban a következő analógiát: „A bátyám mindig elhagyja a dolgait, nem emlékszik az ígéreteire, és elfelejti megköszönteni a szüleit születésnapjukon. Te is folyton elhagysz mindent, és elfelejted az ígéreteidet, tehát biztosan te is megfeledkezel a szülinapokról." Ha erre azt az ellenvetést hozzuk, hogy „Rosszul következtettél, hiszen én zöld pulcsit hordok, a bátyád meg kéket.", akkor úgy tűnik, hogy egy tökéletesen irreleváns diszanalógiát sikerült találnunk, és ezáltal nem gyengítettük az analógiát.
- Az analógiát sokszor hasznos lehet vegyíteni az általánosítással. Ilyenkor több olyan dolgot is felmutatunk, amelyik bír tulajdonságok egy csoportjával, és mivel az említett tulajdonságok több esetben együtt járnak, valószínű, hogy a kérdéses esetben is együtt fognak járni. A következő analógia például erős lehet, pedig csak kevés közös tulajdonságot vesz figyelembe:

A sas tollas és tojást tojik.
A veréb tollas és tojást tojik.
A tyúk tollas és tojást tojik.
A pingvin tollas.

A pingvin tojást tojik.

3. Statisztikus érvelés

A statisztikus érvelések igen gyakoriak a mai tudományokban, és nagyon sokféleképpen lehet rosszul alkalmazni őket vagy visszaélni velük. Itt azonban nem foglalkozunk a kérdéssel részletesen, hanem csupán néhány általános megjegyzés erejéig. A statisztikus érveléseket a következő legegyszerűbb formában lehet rekonstruálni:

A megfigyelt n db. F tulajdonságú dologból m db. G tulajdonságú.

Az F tulajdonságú dolgok ($100\ n/m$)%-a G tulajdonságú.

Itt érdemes hasonló megjegyzéseket tenni, mint az előző következtetés-típusoknál:
- Annál erősebb az érvelés, minél nagyobb a mintavétel bázisa. Ha két barátom közül egy szereti a brazil szappanoperákat, az még elég gyengén támasztja alá azt a konklúziót, hogy a lakosság 50%-a szereti ezeket a filmeket. Ha viszont 100 ismerősöm közül 50-re ugyanez elmondható, akkor a konklúziót erősebb alapokon fogadhatjuk el.
- Itt is fontos, hogy a mintavétel bázisa ne legyen elfogult, hanem minél heterogénebb. Ha a legnépszerűbb brazil szappanopera időpontjában közvélemény-kutatást készítek egy metrómegállóban a szappanoperákról, akkor a mintavételem elfogult, ugyanis a kérdezett csoportnak közös tulajdonsága, hogy éppen nem nézik a népszerű sorozatot, tehát valószínűleg nagyobb arányban kapok negatív választ, mintha egészen más időpontban végeztem volna a kutatásokat.
- Itt fontos megjegyezni, hogy a statisztikus érvelések egy lényeges eleme lehet az ábrázolás mint a meggyőzés fokozásának eszköze. Figyelem: az ábrázolásokkal rengeteg módon vissza lehet és szokás élni! Ettől a témától most eltekintünk.

4. Oksági érvelés

Oksági érvelésről akkor beszélünk, amikor események, dolgok, folyamatok stb. közötti oksági kapcsolatokra következtetünk. Az újkori filozófia egyik klasszikus problémájának számít, hogy milyen alapon tulajdonítunk jelenségeknek oksági összefüggéseket. Az egyik lehetséges válasz szerint két esemény/dolog/stb. állandó együttjárása azt a képzetet kelti bennünk, hogy oksági kapcsolat van közöttük. Eszerint az oksági következtetések gyakorlatilag ugyanolyan értelemben induktívak, mint az általánosítások. Erre az elképzelésre épített John Stuart Mill is a 19. században, amikor megpróbálta feltérképezni azokat az induktív következtetési mintákat, amelyek segítségével oksági összefüggéseket lehet megállapítani. Az alábbiakban a Mill által ismertetett oksági következtetési módszereket vesszük szemügyre.

a. A megegyezés módszere

Adott egy okozat, amelynek keressük az okát. Ha az okozat különböző feltételrendszerek mellet fellép, akkor az lesz az ok, amelyik feltétel minden esetben közös. Például:

Ha fekszem, ropit eszem és sört iszom, megfájdul a fejem.
Ha ülök, pizzát eszem és sört iszom, megfájdul a fejem.
Ha állok, virslit eszem és sört iszom, megfájdul a fejem.
A sör fejfájást okoz.

A körülmények változnak, azonban minden esetben közös a sörivás ténye. Így ezt azonosítjuk a fejfájás okaként. Persze probléma lehet, hogy valójában nem tudunk mindent körülményt egyaránt figyelembe venni. Mint minden induktív következtetésnél, itt is fontos megemlíteni, hogy a releváns háttértudás sokat számít. A következő, a fentivel analóg szerkezetű érvelésnek senki sem dőlne be:

Ha rumot és kólát iszom, megfájdul a fejem.
Ha vodkát és kólát iszom, megfájdul a fejem.
Ha pálinkát és kólát iszom, megfájdul a fejem.
A kóla fejfájást okoz.

b. A különbség módszere

Ebben a módszerben minden körülményt változatlanul hagyunk, kivéve egyet. Ha a változtatott körülmény az okozat fellépésében is változást jelent, akkor ő az ok. Például:

Ha az akvárium 20 °C-os, ég a lámpa és nincs sör a vízben, akkor a halak élnek.
Ha az akvárium 20 °C-os, ég a lámpa és van sör a vízben, akkor a halak elpusztulnak.
A sör a halak halálát okozza..

Persze ekkor sem tudjuk feltétlenül biztosítani, hogy a két esetben minden egyéb körülmény változatlan maradjon. Ráadásul ez a módszer félrevezető lehet, ha valaminek több oka is van. Ha például megállapítjuk, hogy egy gyerek megfoganása nem következik be, ha nem biztosítjuk a sperma jelenlétét, akkor elhamarkodott lenne levonnunk a következtetést, hogy a sperma a gyerek oka. Hiszen a petesejt elvonásával is ugyanazt az eredményt érnénk el, tehát valójában több ok szükséges a megfoganáshoz.

c. A megegyezés és különbség közös módszere

Megbízhatóbb eredményre jutunk, ha az előző két módszert együttesen alkalmazzuk. Például ha a körülmények változtatása mellett fennáll az okozat, amíg egy bizonyos körülmény állandó marad, de megszűnik, amint azt a körülményt megszűntetjük, akkor már nagyobb a valószínűsége annak, hogy megtaláltuk az okot.

d. A maradékok módszere

Ezt a módszert akkor alkalmazhatjuk, ha már vannak háttérismereteink bizonyos okozati viszonyokról, és ezek alapján szeretnénk következtetni más viszonyokra. Ha sikerül előállítanunk azt a szituációt, amelyben egy sor körülmény mellett ugyanolyan számú okozat fellép, melyek közül egy kivételével az összes okát tudjuk azonosítani, akkor a maradék okozat oka a maradék, fel nem használt körülmény lesz. Például:

> Ha állok, virslit eszem és sört iszom, megfájdul a fejem, a hasam és a derekam.
> A sör fejfájást okoz.
> Az állás derékfájást okoz.
> ---
> A virsli hasfájást okoz.

e. A mennyiségi variálás módszere

Szemben az eddigi módszerekkel, amelyek tisztán minőségi viszonyokat tudtak kezelni (egy körülmény vagy okozat fennáll, illetve nem áll fenn) ez az eljárás mennyiségi változtatásokra is érzékeny. Ha a fennálló körülményeket mennyiségileg tudjuk befolyásolni, akkor megfigyelve, hogy miképpen változik az okozat fellépésének mértéke, megtalálhatjuk az okot is. Például ha a fejfájásom mértéke az elfogyasztott sör mennyiségével arányos, de nem változik jelentősen az étel mennyiségének változásával, akkor feltehető, hogy a fejfájást a sör okozza.

5.3. Érvelések rekonstrukciója és értékelése

Az eddigi példákból világosan láthattuk, hogy a természetes nyelvi szituációkban az érvek megfogalmazása gyakran nem szigorúan követi azokat a kvázi-formális struktúrákat, amelyekkel az érvek egyes típusait próbáltuk jellemezni. A természetes nyelv valójában sokkal rugalmasabb annál, mintsem hogy a kifejezésmódnak könnyen azonosítható formai feltételekhez kellene igazodnia. Ezért gyakran erőfeszítéseket kell tennünk annak érdekében, hogy az érveléseket áttekinthetőbb és így értékelhető formában rekonstruáljuk. („Érvelés” alatt itt egy hosszabb érvet vagy érvsorozatot értünk, bár a megkülönböztetésnek most nincs jelentősége.) Az alábbiakban először az érvek rekonstrukciójáról, majd értékelésükről lesz szó.

Érvelések rekonstrukciója

Érvelésnek tekintünk egy élőszóban elhangzott vagy írásban rögzített szöveget, ha annak célja egy kijelentésnek (vagy kijelentések egy szűk és összefüggő csoportjának) az alátámasztása. A rekonstrukció célja az, hogy egyrészt azonosítsuk és elkülönítsük az érvelés szempontjából elsődlegesen releváns kijelentéseket, másrészt megállapítsuk ezek kapcsolatát az érvelésen belül. Ez a következő lépések mentén történik:

1. A releváns kijelentések azonosítása

a.) Először a <u>konklúziót</u> érdemes megtalálni. Ahhoz ugyanis, hogy megállapítsuk, egyes kijelentések hogyan támasztanak alá egy másik kijelentést, célszerűbb először azt kideríteni, hogy mit szeretne a szöveg alátámasztani, és csak ezután vizsgálni, hogyan és mivel támasztja alá. Néhány megjegyzés a konklúzióval kapcsolatban:

- Egy komplex érvelésben nem feltétlenül egy konklúzió van (szemben a logikai következtetés konklúziójával, amelyből mindig egy van). Ha több kijelentést is alá kívánunk támasztani, akkor ezeket abban az esetben érdemes egyetlen érvélés összefüggő konklúzióinak tekinteni, ha tartalmilag valóban összefüggenek, és a szöveg együttesen támasztja alá őket. Ellenkező esetben érdemes a szöveget több különböző érvelésre bontani.

- Habár egy természetes nyelvi szövegben a konklúzió bárhol elhelyezkedhet (szemben a logikával, ahol mindig a következtetés végén található), néha segíthet a konklúzió azonosításában a pozíció figyelembe vétele is. Rövidebb érveknél gyakori a végén megfogalmazott konklúzió, míg hosszabb érveknél sokszor rögtön a szöveg elején megfogalmazásra kerül. (Igaz, ez nem egy túl egyértelmű tendencia.) Bár lehet a szöveg közbülső részeiben is, a leggyakoribb ez a két pozíció. Megjegyzendő, hogy hosszabb érveléseknél a konklúzió gyakran többször és több helyen is kimondásra kerül.
- A konklúzió azonosítását bizonyos „hívószavak" is segíthetik. Az alátámasztandó kijelentések sokszor tartalmaznak olyan kifejezéseket, mint pl. a „tehát" „következésképpen", „így aztán", stb. Persze ezek sem egyértelmű segítségek, hiszen egyrészt nem mindig szerepelnek egy konklúzióban, másrészt pedig gyakran olyan mondatokban is jelen vannak, amelyek nem a (végső) konklúzió szerepét töltik be, hanem az érvelés menetének bizonyos közbülső pontjaihoz kapcsolódnak.

b.) Ezután a <u>premisszák</u> azonosítása már könnyebb feladat, hiszen tudjuk azt, mit szeretne a szöveg alátámasztani, tehát azt is megállapíthatjuk, hogy ezt mivel (vagy mikkel) támasztja alá. Itt is fontos néhány megjegyzést tennünk:

- Először is, nem minden olyan mondat premissza, amelyik nem konklúzió. Egy hosszabb érvelésben (főleg ha annak a hatáskeltő funkciója hangsúlyos, lásd később) nem feltétlenül kell a tömörségre törekedni, így számos olyan mondat is szerepelhet benne, amelynek elsődleges szerepe nem abban áll, hogy közvetlenül részt vegyen a konklúzió alátámasztásában. A publikusan megfogalmazott érvekben gyakoriak a tisztán retorikai eszközök („kiszólások", személyes megjegyzések, hatáskeltő kijelentések, stb.), és ezek az érv rekonstruált felépítésében nem jelennek meg.
- A premisszák itt is kijelentések, vagyis olyan mondatok, amelyek állítanak valamit. Szokás a kijelentések két, tartalmi szempontból különböző fajtáját szembeállítani egymással: egyfelől vannak ún. tényállítások, amelyek igazságértéke tényszerűen megállapítható (Pl. „Percenként több km^2 esőerdő pusztul el."), másrészt vannak ún. értékállítások, amelyek esetén igazságérték helyett inkább az elfogadhatóság szempontja játszik szerepet, mely egy értékrenden alapuló döntés függvénye (Pl. „Az esőerdő pusztítása bűntett." Az érveléseknél mindkét típusú állítás felléphet premissza szerepében, de általában hasznos lehet ezeket külön kezelni (lásd az értékelés szempotjait).
- Az érv menete gyakran áttekinthetőbbé válik, ha azonosítunk benne ún. „rejtett premisszákat". Ezek olyan állítások, amelyeknek kimondása nagyban erősítené az érvelést, de valamiért a szöveg elhallgatja őket. Ha például azt az érvet hozom, hogy „Minden ember haladó. Ezért te is meg fogsz halni.", akkor itt két rejtett premisszát is lehet azonosítani: „Te ember vagy.", illetve: „Aki halandó, az meg fog halni.". Ha ezeket kimondjuk, az érv deduktíve érvényessé válik, viszont azt is kockáztatjuk, hogy hallgatóink vagy olvasóink megunnak bennünket vagy bosszúsak lesznek amiatt, hogy hülyének nézzük őket. Ezért (is) sok olyan premisszát nem mondunk ki, amelyik „triviálisan" szükséges az érv működéséhez. Az elhallgatásokkal azonban vissza is lehet élni, ugyanis az elhallgatott premisszákat az ember hajlamos könnyebben elfogadni (hallgatólagosan), mint az explicit állításokat, így ezek egykönnyen a manipuláció eszközeivé válhatnak.

2. Az érvelés szerkezetének felderítése

A releváns kijelentések azonosítása után megpróbáljuk megállapítani, hogy az egyes premisszák hogyan támasztják alá a konklúziót, és ezeket a kapcsolatokat minél egyszerűbben ábrázoljuk. Két alapvető eset lehetséges:

- A premisszák külön-külön, egymástól függetlenül támasztják alá a konklúziót. Vegyük pl. a következő rövid érvet:

  „Nem engedem meg, hogy a barátaiddal füvet szívj. Egyrészt a drogok függőséghez vezetnek. Másrészt a drog tudatmódosító, és ismeretlen veszélyeknek teszed ki magad. Harmadrészt illegális, vagyis a börtönt is kockáztatod."

  Az érv megfogalmazója (aki feltehetőleg egy gyermekével kommunikáló szülő) tehát három premisszával kívánja alátámasztani döntését, és ezt ráadásul nyelvi szinten is kifejezésre juttatja. Mivel ezek a premisszák egymástól függetlenek, ezért a fenti érvelést így lehetne rekonstruálni:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & K & \end{array}$$

- A premisszák együtt, egymásra épülve támasztják alá a konklúziót. Lássunk erre egy példát:

  „Ha sikerrel akarsz nekivágni az életnek, akkor jól kell tudnod szocializálódni. Ehhez fontos, hogy kivedd a részed a közösségi programokból. Ezért ha a barátaid fűvel kínálnak, soha ne utasítsd vissza."

  Ebben a példában az érvelő (mondjuk a másik szülő) két állítással támasztja alá a konklúziót, viszont ezek nem egymástól függetlenek, hanem egymásra épülnek. A konklúziót (harmadik mondat) közvetlenül a második mondat támasztja alá, amelyet viszont az első mondat kíván alátámasztani. Ezért ezt az érvet így rekonstruálhatjuk:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \downarrow \\ P_2 \\ \downarrow \\ K \end{array}$$

Gyakran (főként hosszabb érveléseknél) a fenti két típus keverten jelenik meg, tehát bizonyos premisszák egymástól függetlenek, míg mások egymásra épülnek. Komplex érvelések esetén sokszor nem egyszerű megállapítani, hogy mi a premisszák kapcsolata egymással és a konklúzióval. Ilyenkor a rekonstrukció végső formája a szabad döntéseinken múlik. Fontos azonban, hogy egy érvelést érdemes minél „jobbra" rekonstruálni, vagyis megpróbálni kihozni belőle a maximumot.

Érvekések értékelése

Ha előttünk áll egy érvelés „formai váza", vagyis rekonstruált szerkezete, akkor megpróbálhatjuk értékelni. Ezt azonban különböző szempontok alapján végezhetjük. Az alábbiakban néhány ilyen szempontot veszünk figyelembe.

1. A premisszák igazsága

Akármilyen jól felépített egy érvelés, és akármilyen erősek a premisszák és a konklúzió közötti kapcsolatok, ha a premisszák igazsága kérdéses. A deduktíve érvényes következtetés meghatározása szerint ha a premisszák igazak, akkor igaz a konklúzió is. Azonban ha a premisszák nem igazak, akkor a konklúzió igazságáról semmit sem tudunk. Tekintsük a következő példákat:

Minden madár nyitvatermő.	Minden madár nyitvatermő.
Minden nyitvatermő ízeltlábú.	Minden nyitvatermő gerinces.
Minden madár ízeltlábú.	Minden madár gerinces.

A bal oldali következtetés formailag érvényes, de mindkét premissza és a konklúzió is egyaránt hamis. A jobb oldali is érvényes, és a premisszák hamisak, de itt a konklúzió igaz – mintegy „véletlenül". Egy érvelés esetén fontos, hogy egyaránt teljesüljön az, hogy igazak a premisszák és érvényes (vagy erős) a szerkezet: ekkor nevezzük az érvelést vagy következtetést helytállónak. Ha tehát a premisszák nem igazak, akkor nem sikerül kellően alátámasztaniuk a konklúziót, és az érvelés ezen szempont szerint negatívan értékelendő.

Érdemes felidézni, hogy az állításokat két csoportra, az ún. tényállításokra és értékállításokra osztottuk. Ezek igazságának értékelése természetesen nem azonos módon történik. Egy tényállítás igazságértéke elvileg egyértelműen eldönthető, bár előfordulhat, hogy az érvelés körülményei között az eldöntés eszközei nem állnak rendelkezésre, ezért az értékelés további vizsgálatokat igényel. Az értékállításokkal azonban nem ez a helyzet, ugyanis ezek elfogadása vagy elvetése valamilyen értékrend alapján történik. A publikus érveknél az ilyen állítások gyakran egy általánosan elterjedt és széles körben elfogadott értékrendet tükröznek, ezért elfogadhatóságuk az érvelő és a célközönség számára ugyanazon kritériumok alapján megállapítható. Azonban megtörténhet, hogy az érv megfogalmazója elfogad egy bizonyos értékállítást, azonban az érv befogadója ugyanezt nem fogadja el (például világnézeti különbségekből fakadóan). Ekkor az érv nem éri el célját – az ilyen esetekben érdemes kerülni a vitatható értékállítások premisszaként történő felvételét.

2. Az érvek érvényessége/erőssége

A premisszák igazsága természetesen még nem elég egy jó érveléshez: szükséges az is, hogy a premisszák és a konklúzió közötti kapcsolatok deduktíve érvényesek vagy induktíve erősek legyenek. Az érvényesség és az erősség szempontjait gyakran szokás külön kezelni, ám itt akár egy kalap alá is vehetjük őket. Ha egy következtetési lépés logikailag érvényesként rekonstruálható, vagy induktíve erősnek mutatkozik (az érv típusa szerint), akkor ott a premisszák valóban alátámasztják a konklúziót. (Kivéve, ahogy láttuk, ha legalább az egyik premissza nem igaz.) Ahhoz, hogy egy érv igazán jó legyen, szükséges, hogy minden premissza megfelelő módon alátámassza a konklúziót, főként abban az esetben, ha a premisszák egymásra épülnek, és így egyikük „bukása" az egész érvelésre nézve döntő jelentőségű lehet.

3. Az érvek hatásossága

Az igazság és érvényesség/erősség szempontjai alapján önmagában, kontextustól függetlenül vizsgáljuk az érveket. (Ugyanúgy, ahogy a logikai következtetéseket is önmagukban elemeztük.) Így eldönthető, hogy egy érvet bizonyos előzetes elvárások fényében, nevezetesen valamiféle „racionális", ideális kommunikációs cselekvők feltételezése esetén mekkora becsben tartunk. Ezzel azonban megfeledkezünk egy olyan szempontról, amely bár alapvetően fontos az érvek vizsgálatához, egészen idáig rejtve maradt: a hatásosság szempontjáról. Az érveket ugyanis azzal a céllal hozzuk létre, hogy segítségükkel meggyőzzünk másokat, vagyis pusztán a meggyőzés sikere vagy kudarca egy döntő kritérium lehet az érvek értékelésénél. Az <u>érvek hatásosságán azt értjük, hogy milyen mértékben győzik meg a célközönséget</u>. A hatásosság szempontja több tekintetben is eltér az eddigi szempontoktól:

- A hatásosság nem egy érv sajátja, hanem az érv és az aktuális befogadó közönség viszonyát jellemzi. Ugyanaz az érv rendelkezhet teljesen más meggyőző hatással két különböző közegben.
- Ezért a hatásosság mértéke nem eldönthető pusztán az érv elemzésének segítségével. Sőt az érv hatásossága csak közlése után, a befogadó közeg vizsgálatán keresztül állapítható meg.
- Míg az eddigi szempontokat különösebb előismeretek nélkül, viszonylag egyszerű megfontolások alapján érvényesíteni tudtuk, addig a meggyőzés szempontjait csak egy pszichológiai, retorikai stb. háttér előtt lehet kibontani. Így ennek részletesebb tárgyalásától itt eltekintünk – bár számos új érveléselméleti irányzat elsősorban erre helyezi a hangsúlyt.

Vitatípusok

A hatásosság szempontjának beemelésével egy sor új probléma jelenik meg az érveléselmélet keretei között. Ezek közül itt csak egyet említünk meg. Láttuk, hogy a hatásosság fogalma tulajdonképpen a célközönség meggyőződésének mértékét takarja, míg a korábbi szempontok (érvényesség, erősség, helytállóság) ettől lényegileg függetlenek. Vajon mi szükség van érvényes, erős stb. érvekre akkor, ha a végső cél a meggyőzés, tehát a hatásosság?

Az, hogy milyen jellegű érveket használunk, részben a céljainkon múlik. Lehetséges, hogy ugyanarról a kérdésről egészen más érvek segítségével tudjuk meggyőzni mondjuk a 3.A osztályt az iskolában, az utcánkban lakó választópolgárokat vagy az atomfizikai kutatóintézet munkatársait. Szimmetrikus meggyőzési szituációkban, vagyis amikor két vitatkozó fél egymást próbálja meggyőzni, jól kirajzolódhatnak bizonyos meggyőzési stratégiák. Ennek megfelelően megkülönböztethetjük a következő vitatípusokat:

1. Tényfeltáró vagy „racionális” vita. Ezt az „ideális” vitatípust a következő ismérvek jellemzik:

Cél:	Az igazság kiderítése. Ez egyben mindkét fél célja, vagyis a célok közösek. Egymás „legyőzése” nem célja a vitának.
Eszköz:	Kizárólag helytálló érvek (igaz premisszák, erős vagy érvényes lépések). A hatásosság önmagában nem szempont, hiszen a cél az igazság.
Eredmény:	Vagy kiderül az igazság, tehát mindkét fél elérte a célját, vagy nem derül ki. Ez utóbbi esetben a vita nem lezárt, bár nem is feltétlenül eredménytelen (hiszen később folytatható ott, ahol abbamaradt).

2. Üzleti tárgyalás vagy egyezkedés típusú vita. Ismertetőjegyei:

Cél:	Kompromisszum az ellentétes érdekek között. Nem az igazságot keresik a felek, de nem is a másikat akarják a saját igazukról meggyőzni, hanem egy mindkét fél számára elfogadható álláspontot keresnek.
Eszköz:	Itt is fontosak a helytálló érvek, bár a hatásosság is jól jöhet.
Eredmény:	Kompromisszum. Az ilyen vita le kell hogy záruljon, különben sikertelen.

3. Törvényszéki tárgyalás típusú vagy nyilvános vita:

Cél:	Itt nem az igazság, hanem a meggyőzés a cél. (Pl. törvényszéki tárgyalás vagy nyilvános politikai vita.) A meggyőzés célja a saját érdekek érvényesítése, ugyanis azok nem összeegyeztethetőek az ellenfél érdekeivel. Lényeges: nem a másik felet kell meggyőzni, hanem a közönséget! (Választópolgárok, esküdtszék, stb.)
Eszköz:	A hatásosság igen fontos, bár néha a helytállóság is szerepet játszhat (amennyiben megfelelő közönség esetén együtt jár a hatásossággal).
Eredmény:	Az egyik fél győzelme.

4. Veszekedés

Cél:	A győzelem, azaz a saját érdek érvényesítése a másikéval szemben.
Eszköz:	Bármi elmegy. Érdemesebb elsősorban hatásos érvekkel próbálkozni, mint hellytállóakkal.
Eredmény:	Kétséges. Győzhet az egyik fél, de abba is maradhat a vita.

Végül fontos megjegyezni, hogy ezek a vitatípusok általában nem tisztán jelennek meg, hanem egymással keveredve. A viták érveléselméleti elemzésekor lényeges lehet kimutatni, hogy a vita körülményeinek változása során hogyan módosulnak a célok és a használt eszközök.

5.4. Érvelési hibák

Érveléselméleti kalandozásainkat egy olyan témával zárjuk, amelyik történeti szempontból igen fontos, és sokáig az érveléselmélet talán legfőbb kérdéskörét nyújtotta, ám az utóbbi időkben egyre inkább visszaszorul: az érvelési hibák felsorolásával. Már a kifejezés kapcsán felmerül a kérdés, hogy vajon mit érthetünk érvelési hiba alatt. Ha ugyanis csak a „logikus" érveket tartjuk helyesnek, akkor minden olyan következtetés, amelyik nem deduktíve érvényes, érvelési hibának fog bizonyulni. Ha azonban a másik végletet fogadjuk el, és azt tartjuk jó érvnek, amelyik hatásos, akkor nem lesznek általános érvelési hibák, hanem mindig a konkrét kommunikációs helyzetben fog egy érv működőnek vagy „hibásnak" mutatkozni. Annak megállapítására tehát, hogy mikor hibás egy érv, nem kínálkozik egyértelmű szempontrendszer.

Érvelési hibákról azonban azóta beszélnek, amióta csak megszületett az érvekre irányuló elméleti reflexió. A logika tudományát létrehozó Arisztotelész az i.e. 4. században már összeállított egy listát az akkoriban forgalomban lévő gyakori, ám hibás érvelési mintákról. Az ő tekintélyének köszönhetően máig fennmaradt a témával kapcsolatos érdeklődés, bár az érvelési hibákra vonatkozó osztályozások és listák komoly történeti változatosságot mutatnak. Ma a teljességre törekvő gyűjtemények több száz érvelési hibatípusról tesznek említést. Mi itt egy ennél jóval szerényebb listával is beérjük, amely talán ízelítőt tud nyújtani a releváns szempontokról.

Az érvelési hiba fogalmának pontos meghatározására nem vállalkozunk, mert egyetlen definíció sem lenne kielégítő. Előzetesen annyiban maradunk, hogy olyan, viszonylag gyakran előforduló érvelési mintázatokról van szó, amelyek nem érvényesek vagy erősek, de igen gyakran képesek meggyőzni a hallgatókat/olvasókat. Más szóval, valamilyen okból hajlamosak vagyunk ezeket jó érvekként elfogadni, holott igen gyakran félrevezetnek bennünket – és így alkalmasak arra is, hogy visszaéljenek velük és manipuláljanak bennünket a segítségükkel. Ezért egyes szituációkban különösen fontos lehet, hogy valamekkora mértékű tudatossággal rendelkezzünk ezen a téren, és felismerjük azokat az érveket, amelyek kritikátlan elfogadása könnyen megtéveszthet bennünket. Az alábbi felsorolás (és a hozzá kapcsolódó tájékoztató jellegű, bár meglehetősen önkényes osztályozás) szempontokat kínálhat egy ilyen tudatosság kialakításához.

Csúsztatások

Az ún. csúsztatások esetén az érv informális, nem logikai szerkezetében keresendő a hiba: bizonyos tartalmi összefüggések sérülnek anélkül, hogy erre fény derülne.

- Szalmabáb érvelés
  Ez a hiba vitákban léphet fel: abban áll, hogy valaki a vitapartnere véleményét eltorzítja, majd ezt támadja. Ezzel könnyebb helyzetbe kerül, mert egy olyan, általában eltúlzott álláspontot vitathat, amelyet adott esetben könnyebb visszautasítani, mint ellenfele valódi véleményét. Példa:

  – Szerintem az abortusz általában rossz.
  – Ezt nem mondhatod komolyan! És akkor mi a helyzet az olyan szélsőséges esetekkel, mint a nemi erőszak hatására fellépő nem kívánt terhesség, vagy a kimutathatóan életképtelen (vagy súlyosan fogyatékos) magzatok, stb…. ?

  Ha éppen egy törvényszéki tárgyalás típusú vitáról van szó, akkor ezekkel az érvekkel könnyen meg lehet nyerni a közönséget. Ám az eredeti állítás nem az volt, hogy az abortusz mindig rossz, hanem csak az, hogy általában. A vitapartner csúsztat akkor, amikor az eltúlzott álláspontot támadja, és érvei jórészt irrelevánsak az eredeti álláspont szempontjából (amelyik éppen nem a szélsőséges esetekről szólt).
  A szalmabáb érveléssel rokon hiba az ún. árnyékbokszolás. Ez akkor lép fel, ha az előző beszélgetés kezdeményezője nem veszi észre, hogy nem az ő álláspontját támadták, és a vita hevében nekiáll védelmezni magát a torzított álláspontot. Ezzel persze nehezebb helyzetbe kerül. Igen gyakori, hogy egy vita tehetetlenségre tesz szert, és csupán a vitatkozás kedvéért folytatódik: ilyenkor igen könnyű belecsúszni az árnyékbokszolás hibájába. Ezért fontos mindig szem előtt tartani, hogy pontosan mik az álláspontok mindkét oldalon.

- Álláspont váltogatás
  Ez szintén egy vitákban fellépő általános stratégiai hiba: az egyik vitapartner (például az ellenérvek hatására) folyton változtat az álláspontján, miközben úgy tesz, mintha ugyanazt gondolná. Ezzel természetesen megnehezíti vitapartnere helyzetét, főként akkor, ha az illető nem veszi észre a csúsztatásokat. Egy példa:

  – Azt gondolom, hogy az ember alapvetően jó.
  – Furcsállom, hogy ezt mondod: akkor mi a helyzet a háborúval, a hétköznapi erőszakkal, stb., amelyek igencsak jellemzőek az emberre?
  – Itt azt kell figyelembe venni, hogy az ember jónak születik, csak éppen a körülmények elronthatják.
  – Csakhogy az embereket elrontó körülményeket más emberek teremtik! Nem a természet teszi az embert rosszá, hanem maga az ember.
  – De ez nem azért van, mert az ember eleve rosszat akar tenni! Mindenki jót akar, de tudatlansága következtében gyakran rosszat cselekszik…

  Az eredeti tézis megfogalmazója váltogatja az álláspontját, hiszen az ellenérvek hatására mindig egy kicsit módosít rajta. Három megnyilvánulásában három különböző, bár nem teljesen független álláspontot fogalmaz meg. Így persze nem könnyű sarokba szorítani, hiszen mindig képes kibújni – egészen addig, mígnem a partnere megelégeli a helyzetet, és számon kéri rajta az álláspont váltakozásait.

- Csúszka-érv

  Ez már nem vitákra jellemző, két partnert igénylő hibatípus, hanem klasszikus értelemben vett, azaz egyetlen érvelésen belüli hiba. (A továbbiakban csak ilyeneket fogunk vizsgálni.) Csúszka-érvről akkor beszélünk, ha az érvelő apró kis csúsztatások, következetlenségek sorozatával elfogadható premisszákból elfogadhatatlan konklúzióra jut. Egy kissé távolabbi, de ismerős irodalmi példával élve:

  > Eressz be, kedves malackám! Ereszd be hát legalább az egyik hátulsó lábam… Ugyan, kedves kis malackám, ereszd be a másik hátulsó lábam is! … Kedves kis malackám, ereszd be a két első lábam is… Édes kedves kis malackám, eressz be most már egészen, meglásd, eddig sem bántottalak, ezentúl egy ujjal se nyúlok hozzád!

  Mindannyian ismerjük a történet végét. Ehhez hasonló egy másik közismert irodalmi példa az elvesztett patkószögről, lóról, csatáról és országról. Az egyes lépéseket még hajlandóak vagyunk elfogadni, de hogy összegezve egy patkószög miatt bukna el egy ország, az már fölöttébb gyanús. A tanulság: a kis csúsztatásoknál is résen kell lenni, mert ha többen összeadódnak, akkor az túl messzire vezethet.

- Hamis dilemma

  Ez az igen gyakori hibatípus két lehetőséget úgy állít be, mintha közösen minden esetet lefednének, tehát ha az egyik nem következik be, akkor a másiknak kell bekövetkeznie. A hiba akkor lép fel, ha a két lehetőség mellett vannak még mások is. Tipikus példa erre az „aki nincs velünk, az ellenünk van” típusú érvelés: attól még, hogy valaki nem áll mellettem, nem feltétlenül kell ellenem lennie, mert más lehetőség is van (pl. nem érdekli az egész). Egy „klasszikus” hamis dilemma egy régebbi óriásplakátról:

  > Karriert csinál vagy vacsorát?

  Mondani sem kell, hogy ez kissé leegyszerűsíti a választási lehetőségeket.
  Egy kiegészítő példa hamis „trilemmára” (egy személyiségtesztből, ahol szépeket lehet találni):

  > Milyen gyakran mondja kedvesének, hogy „szeretlek”?
  > a) Naponta.
  > b) Csak szeretkezés után.
  > c) Soha nem mondja.

- Sokat állító kérdés

  Kérdésekkel is lehet érvelési hibát elkövetni. A sokat állító kérdés, ahogy a neve is sugallja, kérdés létére túl sokat állít: rejtetten magában hordoz egy vagy több állítást is. Az a kérdés például, hogy

  > Kovács úr, maga még mindig veri a feleségét?

  világosan sugallja, hogy Kovács úr korábban már verte a nejét. Persze amennyiben ez nem igaz, Kovács úr kénytelen visszakérdezni, hogy beszélgetőpartnere vajon miből gondolja, hogy ő verte a nejét – kivéve, ha csak igennel és nemmel felelhet, mert akkor könnyen bajba kerül. Ez utóbbi szituációra álljon itt egy ismerős, de nem szó szerinti példa:

  > Egyetért-e azzal, hogy Magyarország belépjen a NATO-ba, és ezáltal garantálja polgárai biztonságát?
  >
  > Igen ☐ Nem ☐

A kérdés második fele egy kissé túl sok információt tartalmaz, és mintegy sugallja a választ: mivel a NATO-tagság a biztonságot garantálja, mindenkinek illik erre szavaznia. Ezzel a kérdéstípussal gyakran találkozhatunk interjúkban, ugyanis kitűnően alkalmas a válaszoló manipulálására.

- Körbenforgás (*petitio principii*)
  A körbenforgás ugyan nem egy jellegzetes csúsztatás, de mivel ez is egyfajta szerkezeti hiba, ebben a csoportban foglalkozunk vele. (Egyben az egyik elsőként felismert érvelési hibatípusról van szó.) A körbenforgás azt jelenti, hogy valaki olyan konklúziót szeretne alátámasztani, amely ha rejtetten is, de tulajdonképpen a premisszák között szerepel. Más szóval, amit „bizonyítani” szeretnénk, azt már eleve feltételeztük, és felhasználtuk a „bizonyításban”. Lássunk erre egy klasszikus példát (a Kis Herceg és az iszákos közti dialógust, ismét nem szó szerint).

  K: Te mit csinálsz?
  I: Iszom.
  K: Miért iszol?
  I: Hogy felejtsek.
  K: Mit akarsz elfelejteni?
  I: Azt, hogy szégyellem magam.
  K: És miért szégyelled magad?
  I: Mert iszom.

  Vagyis ha megkérnénk az iszákost, hogy gyűjtse össze az ivás melletti érveket, akkor végső soron az ivás lenne a legfontosabb indok az ivásra.
  A körbenforgást sajnos általában nem ilyen könnyű felismerni, ugyanis a konklúzió többnyire rejtett premisszaként van „jelen”, vagy valamelyik premissza előfeltételeként, és ennek kimutatása az érv magas fokú átlátását teszi szükségessé.

Induktív hibák

Ebben a csoportban olyan hibák találhatók, amelyeket induktív következtetések alkalmazásakor gyakran el szoktunk követni. Mivel az induktív következtetéseket részletesebben megvizsgáltuk, itt csupán néhány tanulságra térünk ki.

- Elhamarkodott általánosítás
  Az általánosítás többféleképpen lehet elhamarkodott: vagy azért, mert túl kevés esetből vonunk le általános következtetést, vagy azért, mert az általánosítás bázisa elfogult, stb. Ezekre már láttunk példákat korábban.

- Rossz analógia
  Az érvként alkalmazott analógiákkal gyakran lehet visszaélni. Az analógiák esetén is lényeges, hogy a korábban említett szempontokat figyelembe vegyük: releváns-e az alapul vett hasonlóság, vannak-e triviálisan releváns diszanalógiák, stb. Az analógia igen népszerű eszköz, ezért különösen fontos, hogy jól bánjunk vele.

- Oksági hibák (*non causa pro causa*)
  Ahogy azt a hibatípus latin elnevezése is mutatja, itt arról a tévesztésről van szó, amikor egy olyan tényezőt jelölünk meg valami okaként, amely annak valójában nem oka. Gyakran ugyanis hajlamosak vagyunk olyan összefüggéseket látni, amelyek nincsenek is ott. Jobban megvilágítja a helyzetet, ha megemlítünk két jellegzetes oksági hibát:

  - *Post hoc ergo propter hoc*: „utána, tehát miatta”. Ez a hiba akkor lép fel, ha két esemény között okozati viszonyt feltételezünk az alapján, hogy (rendszerint) követik egymást. Például:

A húgomnak jó tesz a matek. Minden alkalommal, amikor hazajön a magánóráról, csillog a szeme és szokatlanul magabiztos.

Persze a jó kedélyállapotnak számtalan más oka is lehet, mint a matematikával való foglalatosság.

- *Cum hoc ergo propter hoc*: „vele, tehát miatta”. Ez hasonló, mint az előző, azzal a különbséggel, hogy itt a két esemény nem követi egymást, hanem együtt jelentkeznek. Például:

  Világos, hogy a kábítószer agressziót okoz. Azokban a nagyvárosokban ugyanis, ahol az elmúlt években nőtt a drogfogyasztás, egyben nőtt a fegyveres bűncselekmények száma is.

  Persze sokkal valószínűbb, hogy a két folyamat együttjárása nem egy köztük levő okozati összefüggésnek köszönhető, hanem egy közös oknak (például a szervezett bűnözés megerősödésének).

Meg kell jegyezni, hogy a fenti hibák pontosan arra a „logikára” épülnek, mint a Mill-féle módszerek: ha körülmények együttjárnak, akkor ott okozati kapcsolatot feltételezhetünk. Azonban fontos, hogy a módszerek alkalmazásakor a lehető legnagyobb óvatossággal járjunk el (pl. kombináljuk a módszereket), illetve hogy a legnagyobb körültekintéssel mobilizáljuk a tárggyal kapcsolatos előzetes ismereteket. Az oksági hibák nem egy rossz módszerből, hanem egy jó módszer felületes és elhamarkodott használatából származnak.

Relevancia-hibák

Ebbe az újabb csoportba olyan tévesztések tartoznak, amelyek irreleváns motívumok alapján fogadnak el (vagy utasítanak vissza) egy érvelést. Persze ha tágan értelmezzük ezt a meghatározást, szinte minden érvelési hibára érvényesnek találjuk, itt azonban néhány tisztább esetet veszünk figyelembe.

- <u>*Ad hominem*</u> érvek
  Ezek az érvek általában elutasítanak egy álláspontot, méghozzá az álláspont megfogalmazójának személye alapján. Más szóval: azért nem fogadunk el egy véleményt, mert az egy bizonyos személytől származik, és e személlyel szemben fenntartásaink vannak – ám ezek a fenntartások valójában a személy irreleváns körülményeire vonatkoznak, és nem adnak elégséges alapot a vélemény elutasítására. Néhány altípus a sok közül:

  - Gyalázkodó *ad hominem*: Olyan körülményre hivatkozik, amely irreleváns ugyan, de az általános megítélés szerint rossz fényt vet a kérdéses személyre, és így az egy védekező pozícióba szorul. Ha például egy mai magyar politikus véleményét azon az alapon vetjük el, hogy az illető „komcsi” vagy „náci”, akkor gyalázkodó érvet használunk. Amikor Arnold Schwarzenegger politikai ellenfelei azt állították, hogy Arnold nem lesz jó kormányzó, mert korábban nőket zaklatott, szintén ezt a hibát követték el: attól még persze lehet valaki jó kormányzó, hogy nőket zaklatott, de amint megfogalmazódik ellene ez a vád, kénytelen védekezni ellene, hiszen rossz fényt vet rá. (Hasonló eset a Bill Clinton elnöki kvalitásai és a Monica Lewinsky-affér közti kérdéses kapcsolat.)
  - Érdekekre hivatkozás: Valakinek az álláspontját azon az alapon utasítjuk el, hogy feltételezzük, nem elfogulatlan a véleménye, mert érdekek befolyásolják. Figyelem: ha az érdekek valóban döntő szerepet játszanak, akkor ez nem hiba! Ha például rámutatunk, hogy Béla azon felvetését, mely szerint a bélyegklub költségvetését

tízszeresére kellene emelni, megkérdőjelezhetjük azon az alapon, hogy Béla a költségvetés tíz százalékával saját zsebre gazdálkodhat, akkor nem hibáztunk, ugyanis Béla anyagi érdeke a kérdésben korántsem irreleváns. Ha azonban egy vállalati tanácskozáson Mr. X javaslatát, hogy bővíteni kellene a cég távol-keleti piacát, megkérdőjelezzük azon az alapon, hogy Mr. X-nek koreai barátnője van, akkor szempontunk feltehetőleg irreleváns: ettől még a javaslatot érdemes lehet komolyan megfontolni.

- *Ad hominem tu quoque*: „te is" típusú hiba. A „pont te mondod, aki …" kezdetű mondatok példázzák ezt a hibát, amelyben azért utasítjuk el valakinek a véleményét, mert tudunk olyan esetet felmutatni, amelyben az illető nem annak megfelelően viselkedett. Ubul például állíthatja azt, hogy szerinte a 21. század egyik legsúlyosabb egészségügyi problémája a dohányzás lesz. Ha valaki erre azt feleli, hogy „Pont te mondod, aki napi egy doboz cigit elszívsz?", akkor az illető nem értette meg, hogy Ubul véleménye attól még érdemes lehet a komolyabb megfontolásra, és Ubul dohányzása nem cáfolja az általa képviselt álláspontot.

- <u>*Ad verecundiam*</u> érvek
  Ezek az érvek rosszul hivatkoznak szakértőre vagy szaktekintélyre. Nem az a baj velük, hogy tekintélyre hivatkoznak: ez valójában igen gyakori eleme az érveléseknek, és sokszor szükség van rá (gondoljunk csak a tudományos közlemények hivatkozásaira). Akkor rossz egy ilyen érv, ha forrásszemélyt elégtelen vagy irreleváns motívumok alapján tekinti szakértőnek. Például:

  - Nem megnevezett szakértő: Gyakran találkozhatunk az „Amerikai tudósok kimutatták…" kezdetű (és hasonló) mondatokkal. Ez nem minden körülmények között hiba (hiszen pl. egy bulvárlap nem szokott pontos hivatkozásokat közölni), de amikor a kifejezésnek az az értelme, hogy különösen megbízható fényben tüntesse fel az állítást azáltal, hogy „tudósok"-ra hivatkozik, miközben nem nevezi meg őket, akkor ez az üres hivatkozás valójában elégtelen vagy irreleváns az állítás elfogadása szempontjából.
  - Nem elismert szakértő: Természetesen hiba olyan személyre hivatkozni, akinek a véleményét nincs különösebb okunk elfogadni az adott kérdésben. Egy, az egészségi állapot javításával kapcsolatos vitában nem illik a szomszéd nénire hivatkozni, hacsak nem véletlenül egy orvosról vagy egyéb szakértőről van szó.
  - Más terület szakértője: Akármekkora tekintélye van valakinek a saját szakterületén, ez nem ok arra, hogy más területen is adjunk a véleményére. Ha egy reklámban egy híres színész vagy sportoló például parfümöt reklámoz, akkor felmerül a kérdés, hogy miért fogadjam el a véleményét az adott kérdésben, hiszen a színjátszással vagy sporttal kapcsolatos szakértelme erre nem ad alapot. Ugyanígy, ha egy teológiai vitában Einstein véleményét idézik, akkor ezt joggal vissza lehet utasítani azon az alapon, hogy bár Einstein kitűnően értett a fizikához, de ez nem ok arra, hogy teológiai kérdések kapcsán jobban elfogadjam a véleményét, mint bárki másét.

- <u>*Ad populum*</u> érvelés
  Más néven általános meggyőződésre vagy közvélekedésre hagyatkozás. Annak ellenére, hogy a világgal kapcsolatos ismereteinknek egy jelentős részét a közvélekedésből (vagyis egy általános társadalmi nézetrendszerből) merítjük, érvelések esetén csupán az a tény, hogy egy állítást többnyire elfogadnak az emberek, nem elegendő ahhoz, hogy elutasítsuk az ellenvéleményeket.
  (Ehhez és az előzőhöz hasonló érvelési hibákból még többet fel lehetne sorolni: tradícióra hagyatkozás, elbeszélésre hagyatkozás, stb. – talán el lehet képzelni.)

- *Ad misericordiam*
  Végül olyan hibákkal foglalkozunk, amelyek érzelmi szempontokat kevernek az érvelésekbe. Az *ad misericordiam* magyarul szánalomra hagyatkozást jelent. Tekintsük a következő példát:

  > Kedves tanár úr! Tudom, hogy ezen a vizsgán nem valami fényesen teljesítettem. De kérem, vegye figyelembe, hogy tegnap este megbetegedett a macskám, egész éjjel ápolnom kellett, és így nem tudtam kipihenni magam. Kérem, adjon jobb jegyet!

  Kérdéses, hogy egy vizsgaszituációban a szánalom szempontjának szabad-e megjelennie. A tanárnak elvileg teljesen tárgyilagosan illik dönteni a jegyek sorsáról. Természetesen emberek vagyunk, és a sajnálat sokszor fontos motiváció lehet bizonyos tettekhez, de ha racionális érvekről van szó, akkor törekedni kell az érzelmi szempontok kizárására.

- *Ad metum*
  Más néven aggodalomra hagyatkozás: az érvelő azáltal próbálja manipulálni a közönségét, hogy ellenfelének álláspontját olyannak mutatja be, mint amelyik ilyen vagy olyan veszélyekhez vezet. Persze ha ezt egy átgondolt kockázatelemzés segítségével teszi, akkor nem követ el hibát, ám ha célja az, hogy esetleg alaptalanul aggodalmat keltsen a közönségben és ezáltal nyerje meg, akkor egy irreleváns motívumot mozgósított a vitában. Politikai vitákban gyakori, hogy az ellenfél álláspontját az országra nézve veszélyesnek állítsák be, ám a fenyegetőzés gyakran üres és alaptalan. Meg kell azonban jegyezni, hogy ez igen hatásos lehet, hasonlóan minden érzelmekre hagyatkozó érveléshez. Az érzelmekre való hatás a manipuláció egy igen fontos eszköze.

- *Ad baculum*
  Magyarul bunkó-érv: az érvelő fenyegetéssel próbálja meg befolyásolni ellenfele véleményét. (Az érv elnevezése nem azt tükrözi, hogy az ilyen ember bunkó lenne, hanem azt, hogy mintegy bunkóval – latinul pálcával – fenyegeti a másikat.) Ennek a legdurvább esete a tettlegességgel való fenyegetés, ám érveléselméleti szempontból ez nem túl érdekes. Ennél érdekesebbek az olyan esetek, amikor a fenyegetés annyira rejtetten kerül megfogalmazásra, hogy a fenyegetett észre sem veszi, és azt gondolja, hogy tiszta észérvek alapján alakította ki véleményét.