Newton korai matematikai munkássága

Newton-kurzus, 2014. 03. 10.

Az óra szerkezete

I. Newton matematikai forrásai
Avagy milyen keretek között indult a tevékenysége

II. Kvadratúrák, binomiális tétel
Avagy hozzáállás, kiinduló problémák, első sikerek

III. Az analízis alaptétele
Avagy egy egységes módszertan születése

IV. A fluxióelmélet
Avagy a módszertan elméleti alapvetése és problémái

I. Newton matematikai forrásai

- 1661: Cambridge, Trinity College
- 1664: elkezd matematikával foglalkozni, és egy ideig gyakorlatilag semmi mással. Két év alatt a semmiből valószínűleg kora legügyesebb matematikusává képzi magát. Forrásai:

- Descartes: *La Géométrie*
  – (2.) latin kiadás: Franz van Schooten, 1661
- Ebben egyéb munkák összefoglalói, főként François Viète
- John Wallis: *Arithmetica Infinitorum*, 1655

- (De a matematika „nagykönyvét”, Eukleidész *Elemek*jét ekkor még nem ismeri → újszerű keretben dolgozik)

I.1. A „klasszikus” matematika

- Az antik matematikai tradíció = az *Elemek*ben ábrázolt matematika:
- Kizárólag geometria: minden matematikai probléma geometriai kontextusban lép fel
- Nem numerikus: nem konkrét mennyiségi viszonyokra kíváncsi, hanem tetszőleges „nagyságok” összefüggéseire
- Szigorúan demonstratív: minden állítást bebizonyít
- Axiomatikus-deduktív: az állításokat visszavezeti egymásra és végül néhány közös alapállításra

$$\Downarrow$$

- 17. sz.: a csalhatatlan észhasználat és az általa előállított megkérdőjelezhetetlen, biztos tudás mintaképe
- De: semmit sem tudnak hozzátenni, sőt…

Eukleidész: *Elemek*

Második könyv

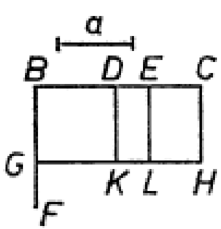
Definíciók

1. A derékszögű paralelogrammákról (azaz a téglalapokról) azt mondjuk, hogy a derékszöget közrefogó két (oldal) szakasz közrefogja őket.
2. Nevezzük gnómónnak minden paralelogrammában az átló körülötti bármelyik paralelogrammát a két paraplérómával együtt.*

II. 1. Tétel

*Ha van két szakasz, és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével.**

Legyen *a* és *BC* két szakasz, és osszuk föl *BC*-t találomra a *D* és *E* pontokban. Azt állítom, hogy az *a* és *BC* által közrefogott téglalap egyenlő az *a* és *BD* meg az *a* és *DE* meg az *a* és *EC* által közrefogott téglalapokkal.



Húzzuk a *B* pontból *BC*-vel derékszögben *BF*-et (I. 11.), és mérjük rá az *a*-val egyenlő *BG*-t (I. 3.), és húzzuk *G*-n át *BC*-vel párhuzamosan a *GH*, *D*-n, *E*-n és *C*-n át pedig *BG*-vel párhuzamosan a *DK*, *EL* és *CH* egyeneseket (I. 31.).

Egyenlő hát *BH* a *BK*-val, *DL*-lel meg *EH*-val. És *BH* az *a* és *BC* közötti téglalap, mert *BG* és *BC* fogja közre, *BG* pedig egyenlő *a*-val; s *BK* az *a* és *BD* közötti téglalap, mert *BG* és *BD* fogja közre, *BG*

pedig egyenlő *a*-val, s *DL* az *a* és *DE* közötti téglalap, mert *DK*, azaz *BG*, egyenlő *a*-val (I. 34.). És végül *EH* hasonlóképp az *a* és *EC* közötti téglalap, az *a* és *BC* közötti téglalap tehát egyenlő az *a* és *BD* meg az *a* és *DE* meg az *a* és *EC* közötti téglalapokkal.

Ha tehát van két szakasz és az egyiküket valahány részre osztjuk, akkor a két szakasz által közrefogott téglalap egyenlő a fölosztatlan szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok összegével. Éppen ezt kellett megmutatni.

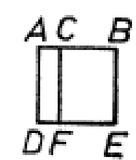
II. 2. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel.**

Osszuk ugyanis ketté az *AB* szakaszt a tetszőleges *C* pontban. Azt állítom, hogy az *AB* és *BC* által közrefogott téglalap meg az *AB* és *AC* által közrefogott téglalap (együtt) egyenlő az *AB*-re emelt négyzettel.

Legyen ugyanis *ADEB* az *AB* oldalú négyzet (I. 46.), és húzzuk a *C* ponton át az *AD* és a *BE* egyenessel párhuzamosan *CF*-et (I. 31. és 30.).

Egyenlő hát *AE* az *AF*-fel meg *CE*-vel. És *AE* az *AB* oldalú négyzet, *AF* az *AB* és *AC* által közrefogott téglalap, mert *AD* és *AC* fogja közre, *AD* pedig egyenlő *AB*-vel, s *CE* az *AB* és *BC* közötti téglalap, mert *BE* egyenlő *AB*-vel. Az *AB* és *AC* meg az *AB* és *BC* közötti téglalapok tehát (együtt) egyenlők az *AB* oldalú négyzettel.



Ha tehát egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz és az egyes részek által közrefogott téglalapok (együtt) egyenlők a teljes szakaszra emelt négyzettel. Éppen ezt kellett megmutatni.

F.: XIII. 8. Függelék, 10.

II. 3. Tétel

*Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakasz meg az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő a két rész által közrefogott téglalap és az említett részre emelt négyzet összegével.**

I.2. A „modern” matematika

- 15-16. sz.: Főként arab hagyományon alapuló „algebrista” tradíció feléled:
- Mennyiségek közötti viszonyok kifejezése mennyiségek manipulációjának segítségével
- Gyakorlat által motivált számítások, számmisztika és -szimbolika
- „Barkácsolás”: nincs egységes módszertan, nincsenek bizonyítások, hiányzik az egyetemesen érvényes „igazságok” kimutatásának igénye

$\Downarrow$

- 17. sz. (főként eleje): alantas, megbízhatatlan, mesterségbeli ügyeskedés, nem tudomány
- De: rohamosan fejlődik

I.2/a. François Viète (1540-1603)

- 16. sz. vége: a legtöbb fennmaradt antik matematikai mű feldolgozásra kerül + az arab matematika is + ezen is túllépnek: harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásai
- „ars analyticae”: betűalgebra → magánhangzókkal az ismeretlent, mássalhangzóval az ismertet
  → paraméter-szerű elgondolás: általános megoldások
- Trigonometrikus megoldások algebrai egyenletekhez pl. egy 45-öd fokú egyenlet m.o.-a ilyen úton: nagy siker
- Másod- és harmadfokú egyenletek gyökei és együtthatói közti összefüggések („Viete-formulák”)

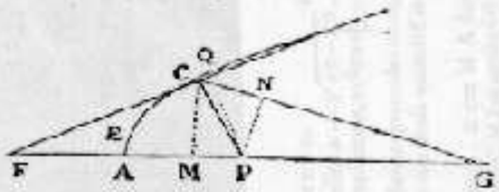
- Egyenletek általános kezelése, szimbolikus, algebrai jellegű matematikai gondolkodás

I.2/b. René Descartes (1596-1650)

- *La Géométrie*: eredetileg az *Értekezés a módszerről* függelékének szánja
- A legforradalmibb mű a korban (v.ö. pl. Fermat), és a legnagyobb hatással van a század 2. felére
- Apollóniosz, Papposz stb. belátásainak rendszerezése és egységes keretbe ágyazása: „analitikus geometria” őse
- „A geometria bármely problémája visszavezethető erre a tételre: bizonyos vonalak hosszának ismerete elegendő a megszerkesztéshez.”
- → vonalszakaszokat konkrét mennyiségekkel reprezentál, és a probléma megoldását algebrai egyenletekkel végzi el (ahány ismeretlen vonal, annyi egyenlet) + görbék → algebra és geometria egysége

La Géométrie

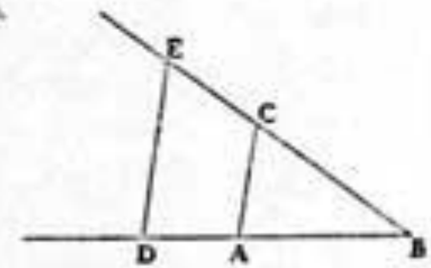
Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie ſuppoſe la choſe deſia faite, & que la ligne cherchée eſt C P, laquelle ie prolonge iuſques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie ſuppoſe eſtre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en ſorte que faiſant M A ou C B ∞ y, & C M, ou B A ∞ x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis ie fais P C ∞ s, & P A ∞ v, ou P M ∞ $v - y$, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay ss, qui eſt le quarré de la baze eſgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay x ∞ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien y ∞ $v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui eſt ayſé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete ſomme au lieu d'xx, & ſon cube au lieu d'x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que ie veuille oſter; oubien

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

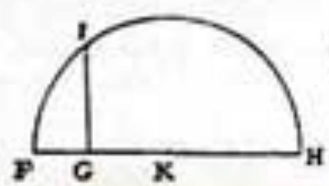


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire

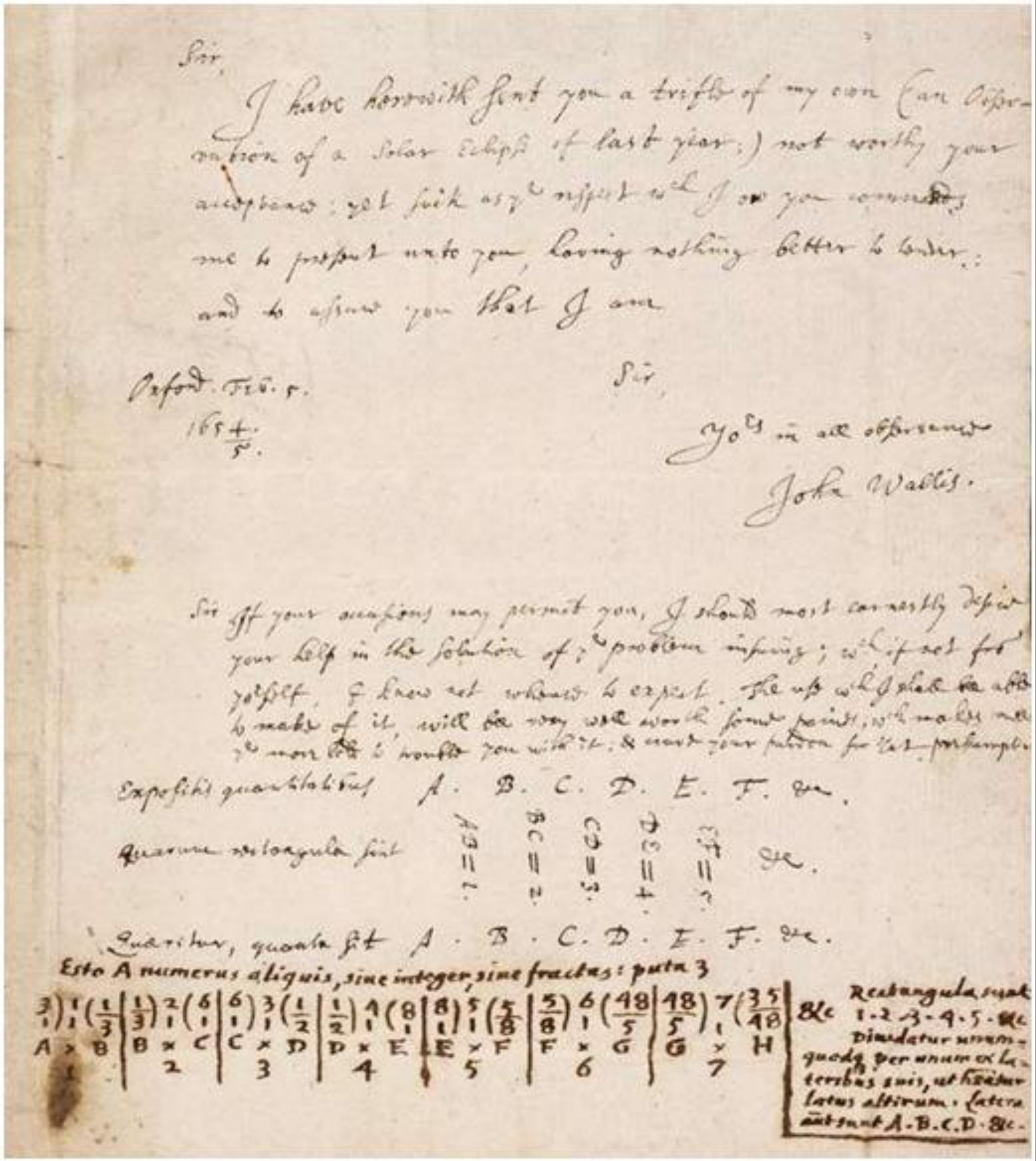
I.2/c. John Wallis (1616-1703)

- *Arithmetica Infinitorum*: görbék alatti területek és görbékhez húzott érintők „végtelen kis” részekre való osztás révén (Cavalieri módszere algebrásítva)
- Végtelen sorokkal operál
- Megmutatja pl.: az x^n görbe alatti terület $x^{n+1}/n+1$ egész kitevőkre (az első 9 esetre megnézni, majd általánosít)
- Fő problémája: a kör területe

$$\Downarrow$$

- Newton pontosan ezekből a problémákból indul ki

Wallis levél


Sir,

I have herewith sent you a trifle of my own (an Observation of a Solar Eclipse of last year,) not worthy your acceptance: yet such as ye respect wch I owe you commands me to present unto you, having nothing better to tender:

and to assure you that I am

Oxford. Feb. 5. 1654/5.

Sir,

Yours in all observance

John Wallis.

Sir if your occasions may permit you, I should most earnestly desire your help in the solution of ye problem insuing; wch if not for yourself, I know not whence to expect. The use wch I shall be able to make of it, will be very well worth some paines, wch makes me ye more bold to trouble you with it; & need your pardon for that presumption.

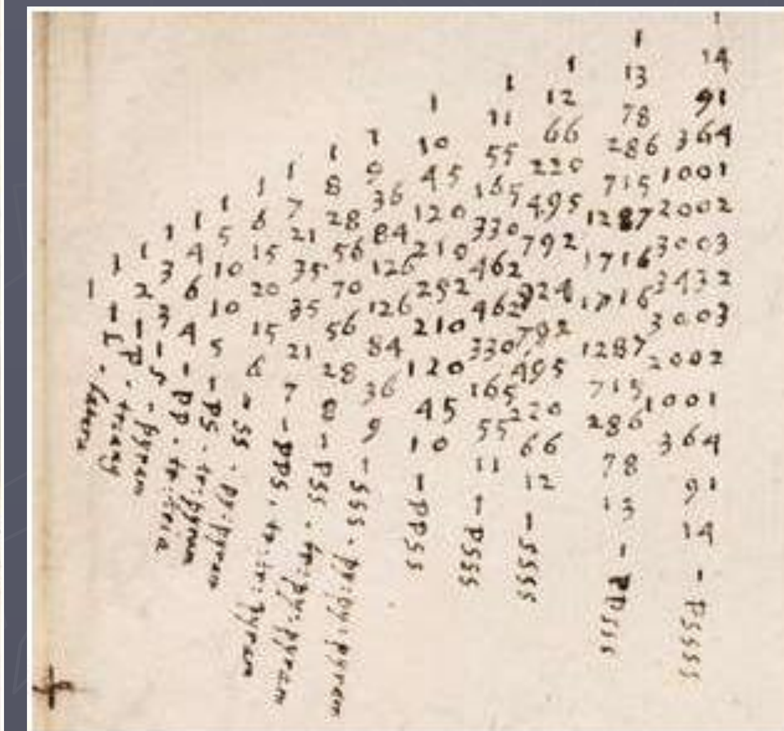
Expositis quantitatibus A. B. C. D. E. F. &c.

Quarum rectangula sint AB=1. BC=2. CD=3. DE=4. EF=5. &c.

Quaeritur, quanta sit A. B. C. D. E. F. &c.

Esto A numerus aliquis, sive integer, sive fractus: puta 3

Rectangula sunt 1.2.3.4.5.&c Dividatur unumquodque per unum ex lateribus suis, ut habeatur latus alterum. Latera autem sunt A.B.C.D.&c.



II. Kvadratúrák, binomiális tétel

- Eleinte: Kúpszeletek szerkesztése és sokféle algebrai kifejezése Descartes alapján
- 6 hónap után: görbék vizsgálatára általános algebrai módszereket dolgoz ki
- „Haveing y[e] nature of a crooked line expressed in Algebr: termes to find its axes, to determin it & describe it geometrically &c.”
- Görbület vizsgálata közelítő (simuló) körökkel: Descartes + érintő szerkesztése egy adott pontban
- Kvadratúrák: görbék „négyszögesítései”, vagyis a görbe alatti terület kiszámítása egyenlő területű téglalap szerkesztésével (Wallis)
- Nem a klasszikus geometria felől közelít (alig ismeri)

II.1. A kör „négyszögesítése”

- A negyedkört kifejező egyenlet: $y = (1 - x^2)^{½}$
- Wallis problémája: Tudjuk, hogy

  $(1 - x^2)^0$ alatti terület x
  $(1 - x^2)^1$ alatti terület $x - x^3/3$
  $(1 - x^2)^2$ alatti terület $x - 2x^3/3 + x^5/5$
  $(1 - x^2)^3$ alatti terület $x - 3x^3/3 + 3x^5/5 - x^7/7$
  stb.

  Hogyan lehet ebből $(1 - x^2)^{½}$ esetére interpolálni?
- Wallis adott egy megoldást. Newton egy általánosabbat, amiből elég messzire tudott továbblépni…

II.1/a. Az együtthatók táblázata

		[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	…
x	×	1	1	1	1	1	1	…
$-x^3/3$	×	0	1	2	3	4	5	…
$x^5/5$	×	0	0	1	3	6	10	…
$-x^7/7$	×	0	0	0	1	4	10	…
.		.	.	.	0	1	5	…
.		.	.	.	.	0	1	…
.		.	.	.	.	.	0	…

Milyen szabályosságot látunk? (Pl. az oszlopok 11 „hatványai”)

II.1/b. A keresett összefüggés

- Newton *nem* a Pascal-háromszögre mozdul rá
- Az első tag együtthatója mindig 1, a másodiké mindig *n*
- Összefüggés: (n - 0)/1 × (n - 1)/2 × (n - 2)/3 × …
  → ez alapján jönnek ki az együtthatók (ahányadik együttható, (annyi - 1) tagot kell figyelembe venni)

  Pl. n = 4 esetén
  - harmadik együttható: (4 - 0)/1 × (4 - 1)/2 = 4 × 3/2 = 6
  - negyedik együttható: 6 × (4 - 2)/3 = 6 × 2/3 = 4
  - ötödik együttható: 4 × (4 - 3)/4 = 4 × 1/4 = 1
  - hatodik együttható: 1 × (4 - 4)/5 = 4 × 0 = 0
  és innentől 0.
- Honnan tudjuk? Ránézett, és bejött…

II.1/c. Interpoláció a körre

- Ez már „nyilván” érvényes törtkitevőkre is, pl. ½-re. Így a $(1 - x^2)^{1/2}$ alatti terület:

  $x - (1/2)x^3/3 - (1/8)x^5/5 - (1/16)x^7/7 - (5/128)x^9/9 - \ldots$

- Míg az egész kitevők esetén a sor mindig véges, törtkitevőknél végtelen sorokat kapunk
  $\rightarrow$ végtelen sorral „közelíthetjük” itt π értékét
- De Newton egyáltalán nem számolta ki: tökéletesen megbízott módszerében $\rightarrow$ a jól ismert érték kiszámítása nem lenne kihívás…

II.2. A logaritmus kvadratúrája

- Ugyanígy támadjuk meg a hiperbolát: ez eddig senkinek sem sikerült
- Az $y = 1/x$ görbét nem érdemes: az x^0, x^1, x^2… alatti terület $x^1/1$, $x^2/2$, $x^3/3$…, de ebből nem látszik, mi lenne a x^{-1} alatti terület: $x^0/0$???
- Ehelyett toljuk el egy kicsit: $y = 1/(1 + x)$
- Ehhez:

$(1 + x)^0$ kvadratúrája x
$(1 + x)^1$ kvadratúrája $x + x^2/2$
$(1 + x)^2$ kvadratúrája $x + 2\,x^2/2 + x^3/3$
$(1 + x)^3$ kvadratúrája $x + 3\,x^2/2 + 3\,x^3/3 + x^4/4$
stb.

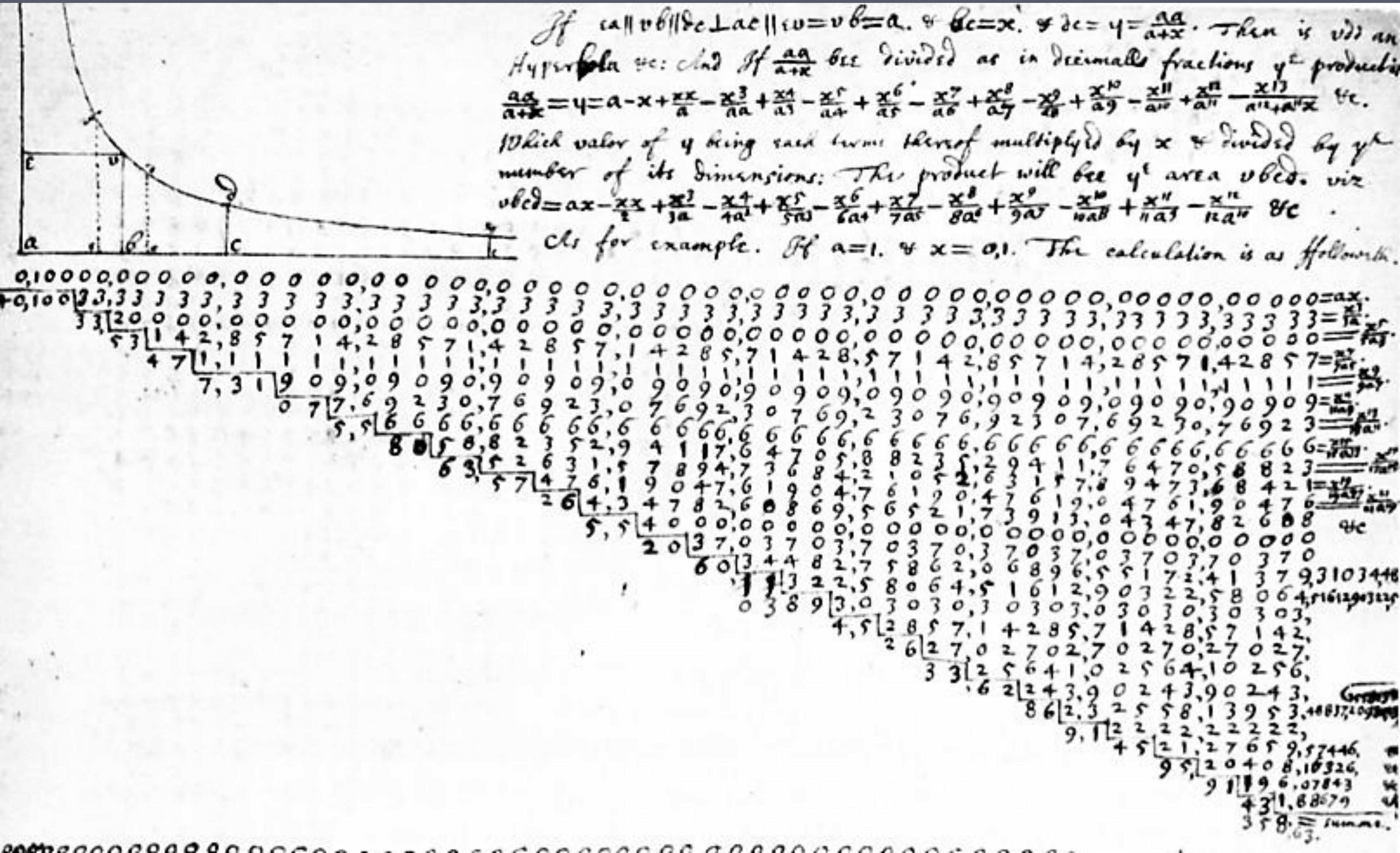
II.2/a. Az együtthatók táblázata

		[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	…
x	$\times$	1	1	1	1	1	1	…
$x^2/2$	$\times$	0	1	2	3	4	5	…
$x^3/3$	$\times$	0	0	1	3	6	10	…
$x^4/4$	$\times$	0	0	0	1	4	10	…
.		.	.	.	0	1	5	…
.		.	.	.	.	0	1	…
.		.	.	.	.	.	0	…

II.2/b. Extrapoláció

- Itt most nem kettő közé kell interpolálni, hanem „hátrafelé" extrapolálni egyet → ez könnyebb
- Ha az első sorban 1 lesz (mind mindenütt), akkor a második sorban -1 kell: feltesszük, folytatódik erre a „Pascal-háromszög" (vagyis egy szám és a fölötte lévő összeadva a számtól jobbra lévőt adja ki)
- Ezért a 3. sorban 1 kell, a 4.-ben -1, stb.
- Tehát $(1 + x)^{-1}$ alatti terület: $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$
- Ismét végtelen sort kaptunk!
- Itt már érdemes számításokat végezni: 55 jegy pontosságra logaritmus-számítások könnyedén
- Megj.: egy éve foglalkozik matekkal, teljesen önállóan, nincs még BA-je sem…

II.2/c. Logaritmusszámítások



If $ca \parallel vb \parallel de \perp ac \parallel ev = vb = a$. & $bc = x$. & $dc = y = \frac{aa}{a+x}$. Then is vdd an Hyperbola &c: And if $\frac{aa}{a+x}$ bee divided as in decimall fractions ye product is

$$\frac{aa}{a+x} = y = a - x + \frac{xx}{a} - \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} + \frac{x^6}{a^5} - \frac{x^7}{a^6} + \frac{x^8}{a^7} - \frac{x^9}{a^8} + \frac{x^{10}}{a^9} - \frac{x^{11}}{a^{10}} + \frac{x^{12}}{a^{11}} - \frac{x^{13}}{a^{12}+a^{11}x} \text{ \&c.}$$

Which valor of y being each terme thereof multiplyed by x & divided by ye number of its dimensions: The product will bee ye area $vbed$. viz

$$vbed = ax - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3} - \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^7}{7a^5} - \frac{x^8}{8a^6} + \frac{x^9}{9a^7} - \frac{x^{10}}{10a^8} + \frac{x^{11}}{11a^9} - \frac{x^{12}}{12a^{10}} \text{ \&c.}$$

As for example. If $a=1$. & $x=0,1$. The calculation is as followeth.

II.3. Az általános módszer

- Tudjuk, hogy x^n alatti terület $x^{n+1}/n+1$ (negatív kitevőkre is)
- Tudjuk, hogy ha a görbe polinomiális, akkor a kvadratúra egyenlő a tagok alatti területek összegével
- Ha x az első hatványon van a nevezőben, vagy törtkitevős a kifejezés, akkor végtelen sor, és tagonként kell számolni
- $(b + x)^{m/n}$ együtthatóit eszerint keressük:

$$\frac{1 \cdot m \cdot (m - n) \cdot (m - 2n) \cdot (m - 3n) \cdot \ldots}{1 \cdot n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot \ldots}$$

- Később: tovább általánosodik (pl. ha x és y ugyanabban a tagban megjelenik, és nem fejezhetők ki egymás explicit függvényeként…)

II.3/a. A binomiális tétel szerepe

- Lényeg: görbék kifejezhetők végtelen sorokkal
  → újabb algebrai reprezentáció a „geometriai” vonalakra
- A végtelen sorok ugyanolyan törvényeknek engedelmeskednek, mint a véges mennyiségek az algebrában (→ műveletek, egyenletek, stb.)
  → nem pusztán „közelítések”
- A binomiális tétel [$(b + x)^m$ polinom alakjában az együtthatók meghatározása] általánosítása a dolog motorja
- Először Leibniz-cel közli egy 1676-os levélben
- Először Wallis *Algebra*-jában jelenik meg (1685)
- V.ö.: Newton keveset és vonakodva publikál…

II.3/b. Végtelen sorok

„Amit a szokásos Analízis képes egyenletek által elvégezni véges számú tagokkal (már amennyiben ez lehetséges), ugyanazt elvégezhetjük végtelen egyenletek által is, ezért nem tettem kérdésessé, hogy ezt is Analízisnek kell nevezni. Ugyanis ezek a gondolatmenetek nem kevésbé bizonyosak, mint a másikak, sem az egyenletek nem kevésbé pontosak, bár mi, halandók, kiknek gondolkodása szűk keretek közé szorult, sem kifejezni, sem pedig felfogni nem tudjuk ezen egyenletek minden tagját…”

(*De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*)

III. „Az analízis alaptétele”

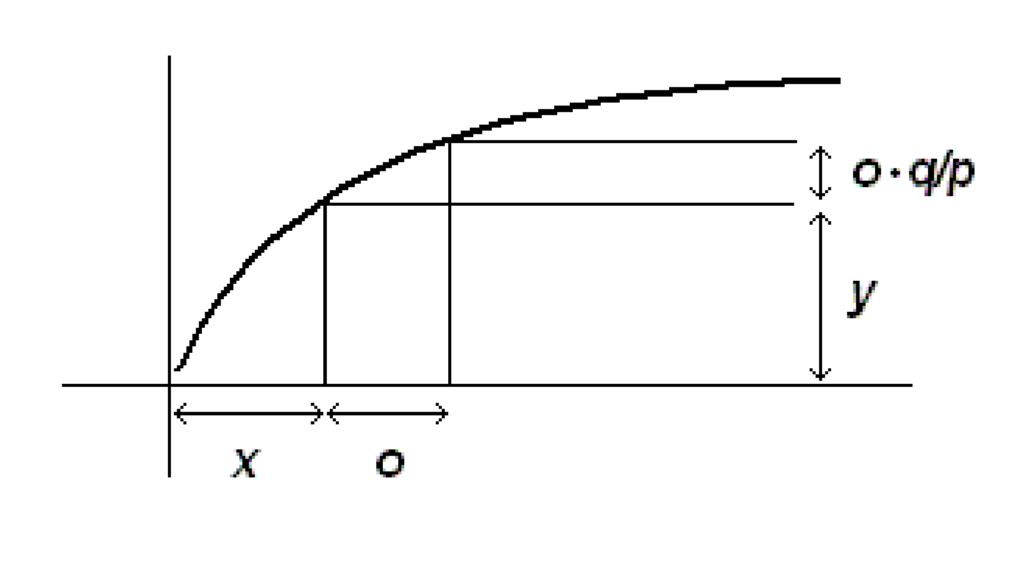
- Cavalieri, Wallis, stb.: a görbék alatti területet sok, „oszthatatlanul kis” terület összegeként képzelték el („infinitezimálisok”)
- Newton: hasonló módon, de nála nem statikus kis területek vannak, hanem mozgás által meghatározott dinamikus összegzések → egyre erősödő mechanikai motiváció
- A „végtelenül kis” szakaszok helyett pillanatnyi sebességekkel dolgozik
  ↔ ezzel persze nem kerülte ki az infinitezimálisokat: a pillanatnyi sebesség az infinitezimálisan kis idő alatt megtett út
  → az idő a matematikában is alapvetővé válik
- Semmi ilyesmi nincs: „tart a nullához”, „határérték”, stb.: ezek későbbi fogalmak

III.1. Az érintő meghatározása

Tfh. (1) $\mathbf{y = a \cdot x^m}$

Ekkor kis *o* növekmény:

(2) $y + o \cdot q/p = a \cdot (x + o)^m$



Tudjuk, hogy (2) jobb oldala:

$a \cdot x^m + a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} +$ „*blabla*”$\cdot o^2 \cdot x^{m-2} +$ „*blablabla*”$\cdot o^3 \cdot x^{m-3} + \ldots$

(2) – (1):

$o \cdot q/p = a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} +$ „*blabla*”$\cdot o^2 \cdot x^{m-2} +$ „*blablabla*”$\cdot o^3 \cdot x^{m-3} \ldots$

/*o* :

$q/p = a \cdot m \cdot x^{m-1} +$ „*blabla*”$\cdot o \cdot x^{m-2} +$ „*blablabla*”$\cdot o^2 \cdot x^{m-3} \ldots$

Mivel *o* végtelen kicsi, ezért a meredekség: $\mathbf{q/p = a \cdot m \cdot x^{m-1}}$

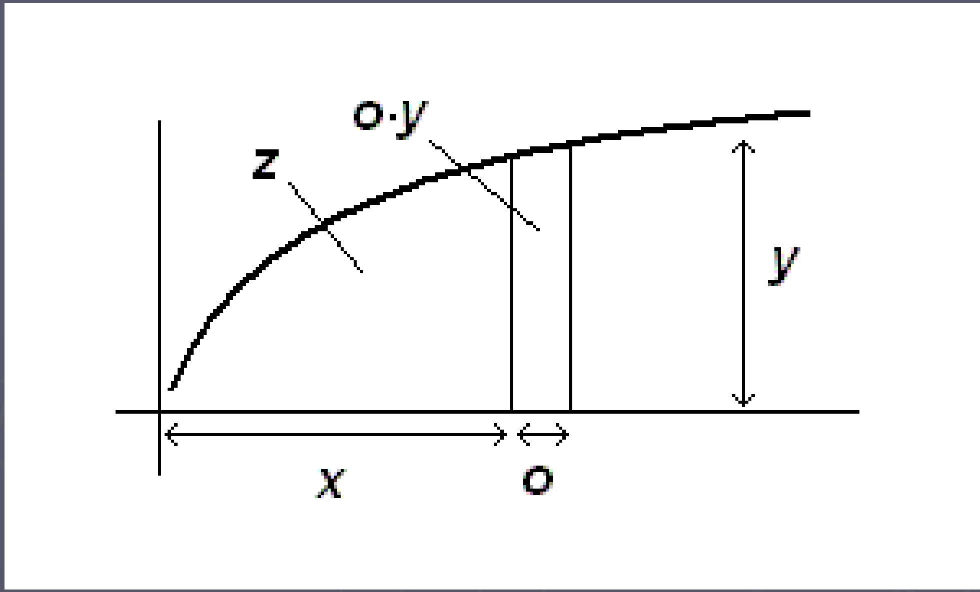
III.2. A növekmények módszere

„Észre kell vennünk: Először, hogy azok a tagok mindig eltűnnek, ahol *o* nem szerepel, mert ezek megfelelnek az eredeti egyenletnek. Másodszor, ha a maradék Egyenletet leosztjuk *o*-val, akkor azok a tagok szintén eltűnnek, amelyekben *o* megmarad, mert ezek végtelenül kicsik. Harmadszor, hogy a végül megmaradó tagok olyan formájúak lesznek, amilyeneknek lenniük kell a kiinduló szabály alapján."

(1665. november 13: „Hogyan találjuk meg testek sebességét azon vonal alapján, amelyet leírnak"
→ egyike a „rendszerező" jegyzeteinek)

III.3. A görbe meghatározása területből

Legyen a görbe alatti terület:



(1) $\mathbf{z = a \cdot x^m}$

(2) $z + o \cdot y = a \cdot (x + o)^m$

Ismét (2) jobb oldala:

$a \cdot x^m + a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„}\textit{blabla}\text{”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„}\textit{blablabla}\text{”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} + \ldots$

(2) – (1):

$o \cdot y = a \cdot m \cdot o \cdot x^{m-1} + \text{„}\textit{blabla}\text{”} \cdot o^2 \cdot x^{m-2} + \text{„}\textit{blablabla}\text{”} \cdot o^3 \cdot x^{m-3} \ldots$

/*o* :

$y = a \cdot m \cdot x^{m-1} + \text{„}\textit{blabla}\text{”} \cdot o \cdot x^{m-2} + \text{„}\textit{blablabla}\text{”} \cdot o^2 \cdot x^{m-3} \ldots$

Mivel *o* végtelen kicsi, ezért a keresett görbe: $\mathbf{y = a \cdot m \cdot x^{m-1}}$

III.4. Egységes matematikai terület

- A fenti példák megmutatják: a két probléma (érintő meghatározása és terület kiszámítása) egymás *inverze* → a kettő együtt egy egységes területet körvonalaz („analízis alaptétele”: differenciálás és integrálás kapcsolata)
- Megjegyzés: bár a fenti ismertetés kicsit csal (III.3 kicsit későbbi (1669), egyszerűbb az 1665-ös próbálkozásoknál), hasonló felismeréseket tesz a korban először konkrét esetekben (parabola, hiperbola, stb.), majd általános megfogalmazásokat dolgoz ki
- Ezután 3-4 évig alig nyúl matematikához (és ha igen, akkor annak mechanikai motivációja van), és jó ideig erre támaszkodik (bár az alapokat újra és újra próbálja tisztába tenni → igen sokáig nem publikálja)

III.5. A géniusz Newton

- „Nincs oly göbe vonal, légyen az bármely háromtagú egyenlettel kifejezett, még ha benne az ismeretlen mennyiségek hatnak is egymásra […], melyről kevesebb mint egy negyedóra fele alatt meg ne tudnám mondani, hogy négyzetesíthető-e, vagy hogy mely legegyszerűbb figurákkal összevethető, legyenek e figurák kúpszeletek vagy bármi mások. És ekkor közvetlen és rövid úton (megkockáztatom, a legrövidebbben, melyet a dolgok természete megenged az általános számára) össze is hasonlítom őket…” (1676, egy Collinsnak írt levél)
- Ez a zsenitudat 1666-ra kifejlődik benne, önálló matematikai sikereinek köszönhetően, aztán élete végéig ott is marad…

IV. Fluxióelmélet

Próbálkozások az új matematikai elmélet letisztázására:

1. *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Analízis végtelen sok tagú egyenletek segítségével), 1669 (publikálva: 1711)
2. *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (A fluxiók és a végtelen sorok módszere), 1671 (publ.: 1736)
3. *Tractatus de Quadratura Curvarum* (Értekezés a görbék kvadratúrájáról), 1676 (publ: 1704, az *Opticks* függeléke)
4. Wallis *Algebra*-jában (1685) Newton először publikálta a fluxióelméletet (második kiadás latinul: 1693)
5. *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, 1687

IV.1. Fluxiók, fluensek

- 1671: ***o*** már nem x növekménye, hanem „végtelenül kis időintervallum” $\rightarrow$ minden változó időfüggő lesz
- Ha **x** és **y** a fluens („folyó”) mennyiségek, akkor ezek változásának sebességei, a fluxiók $\dot{x}$ és $\dot{y}$
(és ezek változásának sebességei $\ddot{x}$ és $\ddot{y}$, stb.)
(Sőt: adott x-et fluxiónak tekintve a hozzá tartozó fluens $\acute{x}$, annak a fluense $\H{x}$, stb.)
- $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^m$ - ebből itt is kijön: $\dot{y} = m \cdot x^{n-1} \cdot \dot{x}$
- A módszer gyakorlatilag ugyanaz, de a nézet kicsit eltér: időbeli változások mennek végbe
$\rightarrow$ egyre inkább a fizikához közelít az elmélet
- Cél: megszabadulni az oszthatatlanoktól, de ez sikertelen

IV.2. Fluxiók és a mozgás

„Itt nem úgy kezelem a matematikai mennyiségeket, mint amik nagyon kis részekből állnak, hanem mint amiket folytonos mozgás határoz meg. A vonalakat nem a részek összetétele, hanem pontok mozgása hozza létre, a felületeket a vonalak mozgása, a testeket a felületek mozgása, a szögeket a szárak forgása, az időtartamokat a folyamatos *fluxio*… A fluxiók nem mások, tetszőleges közelítéssel, mint a folyó mennyiségek idő szerinti növekményei, olyan kicsik és olyannyira egyenlők, mint amennyire lehetséges, és, hogy pontosan fogalmazzunk, a születőben lévő növekmények első arányában állnak, mégis kifejezhetők bármely vonallal, amely arányos velük.”

(*Tractatus de Quadratura Curvarum*)

IV.3. Az alapprobléma

- Hiába próbál megszabadulni tőle, a kis *o* növekmény ott van, még ha növekmények „születőben lévő arányáról” beszél is: ez az „oszthatatlanok” feltételezése
- Márpedig mi az az *o*, amit egyszer végesnek tekintünk és leosztunk vele, máskor meg végtelenül kicsinek és elhanyagoljuk?
- Bár az elmélet sikeres és rengeteg problémát jól kezel, az alapok továbbra is kérdésesek maradnak (Leibniz felépítésében hasonló módon)
- Az alapok tisztázására több mint 150 (!) évet kell várni: határérték-fogalom letisztázása, ε-δ „nyelv” megalkotása, stb. (Cauchy, Weierstrass)

IV.4. George Berkeley kritikája

- Egy alapos, részletekbe menő filozófiai kritika: *Az analizáló*, 1734
- Az elme számára nehéz, „hogy világos ideákat formáljon az idő legkisebb részecskéiről, vagy az ezekben létrejövő legkisebb növekményekről; s még inkább, hogy felfogja a momentumokat, azaz a fluens mennyiségek növekményeit *in situ nascendi*, tehát létrejöttük legkezdetén, mielőtt még véges mennyiségekké válnának. Ennél is nehezebbnek látszik felfogni az ilyen születőben levő, befejezetlen entitások elvont sebességeit. A sebességek sebességei, a másod-, harmad-, negyed- és ötödrendű sebességek stb. azonban, ha nem tévedek, teljességgel meghaladják az emberi felfogóképességet."
- „De mik ezek a fluxiók? Az eltűnőben levő növekmények sebességei. És mik ezek az eltűnőben levő növekmények? Se nem véges mennyiségek, se nem végtelenül kicsinyek, még csak nem is semmik. Mi mások lennének tehát, mint a kimúlt mennyiségek kísértetei?"

IV.5. A későbbi matematikai stílus

- 1670-es évek: fokozatosan elhidegül a „szimbolikus analízis" algebrai stílusától, és ezzel az egész „modern" matektól, miközben beleszeret a görög geometriába
- „Világos, hogy a módszerük [az ókoriaké] sokkal elegánsabb, mint a kartéziánus. Ő [Descartes] egy algebrai kalkulus segítségével jutott eredményre, melyet ha szavakra írnánk át (követve az ókoriak gyakorlatát), akkor oly fárasztó és szövevényes lenne feladatunk, hogy hányinger fogna el bennünket…" (1670)
- A *Principia* már geometriai úton fejti ki az elméletet: az analízis csak „heurisztika", felfedezés, de nem biztos tudás
- Mikor az 1699-ben kezdődő, Leibniz-cel folytatott prioritási vita hatására publikálni kezdi korábbi eredményeit, azokat meghamisítja, geometrizálja, átírja a gyanús részeket
- A fontos eredmények „algebrista" korszakából származnak, de befolyásos korában antimodernista, „reakciós" attitűd

Book One

THE MOTION OF BODIES

SECTION I

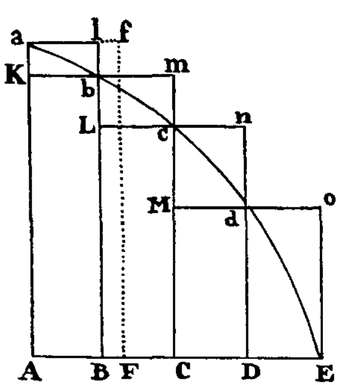
The method of first and last ratios of quantities, by the help of which we demonstrate the propositions that follow.

LEMMA I

Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer to each other than by any given difference, become ultimately equal.

If you deny it, suppose them to be ultimately unequal, and let D be their ultimate difference. Therefore they cannot approach nearer to equality than by that given difference D; which is contrary to the supposition.

LEMMA II



If in any figure AacE, *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inscribed any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c., comprehended under equal bases* AB, BC, CD, *&c., and the sides,* Bb, Cc, Dd, *&c., parallel to one side* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c., are completed: then if the breadth of those parallelograms be supposed to be diminished, and their number to be augmented* in infinitum, *I say, that the ultimate ratios which the*

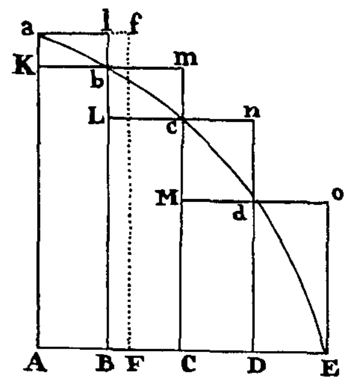
inscribed figure AKbLcMdD, *the circumscribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratios of equality.*

For the difference of the inscribed and circumscribed figures is the sum of the parallelograms K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, that is (from the equality of all their bases), the rectangle under one of their bases K*b* and the sum of their altitudes A*a*, that is, the rectangle AB*la*. But this rectangle, because its breadth AB is supposed diminished *in infinitum,* becomes less than any given space. And therefore (by Lem. I) the figures inscribed and circumscribed become ultimately equal one to the other; and much more will the intermediate curvilinear figure be ultimately equal to either. Q.E.D.

LEMMA III

The same ultimate ratios are also ratios of equality, when the breadths AB, BC, DC, *&c., of the parallelograms are unequal, and are all diminished* in infinitum.

For suppose AF equal to the greatest breadth, and complete the parallelogram FA*af*. This parallelogram will be greater than the difference of the inscribed and circumscribed figures; but, because its breadth AF is diminished *in infinitum,* it will become less than any given rectangle. Q.E.D.



Cor. I. Hence the ultimate sum of those evanescent parallelograms will in all parts coincide with the curvilinear figure.

Cor. II. Much more will the rectilinear figure comprehended under the chords of the evanescent arcs *ab, bc, cd,* &c., ultimately coincide with the curvilinear figure.

Cor. III. And also the circumscribed rectilinear figure comprehended under the tangents of the same arcs.

Cor. IV. And therefore these ultimate figures (as to their perimeters *ac*E) are not rectilinear, but curvilinear limits of rectilinear figures.